15 લક્ષ-સાતત્ય-વિકલન

અગત્યની વ્યાખ્યા અને જરૂરી સૂત્રો :

(1) માનાંક વિધેય : $f : R \to R, f(x) = |x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$ એ માનાંક વિધેય છે.

ગુણધર્મો : (i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (ii) $|x - y| \geq \big| |x| - |y| \big|$ (iii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, a \in R^+$

(2) પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય : $f : R \to Z, f(x) = [x] = x$ થી અધિક નહિ તેવો મહત્તમ પૂર્ણાંક.

આ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય છે.

$f(3.2) = [3.2] = 3, \ f(1) = [1] = 1, \ f(-1{\cdot}3) = [-1.3] = -2$

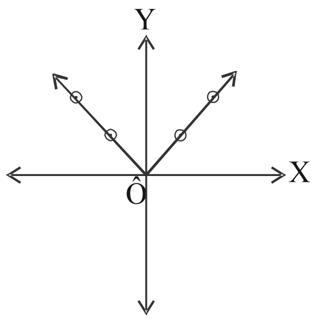
(3) ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક વિધેય : $f : R \to Z, f(x) = \lceil x \rceil = x$ થી નાનો નહિ તેવો ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક.

આ ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય છે.

$f(5.3) = \lceil 5.3 \rceil = 6, \ f(-1.9) = \lceil -1.9 \rceil = -1, \ f(4) = \lceil 4 \rceil = 4, \ f(-2.3) = \lceil -2.3 \rceil = -2$

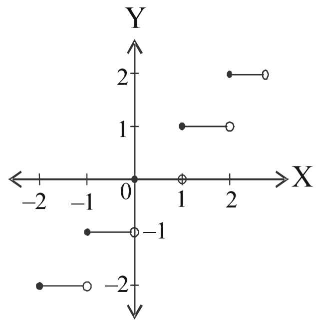
કેટલાંક વાસ્તવિક વિધેયોના આલેખ :

(1) માનાંક વિધેય : $f : R \to R, f(x) = |x|$



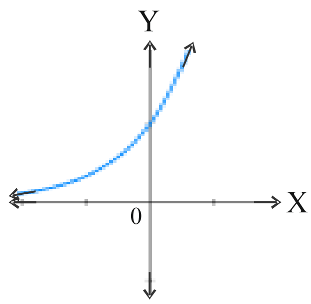
આકૃતિ 15.1

(2) પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય : $f : R \to Z, f(x) = [x]$



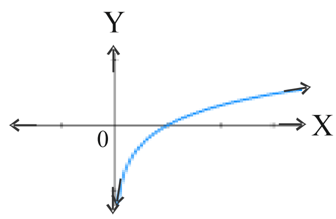
આકૃતિ 15.2

(3) ઘાતાંકીય વિધેય : $f : R \to R, f(x) = a^x$ જ્યાં $a > 0, a \neq 1 \ a > 1$



આકૃતિ 15.3

(4) **લઘુગુણકીય વિધેય :** $f : R^+ \to R, f(x) = \log_a x$ જ્યાં $a > 0, a \neq 1$



આકૃતિ 15.4

ડાબી બાજુનું લક્ષ : (c, a) પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે જો યથેચ્છ $\varepsilon > 0$ ને અનુરૂપ $\delta > 0$ મળે કે જેથી $c < a - \delta$ અને $\forall x, x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ તો વિધેય $f(x)$ નું ડાબી બાજુનું લક્ષ l છે તેમ કહેવાય. અને તેને $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = l$ વડે દર્શાવાય છે.

જમણી બાજુનું લક્ષ : (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે જો યથેચ્છ $\varepsilon > 0$ માટે અનુરૂપ $\delta > 0$ મળે કે જેથી $a + \delta < b$ અને $\forall x, x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ તો વિધેય $f(x)$ નું જમણી બાજુનું લક્ષ l છે તેમ કહેવાય, જે $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = l$ વડે દર્શાવાય છે.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a-} f(x) = l = \lim\limits_{x \to a_+} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો તે અનન્ય જ હોય.
- જો $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ થાય તો વિધેય f એ $x = a$ આગળ સતત છે તેમ કહેવાય.
- જો વિધેય $f(x), x \in (a, b)$ હોય તેવા પ્રત્યેક બિંદુએ સતત હોય, તો તે (a, b) પર સતત છે તેમ કહેવાય.

  વળી, જો $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$ અને $\lim\limits_{x \to b_-} f(x) = f(b)$ હોય, તો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે તેમ કહેવાય.

લક્ષના કાર્યનિયમો :

જો $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ અને $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ હોય તો,

(1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$

(2) $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = kl$

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x)\, g(x) = l \cdot m$

(4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}, m \neq 0$

- $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n, \quad n \in \mathrm{N}$
- જો $p(x)$ એ બહુપદી વિધેય હોય, તો $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$
- બહુપદી વિધેય R પર સતત છે.
- સંમેય વિધેય તેના પ્રદેશના પ્રત્યેક ઘટક આગળ સતત છે.
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, n \in \mathrm{N}, x \in \mathrm{R} - \{a\}$

સંયોજિત વિધેયના લક્ષનો નિયમ :

જો $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ હોય તથા $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$ હોય, તો $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = l$ થાય.

- જો g એ b આગળ સતત હોય, તો

  $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$

  આ રીતે બહારનું વિધેય સતત હોય, તો લક્ષ 'અંદર' લઈ શકાય.

- જો $f(x) < g(x)$ હોય તથા $\lim_{x \to a} f(x)$ અને $\lim_{x \to a} g(x)$ બંનેનાં લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતા હોય, તો

  $\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$

  સેન્ડવિચ પ્રમેય : જો વિધેય f, g, h એવા હોય, જ્યાં $g \le f \le h$ તથા $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$, તો

  $\lim_{x \to a} f(x) = l$ થાય.
- $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- sin વિધેય સતત છે. તથા cos વિધેય સતત છે.
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = 1$
- જો f તથા g એ $x = c$ આગળ સતત વિધેય હોય, તો $f \pm g$, fg તથા $g(c) \ne 0$ તો $\frac{f}{g}$ પણ $x = c$ આગળ સતત વિધેય છે.

  શ્રેણી લક્ષની વ્યાખ્યા : $\{a_n\}$ એક શ્રેણી છે અને l એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે. જો પ્રત્યેક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા ε ને અનુરૂપ $m \in N$ એવો મળે કે જેથી $n \ge m, n \in N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$ તો $\{a_n\}$ નું લક્ષ l છે તેમ કહેવાય. સંકેતમાં

  $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ લખાય છે.
- $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
- જો $|r| < 1$, તો $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$
- ધારો કે $S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$

  $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r}, |r| < 1$
- $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e \qquad (a > 0)$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

- જો $\lim_{x\to a} f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય તથા લક્ષની કિંમત ધન સંખ્યા હોય, તો $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x) \log f(x)}$
- જો $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ અને $g(x) \to \infty$ તો, $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} (f(x)-1)\, g(x)}$
- $\lim_{n\to\infty} (sin^n x + cos^n x)^{\frac{1}{n}} = \max \{|sin\, x|, |cos\, x|\}$

લક્ષનું મૂલ્ય શોધવા માટે ઉપયોગી અનંત શ્રેઢી વિસ્તરણ

નીચે દર્શાવેલ અનંત શ્રેઢી વિસ્તરણ લક્ષનું મૂલ્ય શોધવા માટે મદદરૂપ થાય છે :

(1) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... \infty$ ($|x| < 1, m \in Q$)

(2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \infty$

(3) $a^x = 1 + x\,(log_e a) + \frac{x^2}{2!}(log_e a)^2 + ... \infty$

(4) $log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \infty$ ($|x| < 1$)

(5) $sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \infty$

(6) $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... \infty$

(7) $tan\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + ... \infty$

(8) $sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + ... \infty$ ($|x| < 1$)

(9) $tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... \infty$ ($|x| < 1$)

(1) $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(4) $\Sigma n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

વિકલન : ધારો કે $f : (a, b) \to R$ વિધેય છે. $x \in (a, b)$ નિશ્ચિત છે તથા $t \in (a, b)$ ચલ છે.

જો $\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો f એ x આગળ વિકલનીય છે તેમ કહેવાય. તેના માટે સંકેત $f'(x)$ અથવા $\frac{d}{dx} f(x)$ વપરાય છે. $y = f(x)$ માટે $\frac{d}{dx} f(x)$ ના સ્થાને $\frac{dy}{dx}$ પણ લખાય છે અથવા સંકેત y_1 નો પણ ઉપયોગ થાય છે.

વિધેયનો વિકલિત મેળવવાની ક્રિયાને વિકલન કહે છે.

- વક્રના $(x, f(x))$ બિંદુ આગળ સ્પર્શક શિરોલંબ ના હોય, તો તેના સ્પર્શકનો ઢાળ $f'(x)$ છે.
- જો વિધેય $f : (a, b) \to R$, $x \in (a, b)$ આગળ વિકલનીય હોય, તો તે x આગળ સતત છે.

આ વિધાનનું પ્રતીય સત્ય નથી. $f(x) = |x|$ એ $x = 0$ આગળ સતત છે પરંતુ વિકલનીય નથી.

લક્ષ મેળવવા માટેનો લ'પિતાનો નિયમ :

(1) ($\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ) જો વિધેય f અને g વિકલનીય હોય તથા $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$ તો

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(2) ($\frac{\infty}{\infty}$ સ્વરૂપ) જો વિધેય f અને g વિકલનીય હોય તથા જો $x \to a$ માટે $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$, તો

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

વિકલનના કાર્યનિયમો

જો વિધેય f અને g વિકલનીય હોય અને $k \in$ R, તો

(1) $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$

(2) $\frac{d}{dx}(k\, f(x)) = k \frac{d}{dx} f(x)$

(3) $\frac{d}{dx}(f(x)\, g(x)) = g(x) \frac{d}{dx} f(x) + f(x) \frac{d}{dx} g(x)$

(4) જો $g(x) \neq 0$ તો $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$

કેટલાંક પ્રમાણિત રૂપો

(1) $\frac{d}{dx} c = 0$ જ્યાં c અચળ છે.

(2) $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$, $x \in R^+$, $n \in R$

(3) $\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a$, $x \in R$, $a \in R^+ - \{1\}$

(4) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, $x \in R$

(5) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $x \in R$

(6) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$, $x \in R$

(7) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$, $x \in R - \{(2k+1) \mid \frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$

(8) $\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$, $x \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

(9) $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$, $x \in R - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$

(10) $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$, $x \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

(11) $\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$ $\quad x \in R^+$

(12) સંયોજિત વિધેયના વિકલનનો નિયમ (સાંકળ નિયમ) જો $f : (a, b) \to R$ એ $x \in (a, b)$ આગળ વિકલનીય હોય તથા $f((a, b)) \subset (c, d)$ અને $g : (c, d) \to R$ એ $f(x)$ આગળ વિકલનીય હોય, તો gof પણ x આગળ વિકલનીય હોય તથા $(gof)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

(13) $\frac{d}{dx}\ sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad |x| < 1$

(14) $\frac{d}{dx}\ cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad |x| < 1$

(15) $\frac{d}{dx}\ tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$

(16) $\frac{d}{dx}\ cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$, $x \in R$

(17) $\frac{d}{dx}\ sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

(18) $\frac{d}{dx}\ cosec^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

(19) **પ્રચલ વિધેયનું વિકલિત :**

$x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [a, b]$ એ પ્રચલ t નાં વિકલનીય વિધેયો છે.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad f'(t) \neq 0$$

(20) **એક વિધેયનું બીજા વિધેય વિશે વિકલિત :** $u = f(x)$ તથા $v = g(x)$ એ x નાં વિકલનીય વિધેય હોય, તો u નો v વિશે વિકલિત $\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$ થાય.

દ્વિતીય વિકલન

$y = f(x)$ એ દ્વિતીય વિકલન ધરાવે તો $\frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ સંકેતમાં $f''(x)$ અથવા y_2 પણ લખાય છે.

વિકલિતના ઉપયોગો

- **દર માપક તરીકે વિકલિત :** કોઈ રાશિ y એ રાશિ x પર $y = f(x)$ દ્વારા આધારિત હોય, તો y નો x ને સાપેક્ષ દર $\frac{dy}{dx}$ અથવા $f'(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

ભૂમિતિમાં વિકલનના ઉપયોગો

(1) વક્ર $y = f(x)$ પર $(x_0, f(x_0))$ બિંદુ આગળ વક્રના સ્પર્શકનું બિંદુ-ઢાળ સ્વરૂપ પ્રમાણે સમીકરણ $y - y_0 = f'(x_0)\ (x - x_0)$ થાય.

સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી સ્પર્શકને લંબ રેખાને અભિલંબ કહે છે. આમ, જો સ્પર્શક x અક્ષ કે તેને સમાંતર ના હોય, તો $(x_0, f(x_0))$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\ (x - x_0)$ થાય.

- જો $x \to x_0$ ત્યારે $f'(x_0) \to \pm\infty$, તો $(x_0, f(x_0))$ આગળ $y = f(x)$ને શિરોલંબ સ્પર્શક $x = x_0$ છે તથા અભિલંબ $y = y_0$ છે.

(2) બે વક્રો વચ્ચેનો ખૂણો : જો બે વક્ર $y = f(x)$ તથા $y = g(x)$ એ (x_0, y_0) આગળ છેદે તથા (x_0, y_0) આગળ f, g વિકલનીય હોય, તો $tan^{-1}\left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\,g'(x_0)}\right|$ (x_0, y_0) આગળ બે વક્રો $y = f(x)$ તથા $y = g(x)$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ છે. જો $f'(x_0)\ g'(x_0) = -1$, તો વક્રો એકબીજાને કાટખૂણે છેદે છે કે લંબચ્છેદી છે તેમ કહેવાય.

રૉલનું પ્રમેય

જો (i) f એ $[a, b]$ પર સતત હોય. (ii) f એ (a, b) પર વિકલનીય હોય તથા (iii) $f(a) = f(b)$ તો કોઈક $c \in (a, b)$ મળે, જેથી $f'(c) = 0$ થાય.

ભૌમિતિક રીતે કોઈક $c \in (a, b)$ મળે છે, જેથી $(c, f(c))$ આગળ વક્રનો સ્પર્શક X-અક્ષ છે કે X-અક્ષને સમાંતર છે.

મધ્યકમાન પ્રમેય : જો f એ $[a, b]$ માં સતત હોય તથા (a, b) માં વિકલનીય હોય, તો $c \in (a, b)$ મળે,

જેથી $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

ભૌમિતિક રીતે કોઈક $c \in (a, b)$ માટે $(c, f(c))$ આગળનો સ્પર્શક A $(a, f(a))$ તથા B $(b, f(b))$ ને જોડતી રેખાને સમાંતર છે.

$b = a + h$ લેતાં $f(a + h) - f(a) = h f'(c)$

આમ, $c = a + \theta h$ લઈ શકાય, જ્યાં $0 < \theta < 1$

$\therefore f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta h), 0 < \theta < 1$ એ મધ્યકમાન પ્રમેયનું બીજું સ્વરૂપ છે.

વધતાં તથા ઘટતાં વિધેયો

ધારો કે f અંતરાલ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

જો (i) $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ તો f ને (a,b) પર વધતું વિધેય કહે છે. તેનો સંકેત $f\uparrow$ છે.

(ii) $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ તો f ને (a,b) પર ચુસ્ત વધતું વિધેય કહે છે.

(iii) $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ તો f ને (a,b) પર ઘટતું વિધેય કહે છે. તેનો સંકેત $f\downarrow$ છે.

(iv) $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ તો f ને (a,b) પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય કહે છે.

- $f : (a, b) \to R$ વિકલનીય વિધેય છે. જો (i) $f'(x) \ge 0, \forall x \in (a, b)$, તો f એ (a,b) પર વધતું વિધેય છે.

  (ii) $f'(x) \le 0, \forall x \in (a, b)$, તો f એ (a,b) પર ઘટતું વિધેય છે.

મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય

(1) ધારો કે f એ $[a,b]$ પર વ્યાખ્યાયિત સતત વિધેય છે. જો $c \in [a, b]$ મળે, જેથી $f(x) \le f(c), \forall x \in [a, b]$ તો $f(c)$ ને $[a, b]$ પર f નું વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય કહે છે. જો $f(x) \ge f(c)$ તો $f(c)$ એ $[a, b]$ પર f નું વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(2) ધારો કે f એ $[a,b]$ પર વ્યાખ્યાયિત છે. જો $c \in (a, b)$ મળે અને $h > 0$ મળે જેથી

$(c - h, c + h) \subset (a, b)$ અને પ્રત્યેક $x \in (c - h, c + h)$ માટે $f(x) \le f(c)$ તો $f(c)$ ને f નું c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય કહે છે. જો $f(x) \ge f(c), \forall x \in (c - h, c + h)$ તો $f(c)$ ને c આગળ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કહે છે.

- જો f એ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત હોય તથા c આગળ તેને આત્યંતિક (ન્યૂનતમ અથવા મહત્તમ) મૂલ્ય હોય તથા f એ c આગળ વિકલનીય હોય, તો $f'(c) = 0$

(પ્રથમ વિકલિત કસોટી) જો f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય અને $c \in (a, b)$ હોય તથા $h > 0$ મળે, જેથી $(c - h, c + h) \subset (a, b)$ અને

(*a*) (i) f એ $(c - h, c + h)$ માં વિકલનીય છે.

(ii) $c < x < c + h \Rightarrow f'(x) > 0$

(iii) $c - h < x < c \Rightarrow f'(x) < 0$

(iv) $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. આ જ રીતે જો,

(*b*) (i) f એ $(c - h, c + h)$ માં વિકલનીય છે.

(ii) $c - h < x < c \Rightarrow f'(x) > 0$

(iii) $c < x < c + h \Rightarrow f'(x) < 0$

(iv) $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(દ્વિતીય વિકલિત કસોટી)

f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે તથા $c \in (a, b)$ મળે છે, જેથી $h > 0$ તથા $(c - h, c + h) \subset (a, b)$ તથા $f'(c) = 0$ અને $f''(c) > 0$ તો f ને c આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $f'(c) = 0$ અને $f''(c) < 0$, તો f ને c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) $\lim_{n\to\infty} \left\{tan\frac{x}{2} sec\, x + tan\frac{x}{2^2} sec\frac{x}{2} + ... + tan\left(\frac{x}{2^n}\right) sec\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\right\}$

(A) $cot\ x$ (B) $sec\ x$ (C) $tan\ x$ (D) 0

ઉકેલ : $tan\ \frac{x}{2}\ sec\ x = \dfrac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2} cos\, x} = \dfrac{sin\left(x - \frac{x}{2}\right)}{cos\frac{x}{2} cos\, x} = tan\ x - tan\ \frac{x}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left\{tan\frac{x}{2} sec\, x + tan\frac{x}{2^2} sec\frac{x}{2} + ... + tan\left(\frac{x}{2^n}\right) sec\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(tan\, x - tan\frac{x}{2}\right) + \left(tan\frac{x}{2} - tan\frac{x}{2^2}\right) + ... + \left(tan\frac{x}{2^{n-1}} - tan\frac{x}{2^n}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(tan\, x - tan\frac{x}{2^n}\right) = tan\ x \qquad \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0\right)$$

જવાબ : (C)

(2) જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(a+1)x + sin\, x}{x}, & x < 0 \\ c, & x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x + bx^2} - \sqrt{x}}{bx^{\frac{3}{2}}}, & x > 0 \end{cases}$ એ $x = 0$ આગળ સતત હોય તો ....

(A) $a = \frac{-3}{2}, b = 0, c = \frac{1}{2}$ (B) $a = -\frac{3}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}$

(C) $a = \frac{-3}{2}, b \in R, c = \frac{-1}{2}$ (D) $a = \frac{-3}{2}, b \in R, c = \frac{1}{2}$

ઉકેલ : $\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-} \dfrac{sin(a+1)x + sin\, x}{x}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ સ્વરૂપ}\right)$

$$= \lim_{x\to0-} \frac{(a+1)\, cos(a+1)x + cos\, x}{1}$$

$$= a + 2$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x+bx^2}-\sqrt{x}}{bx^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1+bx}\ - 1}{bx} \qquad (\tfrac{0}{0}\text{ સ્વરૂપ})$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{b}{2\sqrt{1+bx}} - 0}{b} = \frac{1}{2}$$

વિધેય $x = 0$ આગળ સતત હોવાથી, $a + 2 = c = \frac{1}{2}$. આથી $a = -\frac{3}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ અને $b \in R$ **જવાબ :** (D)

(3) વિધેય f સતત છે. જો $f(x)\, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right), \forall\ x \in D_f$ અને $f(1) > 0$ તો $\lim_{x\to 1} f(x) = ...$.

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી

ઉકેલ : વિધેય f સતત હોવાથી $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

આપેલ સમીકરણમાં $x = 1$ મૂકતાં, $(f(1))^2 = 2f(1)$

$\therefore\ f(1) = 0$ અથવા $f(1) = 2$. પરંતુ $f(1) > 0$ હોવાથી, $f(1) = 2$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ **જવાબ :** (A)

(4) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{sec\,x - cos x}; & x \neq 0 \\ k & ; x = 0 \end{cases}$$

જો વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત હોય, તો $k = ...$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) –1

ઉકેલ : જો વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત હોય, તો

$$f(0) = k = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{sec\,x - cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log\left((1+x^2)^2 - x^2\right)}{1-cos^2 x}\ cos\ x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1+(x^2+x^4)\right)}{sin^2 x}\ cos\ x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1+(x^2+x^4)\right)}{x^2+x^4} \times \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{sin^2 x} \times \lim_{x\to 0} (1+x^2)\ cos\ x$$

$= 1$ **જવાબ :** (A)

(5) શૂન્યેતર સતત વિધેય f એ $f(x+y) = f(x)\,f(y)$, $\forall\ x, y \in R$ નું પાલન કરે છે. જો $f(2) = 9$ તો $f(3) = ...$

(A) 1 (B) 27 (C) 9 (D) 3

ઉકેલ : આપેલ શરતનું પાલન કરતું વિધેય $f(x) = a^x$, $a > 0$ પ્રકારના સ્વરૂપનું છે.

$f(2) = 9$. આથી $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$f(x) = 3^x$ અને તેથી $f(3) = 3^3 = 27$ **જવાબ :**

(B)

(6) $n \in$ N ની કઈ કિંમત માટે $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x-1)\,(\cos x-e^x)}{x^n}$ સાન્ત શૂન્યેતર સંખ્યા મળે ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $(\cos x - 1)\,(\cos x - e^x)$

$$= \left(\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}...\right)-1\right)\left[\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}...\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...\right)\right]$$

$$= x^2\left(\frac{-1}{2}+\frac{x^2}{4!}+...\right)\left(-x-x^2-\frac{x^3}{3!}-...\right)$$

$$= x^3\left(\frac{-1}{2}+\frac{x^2}{4!}-...\right)\left(-1-x-\frac{x^2}{3!}-...\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x-e^x)}{x^3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\therefore\ n = 3$ **જવાબ :** (C)

નોંધ : $n = 1, 2$ માટે લક્ષ શૂન્ય થાય તથા $n > 3$ માટે સાન્ત લક્ષ ના મળે.

(7) ધારો કે $f(x) = g(x)\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{-1}{x}}}$ જ્યાં, g સતત વિધેય છે. જો $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો

(A) $g(x) = x + 2$ (B) $g(x) = x^2 + 4$

(C) $g(x) = xh(x)$ જ્યાં $h(x)$ બહુપદી વિધેય (D) $g(x)$ એ અચળ વિધેય છે.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{-1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-e^{\frac{-2}{x}}}{1+e^{\frac{-2}{x}}} = 1$ $\left(e^{\frac{-2}{x}} \to 0\right)$

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{-1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{2}{x}}+1} = -1$ $\left(e^{\frac{-2}{x}} \to 0\right)$

$\therefore$ જો $g(x) = xh(x)$ હોય, તો $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ મળે. **જવાબ :** (C)

(8) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\frac{\pi}{4}} = ...$ (AIEEE : 2002)

(A) $\sqrt{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 0

ઉકેલ : $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{1} = \sqrt{2}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ સ્વરૂપ}\right)$ **જવાબ :** (A)

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = ...$ (AIEEE : 2002)

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી

ઉકેલ : જો $x < 0$ હોય, તો $\sqrt{x}$ તથા $\sqrt{1-cos\,2\sqrt{x}}$ વ્યાખ્યાયિત ન થાય.

$\therefore \lim_{x \to 0-} \dfrac{\sqrt{1-cos\,2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ નું અસ્તિત્વ નથી **જવાબ :** (D)

(10) જો $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(3+x)-\log(3-x)}{x} = k$ તો $k = ...$ (AIEEE : 2003)

(A) $\frac{-1}{3}$ (B) $\frac{-2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 0

ઉકેલ : $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(3+x)-\log(3-x)}{x} = k$ $\left(\frac{0}{0} \text{ સ્વરૂપ}\right)$

$\therefore \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}}{1} = k$

$\therefore \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = k$ આથી $k = \frac{2}{3}$ **જવાબ :** (C)

(11) જો α, β એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ હોય, તો

$\lim_{x \to \alpha} \dfrac{1-cos(ax^2+bx+c)}{(x-\alpha)^2} = ...$

(A) $\frac{b^2+4ac}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{b^2-4ac}{2}$ (D) 1

ઉકેલ : $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{1-cos(ax^2+bx+c)}{(x-\alpha)^2} = \lim_{x \to \alpha} \dfrac{2\,sin^2\left(\frac{ax^2+bx+c}{2}\right)}{(x-\alpha)^2}$

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{2\,sin^2\left(\frac{a(x-\alpha)(x-\beta)}{2}\right)}{\left(\frac{a(x-\alpha)(x-\beta)}{2}\right)^2} \cdot \frac{a^2}{4}(x-\beta)^2$$

$= \dfrac{a^2(\alpha-\beta)^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}[(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta] = \dfrac{a^2}{2}\left[\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{4c}{a}\right] = \dfrac{b^2-4ac}{2}$ **જવાબ :** (C)

બીજી રીત :

$\lim_{x \to \alpha} = \dfrac{1-cos\big(a(x-\alpha)(x-\beta)\big)}{(x-\alpha)^2}$

$= \dfrac{a\,sin\big(a(x-\alpha)(x-\beta)\big)\big(x-\alpha+x-\beta\big)}{2(x-\alpha)a(x-\beta)} \times a(x-\beta)$

$= \dfrac{a^2}{2}(\alpha-\beta)^2 = \dfrac{b^2-4ac}{2}$ **જવાબ :** (C)

(12) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-cos\,2x)(3+cos\,x)}{x\,tan\,4x}$ = ... (JEE Main : 2015)

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 4 (D) 3

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} \frac{(1-cos\,2x)(3+cos\,x)}{x\,tan\,4x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\,sin^2 x(3+cos\,x)}{x\frac{tan\,4x}{4x}\cdot 4x}$

$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{tan\,4x}{4x}} \lim_{x\to 0} (3 + cos\,x)$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 2$ **જવાબ :** (A)

(13) જો વિધેય f એ a આગળ ડાબી બાજુ તથા જમણી બાજુ વિકલનીય હોય, તો f એ ....

(A) a આગળ સતત હોય. (B) a આગળ વિકલનીય હોય.

(C) 0 આગળ વિકલનીય હોય. (D) a આગળ સતત નથી.

ઉકેલ : $\lim_{h\to 0+} (f(a) - f(a - h)) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a)-f(a-h)}{h}\, h$

$= \lim_{h\to 0+} f\,'(a^-) \cdot h = 0$ ($f\,'(a^-)$ નું અસ્તિત્વ છે.)

તે જ રીતે $\lim_{h\to 0+} (f(a + h)) - f(a)) = 0$

$\therefore \lim_{h\to 0+} f(a - h)) = \lim_{h\to 0+} f(a + h) = f(a)$

$\therefore$ f એ a આગળ સતત છે. **જવાબ :** (A)

(14) જો $f(x) = (1 + x)^n$, તો $f(0) + f'(0) + \frac{1}{2} f''(0) + ... + \frac{1}{n!} f^n (0)$ = ...

(A) n (B) 2^n (C) 2^{n-1} (D) 1

ઉકેલ : $f(0) = 1, f\,'(x) = n\,(1 + x)^{n-1}, f''(x) = n\,(n - 1)\,(1 + x)^{n-2} ... f^{(n)}(n) = n\,(n - 1) ...1\,(1 + x)^{n-n} = n!$

$\therefore f'(0) = n, f''(0) = n\,(n - 1), ...f^n(0) = n!$

માંગેલ કિંમત $= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + ... + \frac{n!}{n!} = 2^n$ **જવાબ :** (B)

ખરેખર $f(x) = f(0) + xf\,'(0) + \frac{x^2}{2!} f\,''(0) + ... \infty$

$\therefore \quad (1 + x)^n = f(0) + xf\,'(0) +....+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$

$\therefore \quad 2^n = f(0) + f\,'(0) + \frac{f\,''(0)}{2!} +....+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

(15) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^4+3^4+...+n^4}{n^5} - \lim_{n\to\infty} \frac{1+2^3+3^3+...+n^3}{n^5}$ = ... (AIEEE : 2003)

(A) 0 (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{30}$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma n^4}{n^5} - \lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma n^3}{n^5}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30\,n^5} - \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\,(n+1)^2}{4\cdot n^5}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{30\,n^5} - \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4n} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$ **જવાબ :** (B)

(16) જો $g(x) = \begin{cases} k\sqrt{x+1}, & 0 \le x \le 3 \\ mx+2, & 3 < x \le 5 \end{cases}$ વિકલનીય હોય, તો $k + m =$ ...... (JEE Main : 2015)

(A) $\frac{10}{3}$ (B) 4 (C) 2 (D) $\frac{16}{5}$

ઉકેલ : જો $g(x)$ વિકલનીય હોય, તો g એ $x = 3$ આગળ સતત પણ હોય.

$\therefore \lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = g(3)$

$\therefore 3m + 2 = 2k$ (1)

$g(x)$ વિકલનીય છે. $\therefore g'(3+) = g'(3-)$

$\therefore m = k \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $(x = 3)$

$\therefore m = \frac{k}{4}$. આથી $k = 4m$ આથી $3m + 2 = 8m$ (2)

$m = \frac{2}{5}, k = \frac{8}{5}$. આથી $k + m = 2$ **જવાબ :** (C)

(17) $f(x) = |3 - |3 - |x|||$ એ કેટલાં બિંદુ આગળ વિકલનીય નથી ?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $|x|$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

આપેલ વિધેય f એ $x = 0$, $|x| = 3$ તેમજ $|3 - |x|| = 3$ એટલે કે $x = 0$, $x = \pm 3$, $x = \pm 6$ એ 5 બિંદુઓ આગળ વિકલનીય નથી. **જવાબ :** (C)

(18) નીચેનામાંથી કયા બિંદુગણમાં $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ વિકલનીય થશે ? (AIEEE : 2006)

(A) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (B) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ (C) $(-\infty, \infty)$ (D) $(0, \infty)$

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x < 0 \\ \frac{x}{1+x}, & x \ge 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2}, & x > 0 \end{cases}$ અહીં $f(0) = 0$

$$f'(0+) = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x}{1+x}}{x} = 1$$

$$f'(0-) = \lim_{x \to 0-} \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = 1$$

$\therefore f'(0) = 1$

$\therefore f'(x)$ નું અસ્તિત્વ $(-\infty, \infty)$ પર છે. વળી, **જવાબ :** (C)

(19) જો $x^m y^n = (x + y)^{m+n}$ તો $\frac{dy}{dx} =$ ...... (AIEEE : 2006)

(A) $\frac{y}{x}$ (B) $\frac{x+y}{xy}$ (C) xy (D) $\frac{x}{y}$

ઉકેલ : $x^m y^n = (x + y)^{m+n}$ $x > 0,\ y > 0$

બંને બાજુ *log* લેતાં,

$m \log x + n \log y = (m + n) \log (x + y)$

વિકલન કરતાં,

$$\frac{m}{x} + \frac{n}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{m+n}{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left(\frac{n}{y}-\frac{m+n}{x+y}\right) = \frac{m+n}{x+y} - \frac{m}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left(\frac{nx-my}{y(x+y)}\right) = \frac{nx-my}{x(x+y)}$$

$\therefore$ જો $nx \neq my$ તો $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

જો $nx = my$ હોય, તોપણ

$$m\frac{dy}{dx} = n$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} = \frac{y}{x}$$

જવાબ : (A)

(20) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{\sqrt[5]{x+30}-2} = ...$

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40

ઉકેલ : $\lim_{x\to 2} \frac{(3x+2)^{\frac{1}{3}}-2}{(x+30)^{\frac{1}{5}}-2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$સ્વરૂપ

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{3}(3x+2)^{\frac{-2}{3}}\cdot 3}{\frac{1}{5}(x+30)^{\frac{-4}{5}}} = \frac{\frac{1}{4}.5}{\left(\frac{1}{16}\right)} = 20$$

જવાબ : (B)

(21) $\lim_{x\to\infty} x \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{i}{x}}-1\right) = ...$

(A) $\frac{n+1}{2}$ (B) $\frac{n^2+1}{2}$ (C) $\frac{n(n+1)}{2}$ (D) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ઉકેલ : માંગેલ લક્ષ $= \lim_{x\to\infty} x\left[\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)+...+\left(e^{\frac{n}{x}}-1\right)\right]$

$$= \lim_{\frac{1}{x}\to 0}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+2\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}}+...+n\frac{e^{\frac{n}{x}}-1}{\frac{n}{x}}\right] = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

જવાબ : (C)

(22) $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-cos\{1-cos(1-cos\theta)\}}{\theta^8}$ = ...

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{64}$ (D) $\frac{1}{128}$

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$ (1)

હવે માંગેલ લક્ષ= $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-cos\{1-cos(1-cos\theta)\}}{\{1-cos(1-cos\theta)\}^2} \times \frac{\{1-cos(1-cos\theta)\}^2}{(1-cos\theta)^4} \times \frac{(1-cos\theta)^4}{\theta^8}$

જેમ $\theta \to 0$ તેમ $1 - cos\,\theta \to 0$ અને $1 - cos\,(1 - cos\,\theta) \to 0$

(1)નો ઉપયોગ કરતાં, માંગેલ લક્ષ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{128}$ **જવાબ :** (D)

(23) $\lim_{n \to \infty} cos\,\frac{x}{2}\,cos\,\frac{x}{4}\,cos\,\frac{x}{8}\,...\,cos\,\frac{x}{2^n}$ = ...

(A) $sin\,x$ (B) $\frac{sinx}{x}$ (C) $\frac{cosx}{x}$ (D) $cos\,x$

ઉકેલ : $\lim_{n \to \infty} cos\,\frac{x}{2}\,cos\,\frac{x}{4}\,cos\,\frac{x}{8}\,...\,cos\,\frac{x}{2^n}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{2^n\,cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{4}cos\frac{x}{8}...cos\frac{x}{2^n}\,sin\frac{x}{2^n}}{2^n\,sin\frac{x}{2^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{sinx}{x}\,\frac{\frac{x}{2^n}}{sin\frac{x}{2^n}} = \frac{sinx}{x}$ **જવાબ :** (B)

(24) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ માટે $\frac{dy}{dx}$ = ... $(x \neq 0, -1)$

(A) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (B) $\frac{-1}{(1+x)^2}$ (C) $\frac{1}{1+x^2}$ (D) $\frac{-1}{1+x^2}$

ઉકેલ : $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

$\therefore x^2(1+y) = y^2(1+x)$

$\therefore x^2 - y^2 = xy(y - x)$

$\therefore x + y + xy = 0.$ આથી $y = \frac{-x}{1+x} = -1 + \frac{1}{1+x}$. આથી $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$ **જવાબ :** (B)

નોંધ : $x = y$ તો $x\sqrt{1+x} = 0$ પરંતુ $x \neq 0, -1$.

(25) જો $tan\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,tan\,\frac{x}{2}$ તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(A) $\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\,cosx}$ (B) $\sqrt{\frac{1-e^2}{1+e\,cosx}}$ (C) $\frac{\sqrt{1+e^2}}{1+e\,cosx}$ (D) $\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\,cosx}$

ઉકેલ : $tan\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,tan\,\frac{x}{2}$ (1)

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$sec^2\,\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{2}\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,sec^2\,\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$$\left[1+tan^2\frac{y}{2}\right]\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ sec^2\frac{x}{2}$$

$$\therefore \left[1+\frac{1-e}{1+e}tan^2\frac{x}{2}\right]\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ sec^2\frac{x}{2}$$ ((1) પરથી)

બંને બાજુ $(1+e)\ cos^2\frac{x}{2}$ વડે ગુણતાં,

$$[(1+e)\ cos^2\frac{x}{2} + (1-e)\ sin^2\frac{x}{2}]\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-e^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+ecosx}$$ **જવાબ :** (A)

(26) જો $y = \frac{1}{\sqrt{cos\,2x}}$ તો $y_2 + y = ...$

(A) y^5 (B) $2y^5$ (C) $3y^5$ (D) $4y^5$

ઉકેલ : અહીં $cos\ 2x\ y^2 = 1$ (1)

$\therefore cos\ 2x\ 2yy_1 - 2\ sin\ 2x{\cdot}y^2 = 0$

$\therefore y_1 = y\ tan\ 2x$

$\therefore y_2 = y_1\ tan\ 2x + 2\ sec^2\ 2x\ {\cdot}y$

$= y\ tan^2\ 2x + 2\ sec^2\ 2x\ y$

$= 3\ sec^2\ 2x\ {\cdot}y - y = 3\ y^4\ {\cdot}y - y$ ((1) પરથી)

$\therefore y_2 + y = 3y^5$ **જવાબ :** (C)

(27) જો $x = sec\ \theta - cos\ \theta$ અને $y = sec^n\ \theta - cos^n\ \theta$, તો $(x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = ...\ (y^2+4)$

(A) n (B) n^2 (C) $2n$ (D) n^3

ઉકેલ : $x^2 = sec^2\ \theta - 2 + cos^2\ \theta$ અને $y^2 = sec^{2n}\ \theta - 2 + cos^{2n}\ \theta$

$\therefore x^2 + 4 = (sec\ \theta + cos\ \theta)^2,\ y^2 + 4 = (sec^n\ \theta + cos^n\ \theta)^2$

હવે, $x = sec\ \theta - cos\ \theta$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = sec\ \theta\ tan\ \theta + sin\ \theta = sin\ \theta\ sec\ \theta\ (sec\ \theta + cos\ \theta)$$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = n\ sec^{n-1}\ \theta\ sec\ \theta\ tan\ \theta + n\ cos^{n-1}\theta\ sin\ \theta$$

$$= n\ sin\ \theta\ sec\ \theta\ (sec^n\ \theta + cos^n\ \theta)$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2\,(sec^n\,\theta+cos^n\,\theta)^2}{(sec\,\theta+cos\,\theta)^2} = \frac{n^2\,(y^2+4)}{(x^2+4)}$$

$$\therefore (x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2\ (y^2+4)$$ **જવાબ :** (B)

(28) જો $f(x) = p\,|sin\,x| + qe^{|x|} + r|x|^3$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય હોય તો ...... $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

(A) $q + r = 0, p \in R$ (B) $p + q = 0, p \in R$

(C) $q = 0, r = 0, p \in R$ (D) $r = 0, p = 0, q \in R$

ઉકેલ : જો $x < 0$ તો $f(x) = -p\,sin\,x + qe^{-x} - rx^3$

$f'(x) = -p\,cos\,x - qe^{-x} - 3r\,x^2$

$\therefore\ f'(0-) = -p - q$

જો $x > 0$ તો $f(x) = p\,sin\,x + qe^{x} + rx^3$

$\therefore f'(x) = p\,cos\,x + qe^{x} + 3r\,x^2$ $x > 0$

$\therefore\ f'(0+) = p + q$

જો f એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય હોય તો,

$-p - q = p + q$ આથી $2(p + q) = 0.$ આથી $p + q = 0$ **જવાબ :** (B)

(29) જો $y = tan^{-1}\left(\frac{\log e\,x^{-2}}{\log e\,x^{2}}\right) + tan^{-1}\left(\frac{3+2\log x}{1-6\log x}\right)$ તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) x

ઉકેલ : $y = tan^{-1}\left(\frac{\log e - 2\log x}{\log e + 2\log x}\right) + tan^{-1}\left(\frac{3+2\log x}{1-6\log x}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{1-2\log x}{1+2\log x}\right) + tan^{-1}\left(\frac{3+2\log x}{1-6\log x}\right)$

$= \frac{\pi}{4} - tan^{-1}(2\log x) + tan^{-1} 3 + tan^{-1}(2\log x)$

$y = \frac{\pi}{4} + tan^{-1} 3$ આથી $\frac{dy}{dx} = 0$ **જવાબ :** (C)

($\log x>0$ તથા $0<6\log x<1$ તેમ સ્વીકારેલ છે. પરંતુ તેમ ના હોય તોપણ જવાબમાં ફેર નહિ પડે.)

(30) જો $3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ હોય તો $f'(2)$ = ...

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{7}{2}$

ઉકેલ : $3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$

$\therefore 3f'(x) - 2f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 1$

$x = 2$ મૂકતાં, $3f'(2) + \frac{2}{4}f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ (1)

$x = \frac{1}{2}$ મૂકતાં, $3f'\left(\frac{1}{2}\right) + 8f'(2) = 1$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં, $f'(2) = \frac{1}{2}$ **જવાબ :** (B)

(31) $f(x) = \dfrac{tan[e^2]x^3 - tan[-e^2]x^3}{sin^3 x}$, $x \ne 0$. જો f એ $x = 0$ આગળ સતત હોય તો $f(0) = ...$

(A) 15 (B) 12 (C) –12 (D) 14

ઉકેલ : $7 < e^2 < 8$. આથી $[e^2] = 7$. $[-e^2] = -8$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{tan\,7x^3 - tan(-8)x^3}{sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{tan\,7x^3}{7x^3} \cdot 7 + \lim_{x\to 0} \frac{tan\,8x^3}{8x^3} \cdot 8 \qquad \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 1\right)$$

$= 7 + 8 = 15$

જવાબ : (A)

(32) $f(x) = \dfrac{1}{\log|x|}$ એ કેટલાં બિંદુઓએ અસતત થશે ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $x = 0, \pm 1$ ત્રણ બિંદુઓએ f વ્યાખ્યાયિત નથી. બીજા તમામ બિંદુઓએ સતત છે. **જવાબ :** (C)

(33) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $g(x) = f^{3n}(x)$ જ્યાં $f^n(x) = fofof...of$ (n વખત). વિધેય $g(x)$ કેટલા બિંદુએ અસતત થશે ?

(A) 2 (B) $2n$ (C) $3n$ (D) $2n + 1$

ઉકેલ : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ f એ $x = 1$ આગળ અસતત થશે.

$(fof)(x) = \dfrac{x-1}{x}$ fof એ $x = 0$ આગળ અસતત છે.

$$(fofof)(x) = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{\frac{1}{1-x}} = x$$

$g(x) = f^{3n}(x) = x$

$\therefore$ g એ ફક્ત 0 અને 1 એમ બે બિંદુએ અસતત થશે. **જવાબ :** (A)

(34) f અને g વિકલનીય વિધેય છે. $g'(a) = 2$, $g(a) = b$ તથા $fog = I$. તો $f'(b) = ...$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1

ઉકેલ : $f(g(x)) = x$

$\therefore f'(g(x))\, g'(x) = 1$

$\therefore f'(g(a))\, g'(a) = 1$

$\therefore f'(b) \cdot 2 = 1$

$\therefore f'(b) = \frac{1}{2}$ **જવાબ :** (A)

(35) $y = x^n (a \cos(\log x) + b \sin(\log x))$. જો, y એ $x^2 y_2 + (1 - 2n) xy_1 + Ay = 0$ નું સમાધાન કરે તો A = ...

(A) n (B) $1 + n^2$ (C) $1 + \frac{1}{n}$ (D) $1 - n^2$

ઉકેલ : $y = x^n (a\cos(\log x) + b\sin(\log x))$

$y_1 = nx^{n-1}(a\cos(\log x) + b\sin(\log x)) + x^n\left(-a\sin(\log x)\frac{1}{x} + (b\cos(\log x)\frac{1}{x}\right)$

$\therefore xy_1 = ny + x^n(-a\sin(\log x) + b\cos(\log x))$

$\therefore xy_2 + y_1 = ny_1 + nx^{n-1}(-a\sin(\log x) + b\cos(\log x)) + x^n(-a\cos(\log x)\frac{1}{x} - b\sin(\log x)\frac{1}{x})$

$\therefore x^2y_2 + xy_1 = nxy_1 + n(xy_1 - ny) - y$

$\therefore x^2y_2 + (1-2n)xy_1 + (1+n^2)y = 0$ જવાબ : (B)

(36) જો $x = f(t)$, $y = g(t)$ તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ = ...

(A) $\frac{f'g''-g'f''}{(f')^2}$ (B) $\frac{f'g''-g'f''}{(f')^3}$ (C) $\frac{f''}{g''}$ (D) $\frac{g''}{f''}$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^2}\ \frac{1}{f'(t)} = \frac{f'g''-g't''}{(f')^3}$ જવાબ : (B)

(37) જો $f(x) = \begin{cases} (1+|\sin x|)^{\frac{a}{|\sin x|}}, & \frac{-\pi}{6}<x<0 \\ b & x=0 \\ e^{\tan 2x/\tan 3x} & 0<x<\frac{\pi}{6} \end{cases}$ એ $\left(\frac{-\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ પર સતત હોય તો, = ...

(A) $a = \frac{2}{3}$, $b = e^2$ (B) $a = \frac{1}{3}$, $b = e^{\frac{1}{3}}$ (C) $a = \frac{2}{3}$, $b = e^{\frac{2}{3}}$ (D) $a = e^{\frac{2}{3}}$, $b = e^{\frac{2}{3}}$

ઉકેલ : $b = f(0) = \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\tan 2x}{\tan 3x}} = e^{\frac{2}{3}}$

વળી, $b = f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \left(1+|\sin x|\right)^{\frac{a}{|\sin x|}} = e^a = e^{\frac{2}{3}}$, આથી $a=\frac{2}{3}$ જવાબ : (C)

(38) જો $y = \frac{ax^2}{(x-a)(x-b)(x-c)} + \frac{bx}{(x-b)(x-c)} + \frac{c}{x-c} + 1$ તો $\frac{y'}{y}$ = ...

(A) $\frac{1}{x}\left(\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}+\frac{c}{c-x}\right)$ (B) $\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}+\frac{c}{c-x}$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{1}{x}\left(\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}\right)$

ઉકેલ : $y = \frac{ax^2+bx(x-a)+c(x-a)(x-b)+(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

$$y = \frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\log y = 3\log x - \log (x-a) - \log (x-b) - \log (x-c)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}$$

$$= \frac{1}{x}\left[3 - \frac{x}{x-a} - \frac{x}{x-b} - \frac{x}{x-c}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[3 - \frac{x-a+a}{x-a} - \frac{x-b+b}{x-b} - \frac{x-c+c}{x-c}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{a}{a-x} + \frac{b}{b-x} + \frac{c}{c-x}\right]$$

જવાબ : (A)

(39) જો વિધેય f એ R પર સતત છે તથા $f\left(\frac{1}{4n}\right) = (\sin e^n)\, e^{-n^2} + \frac{n^2}{n^2+1}$ તો $f(0)$ ની કિંમત ......

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) –1

ઉકેલ : વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$$\therefore f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{4n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[(\sin e^n)e^{-n^2} + \frac{n^2}{n^2+1}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(\sin e^n)}{e^{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right] = 1$$

જવાબ : (A)

(40) જો $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ તો અંતરાલ $[0, \pi]$ પર

(A) $\tan (f(x))$ અને $\frac{1}{f(x)}$ બંને સતત થશે.

(B) $\tan (f(x))$ અને $\frac{1}{f(x)}$ બંને અસતત થશે.

(C) $\tan (f(x))$ અને $f^{-1}(x)$ બંને સતત થશે.

(D) $\tan (f(x))$ અને $f^{-1}(x)$ બંને અસતત થશે.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ એ $[0, \pi]$ પર સતત છે.

$y = \tan f(x)$ એ $\left[-1, \frac{\pi}{2}-1\right]$ (= f નો વિસ્તાર) પર સતત છે.

$\therefore \tan f(x)$ એ $[0, \pi]$ પર સતત થશે તથા $\frac{1}{f(x)}$ એ $x = 2$ પર વ્યાખ્યાયિત ન થવાથી $[0, \pi]$ પર અસતત થશે.

$\therefore f^{-1}(x) = 2(x+1)$ એ તેના પ્રદેશ $[0, \pi]$ પર સતત થશે.

$\therefore \tan f(x)$ અને $f^{-1}(x)$ બંને $[0, \pi]$ પર સતત થશે.

જવાબ : (C)

(41) $f(x) = \left\{\dfrac{\log(1+x)^{1+x}}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right\}$ તો $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ...$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)\log(1+x) - x}{x^2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$સ્વરૂપ

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x)+1-1}{2x}$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$સ્વરૂપ **જવાબ :** (B)

(42) વિધેય $f(x) = x\, \dfrac{e^{[x]+|x|} - 2}{[x]+|x|}$ હોય તો $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ...$

(A) 1 (B) 0 (C) –1 (D) અસ્તિત્વ નથી

ઉકેલ : $-1 < x < 0$ માટે $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} x\, \dfrac{e^{-1-x} - 2}{-1-x} = 0$

$0 < x < 1$ માટે $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} x\, \dfrac{e^x - 2}{x} = \lim\limits_{x \to 0+} e^x - 2 = -1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી. **જવાબ :** (D)

(43) $\lim\limits_{x \to 0} x^7 \left[\dfrac{1}{x^3}\right] = ...$

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $x - 1 \le [x] \le x, \ \forall\, x \in R$

$\therefore \dfrac{1}{x^3} - 1 < \left[\dfrac{1}{x^3}\right] \le \dfrac{1}{x^3}$

$\therefore x^7 \left(\dfrac{1}{x^3} - 1\right) \le x^7 \left[\dfrac{1}{x^3}\right] \le x^4, \quad \forall x$

$\lim\limits_{x \to 0} x^7 \left(\dfrac{1}{x^3} - 1\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^7(1-x^3)}{x} = 0$

$\therefore$ સેન્ડવિચ પ્રમેય પરથી, $\lim\limits_{x \to 0} x^7 \left[\dfrac{1}{x^3}\right] = 0$ **જવાબ :** (A)

(44) શૂન્યેતર વિધેય f એ $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$ પ્રકારનું છે. જો $f'(0) = 5$ અને $f'(5) = 5$, તો $f(5) = ...$

(A) 1 (B) 5 (C) 2 (D) 0

ઉકેલ : આપેલ વિધેયક સમીકરણ પરથી, $f(0) = 1$ અને $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

હવે, $5 = f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h-(-5))-f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(h)}{f(-5)}-f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(5)f(h)-f(5)}{h} \qquad \left(f(-x)=\frac{1}{f(x)}\right)$$

$$= f(5)\,f'(0) = 5f(5) \qquad \left(\frac{f(h)-1}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)$$

$\therefore$ $5 = 5\,f(5)$. આથી $f(5) = 1$ **જવાબ :** (A)

(45) જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-sin^3 x}{3cos^2 x}, & x<\dfrac{\pi}{2} \\ a, & x=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{b(1-sinx)}{(\pi-2x)^2}, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત હોય તો $\frac{b}{a}$ = ...

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

ઉકેલ : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{1-sin^3 x}{3cos^2 x}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{(1-sinx)\,(1+sin\,x+sin^2 x)}{3(1-sinx)(1+sin\,x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{b(1-sinx)}{(\pi-2x)^2}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{bcos^2 x}{4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} \times \frac{1}{1+sinx}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{bsin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{1}{1+sin\,x} = \frac{b}{8}$$

વિધેય f એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત હોવાથી, $\frac{1}{2} = a = \frac{b}{8}$. આથી $\frac{b}{a} = 8$ **જવાબ :** (D)

(46) $\lim_{x\to 0} \left[tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$ = ...

(A) e (B) e^2 (C) e^{-2} (D) $\frac{1}{e}$

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} \left[tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$

$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1+tanx}{1-tanx}\right]^{\frac{1}{x}}$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}\left[(1+tanx)^{\frac{1}{tanx}}\right]^{\frac{tanx}{x}}}{\lim_{x\to 0}\left[(1-tanx)^{-\frac{1}{tanx}}\right]^{\frac{-tanx}{x}}} = \frac{e^1}{e^{-1}} = e^2$$

જવાબ : (B)

(47) જો $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \le 2 \\ [x], & x > 2 \end{cases}$ તો ......

(A) $\lim_{x\to 2-} f(x) = -2$ (B) $\lim_{x\to 2+} f(x) = -2$

(C) $\lim_{x\to 2+} f(x) = f(2)$ (D) $\lim_{x\to 2} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} 2 = f(2)$

$f(2) = |2| = 2$

જવાબ : (C)

(48) $f(x) = \begin{cases} xe^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)} & x \ne 0 \\ 0 \quad ; & x = 0 \end{cases}$ તો f એ $x = 0$ આગળ ......

(A) વિકલનીય છે. (B) વિકલનીય નથી પરંતુ સતત છે.
(C) વિકલનીય નથી તથા સતત પણ નથી. (D) વ્યાખ્યાયિત નથી.

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} xe^{\frac{-2}{x}} = 0$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0$

$f(0) = 0.$ આથી $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$\therefore f$ એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$f'(0-) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{-h} = 1$

$f'(0+) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{he^{\frac{-2}{h}}}{h} = 0$

$\therefore f$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

જવાબ : (B)

(49) જો $f(x) = \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+ax} - 1}$ અને $\lim_{x\to 0} f(x) = \log_e 4$, તો $a =$ ......

(A) $\log_e 2$ (B) 1 (C) $\log_e 2 - 1$ (D) $\log_e 2 + 1$

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+ax} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2^x - 1}{x}}{\frac{\sqrt{1+ax} - 1}{x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+ax} + 1}{\frac{1+ax-1}{x}}$

$= \frac{2}{a} \log 2 = \frac{1}{a} \log 4$. આથી $\frac{1}{a} \log_e 4 = \log_e 4$. આથી $a = 1$ **જવાબ :** (B)

(50) જો $f'(2) = 1$ તો $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h^2) - f(2-h^2)}{2h^2} = ...$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h^2) - f(2-h^2)}{2h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(2+h^2)2h - f'(2-h^2)(-2h)}{4h}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(2+h^2) + f'(2-h^2)}{2} = f'(2) = 1$ **જવાબ :** (B)

(51) ધારો કે [0, 1]માં વિધેય fના દ્વિતીય વિકલિતનું અસ્તિત્વ છે અને $|f''(x)| \le 1, \forall x \in [0, 1]$. જો $f(0) = f(1)$ હોય તો, અંતરાલ (0, 1) માં

(A) $|f(x)| > 1$ (B) $|f(x)| < 1$ (C) $|f'(x)| > 1$ (D) $|f''(x)| < 1$

ઉકેલ : $f(0) = f(1)$ હોવાથી રોલના પ્રમેયની મદદથી એવો c, $0 < c < 1$ માં મળે કે જેથી $f'(c) = 0$

ધારો કે (0, 1) માં c સિવાયનું બિંદુ x છે. અંતરાલ (x, c) માં f' માટે લાગ્રાન્જના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતા

$f'(x) - f'(c) = (x - c) f''(c_1)$ $(x < c_1 < c)$

$\therefore |f'(x)| = |x - c| \, |f''(c_1)| < 1$ $(|x - c| < 1 \, |f''(c_1)| \le 1)$

$\therefore |f'(x)| < 1$ **જવાબ :** (D)

નોંધ : $[c, x]$ માં પણ આ રીતે સાબિત થાય છે.

(52) નીચેનામાંથી કયું વિધેય અંતરાલ [–1, 1] માં રોલના પ્રમેયની શરતોનું પાલન કરે છે ?

(A) $f(x) = |x| [x]$ (B) $f(x) = [x] + [-x]$ (C) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (D) $f(x) = |x| - |\sin x|$

ઉકેલ : (A) $f(x) = |x| [x] = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$\therefore f$ એ $x = 0$ માટે વિકલનીય નથી. $(f'(0-), f'(0+) = 0)$

(B) $f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in Z \\ -1, & x \notin Z \end{cases}$

$\therefore f$ એ $x = 0$ આગળ સતત નથી.

(C) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ અને $f(0) = 0$

$\therefore f$ એ $x = 0$ આગળ સતત નથી.

(D) $f(x) = \begin{cases} x - sinx & 0 \le x \le 1 \\ -x + sinx & -1 \le x \le 0 \end{cases}$

$\therefore f$ એ $[-1, 1]$ માં સતત છે. તેમજ $(-1, 1)$માં વિકલનીય છે.

વળી, $f(-1) = f(1)$

આમ રોલના પ્રમેયની શરતોનું પાલન થાય છે. **જવાબ :** (D)

(53) જો $y = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)\dots(1 + x^{2n})$ તો $x = 0$ આગળ $\frac{dy}{dx}$ ની કિંમત ......

(A) 0 (B) – 1 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : $y = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)\dots(1 + x^{2n})$

$\therefore \log y = \log(1 + x) + \log(1 + x^2) + \log(1 + x^4) + \dots + \log(1 + x^{2n})$

વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \dots + \frac{2n\,x^{2n-1}}{(1+x)^{2n}}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \dots + \frac{2n\,x^{2n-1}}{(1+x)^{2n}}\right].$$ આથી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = y(0) \cdot 1 = 1$

બીજી રીત :

$y(1 - x) = (1 - x)(1 + x)\dots(1 + x^{2n}) = 1 - x^{4n}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)(-4n\,x^{4n-1}) + (1-x^{4n})}{(1-x)^2}$$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 1$ **જવાબ :** (C)

(54) ધારો કે $f : R \to R$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$; $\forall\ x, y \in R$. જો $f(x)$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય હોય, તો

(A) $f(x)$ એ (a, b) જ્યાં $a < 0 < b$ અંતરાલમાં વિકલનીય હોય.

(B) $f'(x)$ = અચળ

(C) f એ R પર સતત નથી.

(D) $f(x)$ એ અમુક બિંદુ સિવાય વિકલનીય છે. (IIT : 2011)

ઉકેલ : $f(x + y) = f(x) + f(y)$

$x = y = 0$ મૂકતાં, $f(0) = f(0) + f(0)$. આથી $f(0) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{f(x) + f(h) - f(x) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

$\therefore f'(x) = \lambda$, જ્યાં λ અચળ

$\therefore f(x) = \lambda x + c$, જ્યાં c અચળ

વળી, $f(0) = 0$. આથી $c = 0$

$\therefore f(x) = \lambda x$ **જવાબ :** (A), (B)

(55) જો $\lim_{x\to 0} [1+x\log(1+b^2)]^{\frac{1}{x}} = 2\,b\,sin^2\,\theta$, $b > 0$ અને $\theta \in [-\pi, \pi]$ તો $\theta =$ ......

(A) $\pm\frac{\pi}{4}$ (B) $\pm\frac{\pi}{3}$ (C) $\pm\frac{\pi}{6}$ (D) $\pm\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0}\left[[1+x\log(1+b^2)]^{\frac{1}{x\log(1+b^2)}}\right]^{\log(1+b^2)} = e^{\log(1+b^2)} = 1 + b^2$

$\therefore 1 + b^2 = 2b\,sin^2\,\theta$

$\therefore sin^2\,\theta = \frac{1+b^2}{2b} \geq 1$. પરંતુ $sin^2\,\theta \leq 1$

$\therefore sin^2\,\theta = 1$ $(1 + b^2 \geq 2b)$

$\therefore \theta = \pm\frac{\pi}{2}$ **જવાબ :** (D)

(56) $f(x) = [x]\,sin\,\pi\,x$, વિધેય f નું $x = k$, $k \in Z$ આગળ ડાબી બાજુનું વિકલિત ...... છે.

(A) $(-1)^k\,(k-1)\pi$ (B) $(-1)^{k-1}\,(k-1)\pi$ (C) $(-1)^k\,k\pi$ (D) $(-1)^{k-1}\,k\pi$

ઉકેલ : $f'(k-) = \lim_{h\to 0}\frac{f(k) - f(k-h)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{[k]\sin k\pi - [k-h]\sin(k-h)\pi}{h}$

$= \lim_{h\to 0} -(k-1)\frac{sin(k-h)\pi}{h}$ $\left(\frac{0}{0}\text{સ્વરૂપ}\right)$ $(sin\,k\pi = 0, [k-h] = k-1)$

$= -(k-1)\lim_{h\to 0}(-\pi)\,cos\,(k-h)\pi$

$= (k-1)\,\pi\,(-1)^k$ **જવાબ :** (A)

(57) જો $f(x) = \begin{cases} -x-\frac{\pi}{2}, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \\ \log x, & x > 1 \end{cases}$ તો

(A) $f(x)$ એ $x = -\frac{\pi}{2}$ આગળ સતત છે. (B) $f(x)$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

(C) $f(x)$ એ $x = -\frac{3}{2}$, 1 આગળ વિકલનીય છે. (D) (A), (B), (C) સત્ય છે.

ઉકેલ : $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-}\left(-x-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+}(-cos\,x) = 0.$

$\therefore \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = f(0) = 0$

$\therefore f$ એ $x = -\frac{\pi}{2}$ આગળ સતત છે.

આથી (A) સત્ય છે. વળી $f'(0+) = 1, f'(0-) = 0$. આથી (B) સત્ય છે.

$f'(1+) = 1,\ f'(1-) = 1$

$\therefore f$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય છે.

અહીં $-\frac{3}{2} > -\frac{\pi}{2}$.

$\therefore f(x) = -cos\ x$. આથી f એ $-\frac{3}{2}$ આગળ વિકલનીય છે.

આથી (C) સત્ય છે. **જવાબ :** (D)

(58) જો $y = cot^{-1}\left(\dfrac{\log\left(\frac{e}{x^2}\right)}{\log(ex^2)}\right) + cot^{-1}\left(\dfrac{\log\left(ex^4\right)}{\log\left(\frac{e^2}{x^2}\right)}\right)$, તો $\dfrac{dy}{dx}$ = ... $0<\log x<\frac{1}{2}$

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : $y = cot^{-1}\left(\dfrac{\log\left(\frac{e}{x^2}\right)}{\log(ex^2)}\right) + cot^{-1}\left(\dfrac{\log\left(ex^4\right)}{\log\left(\frac{e^2}{x^2}\right)}\right)$

$= tan^{-1}\left(\dfrac{1+\log x^2}{1-\log x^2}\right) + tan^{-1}\left(\dfrac{2-\log x^2}{1+2\log x^2}\right)$

$= tan^{-1} 1 + tan^{-1}(\log x^2) + tan^{-1} 2 - tan^{-1}(\log x^2)$

$= tan^{-1} 1 + tan^{-1} 2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 0$

[$\log x^2 > 1$ હોય, તો પણ અચળ ઉમેરાતાં $\dfrac{dy}{dx} = 0$] **જવાબ :** (B)

(59) જો $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+100)$ અને $g(x) = f(x) f''(x) - (f'(x))^2$ તો $g(x) = 0$ ને

(A) ઉકેલ નથી. (B) એક ઉકેલ મળે.

(C) બે ઉકેલ મળે. (D) ઓછામાં ઓછા ત્રણ ઉકેલ મળે.

ઉકેલ : $log\ f(x) = \log(x+1) + \log(x+2) + \ldots + \log(x+100)$

$\therefore \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \ldots + \dfrac{1}{x+100}$

ફરીથી વિકલન કરતાં,

$$\frac{f(x) f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \cdots - \frac{1}{(x+100)^2} < 0$$

$\therefore\ f(x) f''(x) - (f'(x))^2 = g(x) < 0$

$\therefore\ g(x) = 0$ ને ઉકેલ ન મળે. **જવાબ :** (A)

(60) $f(x) = g'(x) \dfrac{e^{\frac{a}{x}} - e^{-\frac{a}{x}}}{e^{\frac{a}{x}} + e^{-\frac{a}{x}}}$ જ્યાં g' એ વિધેય g નું વિકલિત છે તથા સતત વિધેય છે અને $a > 0$. જો $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય તો

(A) $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ જ્યાં $a_i \in R,\ i = 1, 2 ...n$ તથા $a_1 \neq 0\ a_n \neq 0$

(B) g એવું વિધેય હોય જ્યાં $g'(0) = 0$ (C) $g(x) = \sin x$ (D) $g(x) = \log(1 + x)$

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{e^{\frac{a}{x}} - e^{-\frac{a}{x}}}{e^{\frac{a}{x}} + e^{-\frac{a}{x}}} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1 - e^{\frac{-2a}{x}}}{1 + e^{\frac{-2a}{x}}} = 1$

અને $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{e^{\frac{a}{x}} - e^{\frac{-a}{x}}}{e^{\frac{a}{x}} + e^{\frac{-a}{x}}} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{e^{\frac{2a}{x}} - 1}{e^{\frac{2a}{x}} + 1} = -1$

જો $g'(0) = 0$ થાય તો જ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય. **જવાબ :** (B)

(61) વિધેય f એ અનૃણ સતત વાસ્તવિક વિધેય છે. જો $x \geq 1$ માટે $f'(x) \leq p\, f(x)$, જ્યાં $p > 0$ અને $f(1) = 0$ હોય, તો $[f(\sqrt{e}) + f(\sqrt{\pi})]$

(A) $\{0\}$ (B) R^+ (C) R^- (D) $\notin R$

ઉકેલ : $(f'(x) - p\, f(x)) \leq 0$

$\therefore\ \dfrac{d}{dx}(e^{-px} f(x)) \leq 0$

ધારો કે $g(x) = e^{-px} f(x)$

હવે $g'(x) \leq 0,\ \forall\ x \geq 1$

$g(x) \leq g(1) \qquad \forall\ x \geq 1$

$\therefore\ g(x) \leq 0.$ આથી $e^{-px} f(x) \leq 0$ આથી $f(x) \leq 0,\ \forall\ x \geq 1$

પરંતુ $f(x) \geq 0$. આથી $f(x) = 0,\ \forall\ x \geq 1$

$\therefore\ [f(\sqrt{e}) + f(\sqrt{\pi})] = 0$ **જવાબ :** (A)

(62) જો $y(n) = e^x e^{x^2} ... e^{x^n},\ 0 < x < 1$ હોય, તો $x = \dfrac{1}{2}$ આગળ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{dy(n)}{dx} = ...$

(A) e (B) $4e$ (C) $2e$ (D) $3e$

ઉકેલ : $y(n) = e^{x + x^2 + \cdots + x^n} = e^{\frac{x(1 - x^n)}{1 - x}}$

$\therefore\ \dfrac{dy(n)}{dx} = e^{\frac{x(1-x^n)}{1-x}} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x(1 - x^n)}{1 - x}\right)$

$$= e^{\frac{x-x^{n+1}}{1-x}} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{dy(n)}{dx} = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)} \frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)\right]$$

$$= e^{\frac{x}{1-x}} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$ ($0 < x < 1$. આથી જો $n \to \infty$ તો $x^{n+1} \to 0$)

$$= e^{\frac{x}{1-x}} \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\therefore \left(\lim_{n\to\infty} \frac{dy(n)}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} = 4e$$

જવાબ : (B)

(63) જો $f''(x) = \frac{cos(\log x)}{x}$, $f'(1) = 0$ અને $y = f\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)$ તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(A) $\frac{sin(\log x)}{cos\, x}$ (B) $sin\left(\log\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)\right)$

(C) $\frac{12}{(3-2x)^2}\, sin\left(\log\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)\right)$ (D) $\frac{1}{(3-2x)^2}\, sin\left(\log\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)\right)$

ઉકેલ : $f''(x) = \frac{cos(\log x)}{x} = \frac{d}{dx}(sin(\log x) + k)$

$\therefore f'(x) = sin(\log x) + k$. પરંતુ $f'(1) = 0$ હોવાથી $k = 0$.

$\therefore f'(x) = sin(\log x)$

હવે, $y = f\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)$$

$$= f'\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)\left(\frac{2(3-2x)+2(2x+3)}{(3-2x)^2}\right)$$

$$= sin\left(\log\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)\right) \frac{12}{(3-2x)^2}$$

જવાબ : (C)

(64) જો $f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, & |x| < 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x| \ge 1 \end{cases}$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય હોય, તો a = ..., b = ...

(A) $\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}$ (B) $\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}$ (C) $\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}$ (D) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

ઉકેલ : $f'(1-) = (2ax)_{x=1} = 2a$

$f'(1+) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)_{x=1} = -1$

f એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય છે.

$\therefore\ 2a = -1$. આથી $a = -\frac{1}{2}$

વળી, f એ $x = 1$ આગળ સતત પણ થશે.

$\therefore \lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1+} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to1-} (ax^2 - b) = \lim_{x\to1+} \frac{1}{x}$

$\therefore a - b = 1$ આથી $b = \frac{-3}{2}$ **જવાબ :** (A)

(65) ધારો કે f એ એવું વિધેય છે જ્યાં $f(x + y) = f(x) + f(y)$ અને $f(x) = \sin x\ g(x)$, $\forall\ x, y \in$ R. જો $g(x)$ એ સતત વિધેય હોય તથા $g(0) = c$, તો $f'(x) =$ ......

(A) $c\ sin\ n$ (B) c (C) $c\ cos\ x$ (D) $cosx\ g'(x)$

ઉકેલ : $f'(x) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to0} \frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\sin h}{h}\ g(h) = g(0) = c$ **જવાબ :** (B)

(66) જો $\lim_{x\to0} \frac{e^{|x|+[x]}-1}{a|x|+[x]}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો $a =$ ......

(A) 0 (B) $1 - e^{-1}$ (C) $(1 - e^{-1})^{-1}$ (D) $1 + e$

ઉકેલ : $x < 0$ તો $-1 < x < 0$ લેતાં $|x| = -x$ $[x] = -1$

$\lim_{x\to0-} \frac{e^{|x|+[x]}-1}{a|x|+[x]} = \lim_{x\to0} \frac{e^{-x-1}-1}{-ax-1} = \frac{e^{-1}-1}{-1} = 1 - \frac{1}{e}$

$x > 0$ તો $0 < x < 1$ લેતાં $|x| = x$, $[x] = 0$

$\lim_{x\to0+} \frac{e^{|x|+[x]}-1}{a|x|+[x]} = \lim_{x\to0+} \frac{e^{x}-1}{ax} = \frac{1}{a}$

લક્ષનું અસ્તિત્વ હોવાથી, $1 - e^{-1} = \frac{1}{a}$

$\therefore a = (1 - e^{-1})^{-1}$ **જવાબ :** (C)

(67) જો $\lim_{x\to0-} \left[\frac{[x]+[x^2]+[x^3]+...+[x^{2n+1}]+n+1}{1+[x]+|x|+2x}\right] =$ ......

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : $\lim_{x\to0-} [x] = -1, [x^2] = 0, [x^3] = -1, ...$

$\therefore$ માંગેલ લક્ષ $= \lim_{x\to0-} \frac{(n+1)(-1)+n(0)+n+1}{1-1-x+2x} = 0$ **જવાબ :** (A)

(68) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ ને બે એકબીજાના વ્યસ્ત ધન બીજ હોય તો

(A) $f'(1) = 0$ (B) $af'(1) < 0$

(C) $af'(1) > 0$ (D) $af'(1)$ વિશે કઈ તારણ ન મળે.

ઉકેલ : $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

ધારો કે α અને $\frac{1}{\alpha}$ એ $f(x)$ નાં બે ધન બીજ છે.

$\therefore \alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{-b}{a} > 2 \quad (\alpha > 0)$

$\therefore \frac{2a+b}{a} < 0.$ આથી $a(2a + b) < 0$

$\therefore a f'(1) = a(2a + b) < 0 \quad (f'(x) = 2ax + b)$ **જવાબ :** (B)

(69) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_{10}(x+2)+[x+2]}{\left[x+\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^r\right]} =$ ...... જ્યાં $[\cdot]$ એ મહત્તમ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય છે.

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી

ઉકેલ : $\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore [x + 2] = [x] + 2$

$\therefore$ માંગેલ લક્ષ $= \lim_{x\to\infty} \frac{\log_{10}(x+2)+[x]+2}{[x]+2}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log_{10}(x+2)}{[x]+2} + 1 = 0 + 1 = 1$ **જવાબ :** (B)

(70) જો $f(x) = \sum_{r=1}^{n} tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2+(2r-1)x+(r^2-r+1)}\right)$ તો $\lim_{n\to\infty} f'(0) =$ ...... $(x > 0)$

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{e}{2}$ (C) e (D) –1

ઉકેલ : $f(x) = \sum_{r=1}^{n} tan^{-1}\left(\frac{(x+r)-(x+r-1)}{1+(x+r)(x+r-1)}\right)$

$= \sum_{r=1}^{n} [tan^{-1}(x + r) - tan^{-1}(x + r - 1)]$

$f(x) = (tan^{-1}(x + n) - tan^{-1} x)$. આથી $f'(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2} - \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore f'(0) = \frac{1}{1+n^2} - 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} f'(0) = -1$ **જવાબ :** (D)

(71) ધારો કે $f(x)$ અને $g(x)$ એ R પર વિકલિત વિધેયો છે. જો $f(2) = 8$, $g(2) = 0$, $f(4) = 10$ અને $g(4) = 8$, તો

(A) $g'(x) > 4f'(x), \ \forall x \in (2, 4)$ (B) $g(x) > f(x), \forall x \in (2, 4)$

(C) કોઈક $x \in (2, 4)$ માટે $3g'(x) = 4f'(x)$ (D) કોઈક $x \in (2, 4)$ માટે $g'(x) = 4f'(x)$

ઉકેલ : ધારો કે $h(x) = g(x) - 4f(x)$

$h(2) = g(2) - 4f(2) = 0 - 4.8 = -32$

$h(4) = g(4) - 4f(4) = 8 - 4.10 = -32$

વળી, h એ $[2, 4]$ પર સતત છે તથા $(2, 4)$ પર વિકલિત છે.

$\therefore$ વિધેય h એ રોલના પ્રમેયની શરતનું સમાધાન કરે છે.

$\therefore$ કોઈક $x \in (2, 4)$ માટે $h'(x) = 0$

$\therefore \quad g'(x) = 4f'(x)$ **જવાબ :** (D)

(72) નીચેનામાંથી કયું વિધેય અંતરાલ $[0, 1]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતોનું પાલન કરતું નથી ?

(A) $f(x) = \begin{cases} x, & x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + x\right)^2, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\,|x - 1|$ (D) $f(x) = |2x - 1|$

ઉકેલ : આપેલ વિકલ્પોના વિધેયનું અવલોકન કરતા માલૂમ પડે છે કે, $f(x) = |2x - 1|$ એ $x = \frac{1}{2}$ આગળ વિકલનીય નથી.

આથી, વિકલ્પ (D)નાં વ્યાખ્યાયિત કરેલ વિધેય મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતનું પાલન કરતું નથી. **જવાબ :** (D)

(73) $f : R \to R$ એ n ઘાતવાળું બહુપદી વિધેય છે, જ્યાં $f(x) = 0$ ને n ભિન્ન વાસ્તવિક ઉકેલો છે. સમીકરણ $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x) = 0$ ને કેટલા વાસ્તવિક ઉકેલ મળે ?

(A) એક પણ નહિ (B) એક (C) બે (D) n

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ તથા $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\therefore \log f(x) = \log(x - x_1) + \log(x - x_2) + \ldots\ldots + \log(x - x_n)$

$\therefore h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}$

$$h'(x) = \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = -\left[\frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x - x_n)^2}\right] < 0, \forall x$$

$\therefore f(x)f''(x) - [f'(x)]^2 < 0, \forall x$

$\therefore$ માંગેલ સમીકરણને એકપણ વાસ્તવિક ઉકેલ મળે નહિ. **જવાબ :** (A)

(74) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} = \ldots\ldots$

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{12}$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\sin x + x}{2}\right)\sin\left(\frac{x - \sin x}{2}\right)}{x^4}$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\sin x + x}{2}\right)}{\frac{\sin x + x}{2}} \times \left(\frac{\sin x + x}{2}\right) \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x - \sin x}{2}\right)}{\frac{x - \sin x}{2}} \times \left(\frac{x - \sin x}{2}\right) \times \frac{1}{x^4}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{4x^4}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^4}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \times \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \times 2 \qquad \left(\frac{0}{0}\text{સ્વરૂપ}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \qquad \left(\frac{0}{0}\text{સ્વરૂપ}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

જવાબ : (C)

(75) જો $x = a \cos t \sqrt{\cos 2t}$ અને $y = a \sin t \sqrt{\cos 2t}$ $(a > 0)$ તો $\left|\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}$ = ...

(A) $\frac{a}{3}$ (B) $a\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3a}$ (D) $\frac{\sqrt{2}a}{3}$

ઉકેલ : $x = a \cos t \sqrt{\cos 2t}$

$$\frac{dx}{dt} = a\left[\cos t \frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}}(-2\sin 2t) + \sqrt{\cos 2t}\,(-\sin t)\right]$$

$$= \frac{-a}{\sqrt{\cos 2t}} [\sin 2t \cos t + \sin t \cos 2t] = \frac{-a \sin 3t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

તે જ રીતે $\frac{dy}{dt} = \frac{a \cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}}$. આથી $\frac{dy}{dx} = -\cot 3t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{cosec}^2 3t \cdot 3 \frac{\sqrt{\cos 2t}}{a \sin 3t} \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx}\right)$$

$$= -\frac{3}{a} \operatorname{cosec}^3 3t \sqrt{\cos 2t}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \cot^2 3t = \operatorname{cosec}^2 3t$$

હવે, $\left|\dfrac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right| = \dfrac{a}{3}\left|\dfrac{cosec^2 3t}{cosec^3 3t\sqrt{cos 2t}}\right| = \dfrac{a}{3}\left|\dfrac{1}{cosec 3t\sqrt{cos 2t}}\right|$

$t = \dfrac{\pi}{6}$ આગળ માંગેલ કિંમત $= \dfrac{a}{3}\left|\dfrac{1}{1\sqrt{\frac{1}{2}}}\right| = \dfrac{\sqrt{2}a}{3}$ **જવાબ :** (D)

(76) $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ = ... (AIEEE : 2011)

(A) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-2}$ (B) $-\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-3}$ (C) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}$ (D) $-\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-3}$

ઉકેલ : $\dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right) = \dfrac{d}{dy}\left\{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-1}\right\}$

$= \dfrac{d}{dx}\left\{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-1}\right\}\dfrac{dx}{dy} = -\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-2}\dfrac{d^2y}{dx^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-1} = -\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-3}\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **જવાબ :** (B)

(77) જો $f(x) = \prod_{r=1}^{18}(x-r)^{r^2(2016-r)}$, તો $\dfrac{f'(2016)}{f(2016)}$ = ...

(A) અવિભાજ્ય સંખ્યા (B) અયુગ્મ વિભાજ્ય સંખ્યા (C) અસંમેય સંખ્યા (D) 0

ઉકેલ : $\log\{f(x)\} = \sum_{r=1}^{18} r^2(2016-r)\log(x-r)$

$\dfrac{1}{f(x)}f'(x) = \sum_{r=1}^{18}\dfrac{r^2(2016-r)}{x-r}$

$x = 2016$ મૂકતાં, $\dfrac{f'(2016)}{f(2016)} = \sum_{r=1}^{18}\dfrac{r^2(2016-r)}{2016-r} = \sum_{r=1}^{18}r^2 = \dfrac{18\cdot19\cdot37}{6} = 2019$

હવે $2019 = 3 \times 673$ **જવાબ :** (B)

(78) જો $D(x) = \begin{vmatrix} tan\,x & tan(x+h) & tan(x+2h) \\ tan(x+2h) & tan\,x & tan(x+h) \\ tan(x+h) & tan(x+2h) & tan\,x \end{vmatrix}$ તો $\lim_{h\to0}\dfrac{D\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h^2\sqrt{3}}$ = ...

(A) 144 (B) 168 (C) 138 (D) 108

ઉકેલ : $C_3 - C_2$ અને $C_2 - C_1$ કરતાં પછી $C_2\left(\frac{1}{h}\right)$, $C_3\left(\frac{1}{h}\right)$

$$\frac{D(x)}{h^2} = \begin{vmatrix} tan\,x & \frac{tan(x+h)-tan\,x}{h} & \frac{tan(x+2h)-tan(x+h)}{h} \\ tan(x+2h) & \frac{tan\,x-tan(x+2h)}{h} & \frac{tan(x+h)-tanx}{h} \\ tan(x+h) & \frac{tan(x+2h)-tan(x+h)}{h} & \frac{tan\,x-tan(x+2h)}{h} \end{vmatrix}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{tan(x+h)-tan\,x}{h} = sec^2x$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{tan(x+2h)-tan(x+h)}{h} = sec^2x$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-tan(x+2h)+tan\,x}{h} = -2\ sec^2x$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{D(x)}{h^2} = \begin{vmatrix} tan\,x & sec^2x & sec^2x \\ tan\,x & -2sec^2x & sec^2x \\ tan\,x & sec^2x & -2sec^2x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} tan\,x & sec^2x & sec^2x \\ 0 & -3sec^2x & 0 \\ 0 & 0 & -3sec^2x \end{vmatrix} \qquad (R_2 - R_1,\ R_3 - R_1)$$

$$= 9\ tan\,x\ sec^4\,x$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{D\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h^2\sqrt{3}} = 144$$

જવાબ : (A)

(79) જો $a + b + c = 0$ હોય તો (0, 1) અંતરાલમાં સમીકરણ $3ax^2 + 2bx + c = 0$ ને ......

(A) ઓછામાં ઓછું એક વાસ્તવિક બીજ મળે. (B) એક વાસ્તવિક અને એક સંકર બીજ મળે.

(C) એક પણ બીજ ન મળે. (D) બે અવાસ્તવિક સંકર બીજ મળે.

ઉકેલ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ અંતરાલ [0, 1] પર સતત અને વિકલનીય છે.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

વળી, $f(0) = 0, f(1) = a + b + c = 0$. આથી $f(0) = f(1)$

રોલના પ્રમેય પરથી ઓછામાં ઓછો એક $k \in (0, 1)$ મળે કે જેથી $f'(k) = 0$ થાય.

$\therefore 3ax^2 + 2bx + c = 0$

$\therefore k$ એ $3ax^2 + 2bx + c$ નું બીજ થાય. **જવાબ :** (A)

(80) સમીકરણ $e^x\,sin\,x = 1$ નાં બે બીજની વચ્ચે સમીકરણ $e^x\,cos\,x = -1$ ને

(A) ઓછામાં ઓછું એક વાસ્તવિક બીજ મળે. (B) $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ હોય તેવું બીજ મળે.

(C) $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ હોય તેવું બીજ મળે. (D) એક પણ બીજ ન મળે.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = e^{-x} - sin\,x$ અને $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ એ $f(x)$ નાં બે શૂન્ય છે. $f(x)$ એ $[\alpha, \beta]$ પર સતત અને વિકલનીય છે તથા $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

રોલના પ્રમેય પરથી ઓછામાં ઓછો એક $k \in (\alpha, \beta)$ મળે કે જેથી $f'(k) = 0$ થાય.

$\therefore\ f'(x) = -e^{-x} - cos\,x$

$f'(k) = 0 \Rightarrow -e^{-k} - cos\,k = 0 \quad \Rightarrow -e^{-k}(1 + e^k\,cos\,k) = 0 \ \Rightarrow e^k\,cos\,k = -1$

$\therefore k$ એ $e^x\,cos\,x = -1$ નું બીજ થાય. **જવાબ :** (A)

(81) $\lim_{x\to 0} (1 - x + [x - 1] + [1 - x]) = ...$

જ્યાં [·] એ મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય છે.

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = 1 - x + [x - 1] + [1 - x]$

$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0} (1 - x - 1 + 0) = 0$ $(0 < x < 1$ લેતાં$)$

$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0+} (1 - x -2 + 1) = 0$ $(-1 < x < 0)$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

જવાબ : (A)

(82) જો $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$, તો $f'(x) = 0$ ના બીજ પૈકી ......

(A) ત્રણે બીજ ધન હોય. (B) ત્રણે બીજ ઋણ હોય.

(C) બે અવાસ્તવિક સંકર સંખ્યા હોય. (D) એક ઋણ, બે ધન હોય.

ઉકેલ : $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

અંતરાલ [1, 2], [2, 3], [3, 4] પર રોલના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતા $f'(x)$ ને (1, 2), (2, 3), (3, 4) માં એક-એક બીજ મળે.

જવાબ : (A)

(83) જો $f(x) = \begin{cases} \int_0^x (1+|1-t|)\,dt, & x > 2 \\ 5x-7, & x \le 2 \end{cases}$ તો

(A) f એ $x = 2$ આગળ સતત નથી (B) f એ R પર વિકલનીય છે

(C) $\lim_{x\to 2_+} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી (D) f એ $x = 2$ આગળ સતત છે પરંતુ વિકલનીય નથી.

ઉકેલ : $x > 2$ માટે $f(x) = \int_0^1 (1+(1-t))\,dt + \int_1^x (1+(t-1))\,dt$

$$= \int_0^1 (2-t)\,dt + \int_1^x t\,dt = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}+1, & x > 2 \\ 5x-7, & x \le 2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \left(\frac{x^2}{2}+1\right) = 3,$

$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (5x - 7) = 3.$ વળી, $f(2) = 3$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ આથી f એ $x = 2$ આગળ સતત છે.

$f'(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 5, & x < 2 \end{cases}$ આથી $f'(2+) = 2,\ f'(2-) = 5$

$\therefore f'(2-) \ne f'(2+)$

$\therefore f$ એ $x = 2$ આગળ વિકલનીય નથી.

જવાબ : (D)

(84) $f : [0, 4] \to R$ એ વિકલનીય વિધેય છે. જો અંતરાલ (0, 4) માં a, b એવા મળે કે જેથી $(f(4))^2 - (f(0))^2 = k f'(a) f(b)$ તો $k = ...$

(A) 8 (B) શક્ય નથી. (C) 4 (D) 1

ઉકેલ : મધ્યકમાન પ્રમેય પરથી $a \in (0, 4)$ એવો મળે કે જેથી $\frac{f(4) - f(0)}{4-0} = f'(a)$

$\therefore f(4) - f(0) = 4f'(a)$ (1)

વળી, વિધેય f એ [0, 4] પર સતત હોવાથી તે ન્યૂનતમ અને મહત્તમ વચ્ચેની બધી જ કિંમત ધારણ કરશે.

હવે $\frac{f(4)+f(0)}{2} \in (f(0), f(4))$

$\therefore$ કોઈક $b \in (0, 4)$ માટે $\frac{f(4)+f(0)}{2} = f(b)$

$\therefore f(4) + f(0) = 2 f(b)$ (2)

(1) અને (2) પરથી, $(f(4))^2 - (f(0))^2 = 8 f'(a)f(b)$

$\therefore k = 8$ **જવાબ :** (A)

(85) $\lim_{x\to 0} \frac{x\tan 2x - 2x\tan x}{(1-\cos 2x)^2} = ...$

(A) 2 (B) –2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) –1

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim_{x\to 0} \frac{x}{4\sin^4 x}\left[\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 2\tan x\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x}{4x^3}\left[\frac{1}{1-\tan^2 x} - 1\right]$ $\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2}\left(\frac{1-1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}\right)$ $\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\right)$

$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\tan^2 x} = \frac{1}{2}$ **જવાબ :** (C)

(86) વિધેય f એ R પર વિકલનીય છે. જો $f(1) = -2$ અને $f'(x) \geq 2, \forall x \in [1, 6]$ તો,

(A) $f(6) < 2$ (B) $f(6) \geq 8$ (C) $f(6) = 5$ (D) $f(6) < 5$

ઉકેલ : મધ્ય કમાન પ્રમેય પરથી,

$\frac{f(6)-f(1)}{6-1} = f'(c)$ જ્યાં $c \in (1, 6)$

$\frac{f(6)-(-2)}{5} \geq 2$ $(f'(x) \geq 2.\ \forall x \in [1, 6])$

$\therefore f(6) \geq 8$ **જવાબ :** (B)

(87) જો $\lim_{n\to\infty} \frac{(1^a + 2^a + ... + n^a)}{(n+1)^{a-1}[(na+1)+(na+2)+...+(na+n)]} = \frac{1}{60}$ તો $a = ...$ $(a \neq -1)$ (JEE Adv. : 2013)

(A) 5 (B) 7 (C) $\frac{-15}{2}$ (D) $\frac{-17}{2}$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{r=1}^{n} r^a}{(n+1)^{a-1}\left\{n^2 a + \dfrac{n(n+1)}{2}\right\}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{r=1}^{n} r^a}{n^{a-1}\cdot n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{a-1}\left\{a+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right\}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\dfrac{r}{n}\right)^a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{a-1}\left\{a+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right\}}$

$\therefore \dfrac{1}{60} = \dfrac{\int_0^1 x^a\, dx}{a+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{(a+1)\left(a+\dfrac{1}{2}\right)}$

$\therefore (2a + 1)(a + 1) = 120$

$\therefore 2a^2 + 3a - 119 = 0$. આથી $(2a + 17)(a - 7) = 0$. આથી $a = 7$ અથવા $a = \dfrac{-17}{2}$

પરંતુ જો $a > -1$ હોય, તો જ $\int_0^1 x^a\, dx$ નું અસ્તિત્વ છે.

આથી $a = 7$ **જવાબ :** (B)

(88) નીચેનામાંથી કયું વિધેય અંતરાલ [0, 1] પર મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતનું પાલન કરતું નથી ?

(A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}-x, & x<\dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2, & x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (B) $f(x) = |x|$ (C) $f(x) = x\,|x|$ (D) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

ઉકેલ : વિકલ્પ (A) માં વ્યાખ્યાયિત કરેલ વિધેય $x = \dfrac{1}{2}$ આગળ વિકલનીય નથી. તેથી તે અંતરાલ [0, 1] પર મધ્યકમાન વિધેયની શરતનું પાલન કરતું નથી. **જવાબ :** (A)

(89) જો $f''(0) = 4$, તો $\lim_{x\to 0} \dfrac{2f(x) - 3f(2x) + f(4x)}{x^2} = ...$

(A) 6 (B) –6 (C) 12 (D) –12

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} \dfrac{2f(x) - 3f(2x) + f(4x)}{x^2}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{સ્વરૂપ}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{2f'(x) - 6f'(2x) + 4f'(4x)}{2x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{ સ્વરૂપ}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{2f''(x) - 12f''(2x) + 16f''(4x)}{2} = 3f''(2) = 12$ **જવાબ :** (C)

(90) જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a|x^2-x-2|}{2+x-x^2}, & x<2 \\ b &, x=2 \\ \dfrac{x-[x]}{x-2} &, x>2 \end{cases}$ એ $x = 2$ આગળ સતત હોય, તો (a, b) = ...

(A) (1, 2) (B) (1, 1) (C) (2, 1) (D) (2, 2)

ઉકેલ : $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)\begin{cases} <0 & x\in(-1,2) \\ >0, & x>2 \end{cases}$

$\therefore$ જો $-1 < x < 2$ તો $|x^2 - x - 2| = 2 + x - x^2$

વળી, જો $x > 2$, તો $[x] = 2$ $(2 < x < 3)$

$\therefore f(x) = \begin{cases} a, & -1<x<2 \\ b, & x=2 \\ 1, & 2<x<3 \end{cases}$ લઈ શકાય.

$\therefore$ જો $f(x)$ એ $x = 2$ આગળ સતત હોય, તો $(a, b) = (1, 1)$ **જવાબ :** (B)

(91) જો $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)-\sin x}{ax^3+bx^5+c} = \dfrac{-1}{12}$ તો

(A) $a = 2, b \in R, c = 0$ (B) $a = -2, b \in R, c = 0$

(C) $a = 1, b \in R, c = 0$ (D) $a = -1, b \in R, c = 0$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos\left(\dfrac{\sin x+x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\sin x-x}{2}\right)}{ax^3+bx^5+c}$

$$\therefore \frac{-1}{12} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x-x}{ax^3+bx^5+c} \qquad \left(\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\sin x+x}{2}\right)=1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\sin x-x}{2}\right)}{\left(\frac{\sin x-x}{2}\right)}=1 \right)$$

$$\therefore \frac{-1}{12} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{-x^7}{7!}+\ldots}{ax^3+bx^5+c} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{6}+\frac{x^2}{120}+\ldots..+\infty}{a+bx^2+\frac{c}{x^3}}$$

$\therefore c = 0, b \in R, \dfrac{-1}{6a} = \dfrac{-1}{12},$ આથી $a = 2$ **જવાબ :** (A)

(92) જો $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_e(2+x)-x^{2n}\sin x}{1+x^{2n}}$, તો

(A) $f(x)$ એ $x = 1$ આગળ સતત થાય. (B) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \log_e 3$.

(C) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = -\sin 1$. (D) $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : જો $|x| < 1$, તો $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$. જો $|x| > 1$, તો $\lim\limits_{n\to\infty} x^{-2n} = 0$

$\therefore\ f(x) = \begin{cases} \log_e(2+x), & |x|<1 \\ -\sin x, & |x|>1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1+} f(x) = -\sin 1,\ \lim_{x\to 1-} f(x) = \log 3$ **જવાબ :** (C)

(93) $\lim_{x\to 1} \left\{ e^{\left(\frac{4}{\pi}\tan^{-1}x-1\right)} \right\}^{\frac{1}{x^2-1}} = ...$

(A) e^{π} (B) $e^{\frac{2}{\pi}}$ (C) $e^{\frac{1}{\pi}}$ (D) $e^{\frac{-1}{\pi}}$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= e^{\lim_{x\to 1} \left(\frac{4}{\pi}\tan^{-1}x-1\right)\cdot\frac{1}{x^2-1}}$ $\left(\frac{0}{0}\text{સ્વરૂપ}\right)$

$= e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{4}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{2x}\right)} = e^{\frac{1}{\pi}}$ **જવાબ :** (C)

(94) જો $f(x) = \begin{cases} a+\sin^{-1}(x+b), & x>1 \\ x, & x<1 \end{cases}$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય હોય, તો $a = ...,\ b = ...$

(A) 1, 1 (B) –1, –1 (C) 1, –1 (D) –1, 1

ઉકેલ : $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-(x+b)^2}}, & x>1 \\ 1, & x<1 \end{cases}$

$f'(1+) = f'(1-)$ (f એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય છે)

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-(1+b)^2}} = 1$ આથી $1 = \sqrt{1-(1+b)^2}$

$\therefore 1 = 1 - (1+b)^2$

$\therefore (1+b)^2 = 0.$ આથી $b = -1$

વળી, f એ $x = 1$ આગળ સતત પણ થશે.

$\therefore \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x)$

$\therefore a + \sin^{-1}(1-1) = 1$ $(b = -1)$

$\therefore a = 1.$ આથી $a = 1,\ b = -1$ **જવાબ :** (C)

(95) જો $f(x) = \begin{cases} 1+x, & 0\le x\le 2 \\ 3-x, & 2<x\le 3 \end{cases}$ તો વિધેય fof કેટલાં બિંદુએ વિકલનીય ન થાય ?

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 0

ઉકેલ : વિધેય f એ એક બિંદુ $x = 2$ આગળ વિકલનીય ન થાય. f એ $x = 2$ આગળ સતત નથી.

હવે, $(fof)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(1+x), & 0\le x\le 2 \\ f(3-x), & 2<x\le 3 \end{cases}$

જો $0 \le x \le 1$, તો $1 \le 1 + x \le 2$

$\therefore \ f(f(x)) = f(1 + x) = 1 + 1 + x = 2 + x$

જો $1 < x \le 2$, તો $2 \le 1 + x \le 3$

$\therefore \ f(f(x)) = f(1 + x) = 3 - (1 + x) = 2 - x$

$2 < x \le 3 \Rightarrow -3 \le -x < -2 \Rightarrow 0 < 3 - x \le 1$

$\therefore \ f(f(x)) = f(3 - x) = 1 + 3 - x = 4 - x$

$\therefore$ (fof) એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

આમ, વિધેય fof કુલ બે બિંદુએ વિકલનીય ન થાય. **જવાબ :** (A)

(96) વિધેય $g(x)$ એ વિધેય $f(x)$ નું પ્રતિવિધેય છે. જો વિધેય $f(x)$એ R પર વિકલનીય હોય તો $g''(f(x)) = ...$

(A) $\dfrac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$ (B) $\dfrac{f'(x)f''(x)-(f'(x))^2}{f'(x)}$ (C) $\dfrac{f'(x)f''(x)-(f'(x))^2}{(f'(x))^2}$ (D) $\dfrac{f''(x)}{(f'(x))^3}$

ઉકેલ : આપેલ છે કે $g(x) = f^{-1}(x)$ આથી $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

$\therefore x = g(f(x))$

વિકલન કરતાં,

$1 = g'(f(x))\, f'(x)$

$\therefore g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

ફરીથી વિકલન કરતાં,

$$g''(f(x))\, f'(x) = -\frac{1}{(f'(x))^2}\, f''(x)$$

$$\therefore g''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

જવાબ : (A)

(97) જો $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^6+ax^5+bx^3+cx+d}-\sqrt{x^6-2x^5+x^3-x+1}\right) = 2$, તો

(A) $b = -2$ (B) $a = -2$ (C) $a = 2$ (D) $b = -5$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(a+2)x^5+(b-1)x^3+(c+1)x+d-1}{\sqrt{x^6+ax^5+bx^3+cx+d}+\sqrt{x^6-2x^5+x^3-x+1}}$

$$\therefore 2 = \lim_{x\to\infty} \frac{(a+2)x^2+(b-1)x+\left(\frac{c+1}{x^2}\right)+\left(\frac{d-1}{x^3}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^5}+\frac{d}{x^6}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}}\right)}$$

લક્ષનું અસ્તિત્વ હોવાથી, $a + 2 = 0$, $\dfrac{b-1}{2} = 2$, $c, d \in R$

$\therefore \ a = -2, b = 5, \ c, d \in R$ **જવાબ :** (B)