5 ક્રમચય અને સંચય

ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત

જો કોઈ એક ક્રિયા n ભિન્ન રીતે થઈ શકે અને તેને આનુષાંગિક બીજી ક્રિયા m ભિન્ન રીતે થઈ શકે, તો બંને ક્રિયા કરવાના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા nm છે. બે કરતાં વધારે ક્રિયાઓ માટે પણ આ નિયમ સાચો છે.

ક્રમગુણિત n (n ફેક્ટોરિયલ)

- $n! = \underline{|n} = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n \qquad n \in N$

  $= n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$
- $n! = n(n-1)!$

  $= n(n-1)(n-2)!$
- $0! = 1! = 1$

ક્રમચય

n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને હારમાં ગોઠવવાના પ્રકારોની સંખ્યા

$= {}_np_r = {}^nP_r = P(n, r)$

$= n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1)$

$= \dfrac{n!}{(n-r)!} \qquad (1 \le r \le n)$

- n ભિન્ન વસ્તુઓને એક હારમાં ગોઠવવાના પ્રકારની કુલ સંખ્યા $= {}_np_n = n!$

પુનરાવર્તનયુક્ત ક્રમચય

n ભિન્ન વસ્તુઓને r સ્થાનમાં પુનરાવર્તન સહિત ગોઠવવાના કુલ પ્રકાર $= n \times n \times n \times ... r$ વખત $= n^r$

સમસ્વરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચય

આપેલી n વસ્તુઓમાંથી p_1 સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે. તેનાથી ભિન્ન p_2 સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે. આ જ રીતે આગળની વસ્તુઓથી ભિન્ન p_k સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે તથા $n = p_1 + p_2 + ... + p_k$ તો n વસ્તુઓના ભિન્ન ક્રમચયોની સંખ્યા $\dfrac{n!}{p_1!p_2!p_3!...p_k!}$ થાય.

વૃત્તીય ક્રમચય

n ભિન્ન વસ્તુઓને વર્તુળ પર ગોઠવવાના દરેક પ્રકારને વૃત્તીય ક્રમચય કહે છે.

જો સમઘડી અને વિષમઘડી ગોઠવણી અલગ પડે તો n ભિન્ન વસ્તુઓને વર્તુળ પર ગોઠવવાના પ્રકારોની સંખ્યા $(n-1)!$ થાય અને સમઘડી અને વિષમઘડી ગોઠવણી અલગ ન પડે તો ગોઠવવાના પ્રકારોની સંખ્યા $\dfrac{(n-1)!}{2}$ થાય.

સંચય

n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓ પસંદ કરવાના દરેક પ્રકારને સંચય કહેવાય.

સંચયોની કુલ સંખ્યા $= \binom{n}{r} = {}_nC_r = C(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} \qquad 0 \le r \le n$

$= \dfrac{{}_nP_r}{r!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} \qquad 0 \le r \le n$

- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{s} \Rightarrow r = s$ અથવા $r + s = n$
- જો ગણ A માં n ઘટકો હોય, તો A ના r ઘટકોવાળા ઉપગણોની સંખ્યા $\binom{n}{r}$ થાય.
- $\binom{n}{r}$ ની મહત્તમ કિંમતો :

(1) જો n યુગ્મ હોય, તો $\binom{n}{r}$ ની મહત્તમ કિંમત $= \binom{n}{\frac{n}{2}}$

(2) જો n અયુગ્મ હોય, તો $\binom{n}{r}$ ની મહત્તમ કિંમત $= \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$

- $r = 0$ થી $r = \left[\frac{n}{2}\right]$ સુધી જેમ r વધે તેમ $\binom{n}{r}$ નું મૂલ્ય વધે છે.
- $r = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ થી $r = n$ સુધી જેમ r વધે તેમ $\binom{n}{r}$ ની કિંમતો ઘટે છે.

  જ્યાં $[x] = x$ થી મોટો નહિ તેવો મોટામાં મોટો પૂર્ણાંક
- $\binom{n}{r} = k,\ k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ થાય તેવી r ની વધુમાં વધુ બે કિંમતો મળે.
- $n\,!$ ના અવિભાજ્ય અવયીવકરણમાં અવિભાજ્ય સંખ્યા p નો મહત્તમ ઘાતાંક $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$ છે.
- જો $n\,(\mathrm{A}) = k$ તો A ના તમામ ઉપગણોની સંખ્યા $= \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k} = 2^k$
- જો $n\,(\mathrm{A}) = k$ તો A ના m ઘટકોવાળા ઉપગણોની સંખ્યા $= \binom{k}{m}$
- $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$

- n બાજુવાળા બહિર્મુખ બહુકોણના વિકર્ણોની સંખ્યા $= \binom{n}{2} - n \quad (n \geq 3)$
- સમતલમાં આવેલાં n ભિન્ન બિંદુઓ પૈકી કોઈપણ ત્રણ સમરેખ ન હોય, તો આ બિંદુઓને શિરોબિંદુ તરીકે લઈને $\binom{n}{3}$ જેટલા ત્રિકોણ દોરી શકાય.
- સમતલમાં આવેલાં n ભિન્ન બિંદુઓની મદદથી $\binom{n}{2}$ જેટલા રેખાખંડ રચી શકાય.
- n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી m ચોક્કસ વસ્તુઓ આવે જ તે રીતે r વસ્તુઓને r સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકાર = ${}_nC_m \times {}_{(n-m)}\mathrm{C}_{(r-m)} \times r\,!\ (m < r \leq n)$
- n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી m ચોક્કસ વસ્તુઓ ન જ આવે તે રીતે r વસ્તુઓને r સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકાર = ${}_{(n-m)}\mathrm{P}_r = {}_{(n-m)}\mathrm{C}_r \times r\,! \qquad (m < r \leq n)$
- n ભિન્ન વસ્તુઓને n સ્થાનમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકાર $= {}_n\mathrm{P}_n = n!$
- n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી m ચોક્કસ વસ્તુઓ આવે જ તે રીતે r વસ્તુઓ પસંદ કરવાના

  કુલ પ્રકાર $= \binom{m}{m}\binom{n-m}{r-m} = \binom{n-m}{r-m} \quad (m < r \leq n)$
- n સમાન (એકરૂપ) વસ્તુઓમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુ પસંદ કરવાના પ્રકાર $= n$
- n સમાન (એકરૂપ) વસ્તુઓમાંથી વધુમાં વધુ n વસ્તુ પસંદ કરવાના પ્રકાર $= n + 1$
- એક પ્રકારની m સમાન વસ્તુઓ, બીજા પ્રકારની n સમાન વસ્તુઓ અને ત્રીજા પ્રકારની p સમાન વસ્તુઓમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુ પસંદ કરવાના કુલ પ્રકાર $= (m + 1)(n + 1)(p + 1) - 1$
- એક પ્રકારની m સમાન વસ્તુઓનું જૂથ, બીજા પ્રકારની n સમાન વસ્તુઓનું જૂથ તથા ત્રીજા પ્રકારની p સમાન વસ્તુઓના જૂથ પૈકી દરેક જૂથમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુ પસંદ કરવાના પ્રકાર $= m\,n\,p$
- n ભિન્ન વસ્તુઓ અને m સમાન (એકરૂપ) વસ્તુઓના જૂથમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુ પસંદ કરવાના પ્રકાર $= 2^n (m + 1) - 1$
- n ભિન્ન વસ્તુઓની n સ્થાનમાં ગોઠવણી કરતાં બધી જ વસ્તુઓ ખોટા સ્થાને આવે તેવી ગોઠવણીના કુલ પ્રકાર $= {}_n\mathrm{P}_n - {}_n\mathrm{P}_{n-1} + {}_n\mathrm{P}_{n-2} - {}_n\mathrm{P}_{n-3} + \ldots + (-1)^n\, {}_n\mathrm{P}_0$
- અંકો $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ માંથી m અંકોનો પુનરાવર્તન સિવાય ઉપયોગ કરીને બનાવી શકાતી બધી જ સંખ્યાઓનો સરવાળો

  $= {}_{(n-1)}\mathrm{P}_{(m-1)} \times (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$ (111 ... 1 m વખત)
- અંકો $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ માંથી m અંકોનો પુનરાવર્તન સહિત ઉપયોગ કરીને બનાવી શકાતી બધી જ સંખ્યાઓનો સરવાળો $= n^{m-1} \times (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$ (111 ... 1 m વખત)
- જો સમાન વસ્તુઓની સંખ્યા p હોય તથા ભિન્ન વસ્તુઓની સંખ્યા $n - p$ હોય, તો n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓ પસંદ કરવાના કુલ પ્રકાર

$$= \begin{cases} \binom{n-p}{r} + \binom{n-p}{r-1} + \binom{n-p}{r-2} + \ldots + \binom{n-p}{0} & (\text{જો } r \leq p) \\ \binom{n-p}{r} + \binom{n-p}{r-1} + \binom{n-p}{r-2} + \ldots + \binom{n-p}{r-p} & (\text{જો } r > p) \end{cases}$$

- n ભિન્ન વસ્તુઓનું p વસ્તુઓના l જૂથ અને q વસ્તુઓના m જૂથમાં $\frac{n!}{(p!)^l (q!)^m l! m!}$ રીતે વિભાજન કરી શકાય

  જ્યાં $lp + mq = n$

- n ભિન્ન વસ્તુઓને p વસ્તુઓના l જૂથ અને q વસ્તુઓના m જૂથમાં વિભાજન કરીને $(l + m)$ જૂથને ગોઠવવાના

  કુલ પ્રકાર $= \frac{n!(l+m)!}{(p!)^l (q!)^m l! m!}$ જ્યાં $lp + mq = n$

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) $\binom{43}{4} + \sum_{r=1}^{5}\binom{48-r}{3} = ...$

(A) $\binom{48}{3}$ (B) $\binom{48}{4}$ (C) $\binom{47}{4}$ (D) $\binom{48}{5}$

ઉકેલ : $\binom{43}{4} + \sum_{r=1}^{5}\binom{48-r}{3}$

$= \binom{43}{4} + \binom{47}{3} + \binom{46}{3} + \binom{45}{3} + \binom{44}{3} + \binom{43}{3}$

$= \binom{43}{4} + \binom{43}{3} + \binom{44}{3} + \binom{45}{3} + \binom{46}{3} + \binom{47}{3}$

$= \binom{44}{4} + \binom{44}{3} + \binom{45}{3} + \binom{46}{3} + \binom{47}{3}$

$= \binom{45}{4} + \binom{45}{3} + \binom{46}{3} + \binom{47}{3}$

$= \binom{46}{4} + \binom{46}{3} + \binom{47}{3} = \binom{47}{4} + \binom{47}{3} = \binom{48}{4}$ **જવાબ :** (B)

(2) જો $m = \sum_{r=0}^{100}\frac{1}{\binom{100}{r}}$, તો $\sum_{r=0}^{100}\frac{r}{\binom{100}{r}} = ...$

(A) 50 m (B) 100 m (C) 99 m (D) 200 m

ઉકેલ : ધારો કે $I = \sum_{r=0}^{100}\frac{r}{\binom{100}{r}}$

$$= \frac{0}{\binom{100}{0}} + \frac{1}{\binom{100}{1}} + \frac{2}{\binom{100}{2}} + \frac{3}{\binom{100}{3}} + ... + \frac{100}{\binom{100}{100}} \quad (1)$$

$$= \frac{100}{\binom{100}{100}} + \frac{99}{\binom{100}{99}} + \frac{98}{\binom{100}{98}} + \frac{97}{\binom{100}{97}} + ... + \frac{0}{\binom{100}{0}}$$

$$\therefore \quad I = \frac{100}{\binom{100}{0}} + \frac{99}{\binom{100}{1}} + \frac{98}{\binom{100}{2}} + \frac{97}{\binom{100}{3}} + \dots + \frac{0}{\binom{100}{100}} \qquad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \dots (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$

$$2I = \frac{100}{\binom{100}{0}} + \frac{100}{\binom{100}{1}} + \frac{100}{\binom{100}{2}} + \frac{100}{\binom{100}{3}} + \dots + \frac{100}{\binom{100}{100}}$$

$$= 100\left[\frac{1}{\binom{100}{0}} + \frac{1}{\binom{100}{1}} + \frac{1}{\binom{100}{2}} + \frac{1}{\binom{100}{3}} + \dots + \frac{1}{\binom{100}{100}}\right]$$

$$= 100 \sum_{r=0}^{100} \frac{1}{\binom{100}{r}}$$

$$= 100\, m$$

$\therefore I = 50\, m$ **જવાબ :** (A)

(3) 50 વ્યક્તિઓમાંથી 4 ચોક્કસ વ્યક્તિઓ આવે જ, તે રીતે 30 વ્યક્તિઓની પસંદગી કુલ કેટલી રીતે કરી શકાય ?

(A) $\binom{46}{26}$ (B) $\binom{46}{30}$ (C) ${}_{46}P_{26}$ (D) $4\binom{46}{26}$

ઉકેલ : અહીં 4 ચોક્કસ વ્યક્તિઓમાંથી 4 વ્યક્તિઓ પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = $\binom{4}{4} = 1$

બાકીની 46 વ્યક્તિઓમાંથી 26 વ્યક્તિઓ પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = $\binom{46}{26}$

તેથી પસંદગીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = $1 \times \binom{46}{26} = \binom{46}{26}$ **જવાબ :** (A)

(4) MONDAY શબ્દના અક્ષરોની મદદથી Y ન આવે તે રીતે ચાર અક્ષરના કુલ કેટલા શબ્દો બને ?

(A) 119 (B) 24 (C) 5 (D) 120

ઉકેલ : અહીં $n = 6 \quad m = 1 \quad r = 4$

(6 અક્ષરોમાંથી Y સિવાયના 5 અક્ષર 4 સ્થાનમાં ગોઠવવા છે.)

શબ્દોની સંખ્યા = ${}_{(n-m)}P_r = {}_5P_4 = 120$ **જવાબ :** (D)

(5) 100 વ્યક્તિઓમાંથી 20 ચોક્કસ વ્યક્તિઓ આવે જ તે રીતે 30 વ્યક્તિઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

(A) $\binom{80}{10}30!$ (B) $\binom{100}{20}\binom{80}{10}30!$ (C) $20 \times {}_{80}P_{10}$ (D) ${}_{80}P_{10} \times 30!$

ઉકેલ : ગોઠવણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = $\binom{20}{20}\binom{80}{10} \cdot 30! = \binom{80}{10} \cdot 30!$ **જવાબ :** (A)

(6) n વ્યક્તિઓમાંથી 5 ચોક્કસ વ્યક્તિઓ ન આવે, તે રીતે 80 વ્યક્તિઓને વર્તુળાકાર ટેબલ પર કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

(A) $\binom{n-5}{80}$ 80! (B) ${}_{(n-5)}P_{80}$ (C) $\frac{1}{2}\binom{n-5}{80}$ 79 ! (D) $\binom{n-5}{n-85}$ 79 !

ઉકેલ : અહીં $n - 5$ વ્યક્તિઓમાંથી 80 વ્યક્તિઓને પસંદ કરીને વર્તુળાકાર ટેબલ પર ગોઠવવાના

કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{n-5}{80}(80-1)! = \binom{n-5}{n-85}\, 79!$ **જવાબ :** (D)

(7) $m + n + p$ વસ્તુઓમાંથી m, n અને p વસ્તુઓને ત્રણ ખાનામાં કુલ ...... રીતે મૂકી શકાય ?

(A) $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}\times 3$ (B) $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}\times\frac{1}{6}$ (C) $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$ (D) $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}\times 3!$

ઉકેલ : કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{m+n+p}{m}\times\binom{n+p}{n}\times\binom{p}{p}\times 3!$

$$= \frac{(m+n+p)!}{(n+p)!m!}\times\frac{(n+p)!}{p!n!}\times\frac{p!}{0!p!}\times 3! = \frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}\times 3!$$ **જવાબ :** (D)

(8) કુલ $m + n + p$ વસ્તુઓનું m વસ્તુઓ, n વસ્તુઓ અને p વસ્તુઓના ત્રણ ભાગમાં વિભાજન કેટલી રીતે કરી શકાય ?

(A) $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}\times 3$ (B) $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}\times\frac{1}{6}$ (C) $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$ (D) $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}\times 3!$

ઉકેલ : કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{m+n+p}{m}\times\binom{n+p}{n}\times\binom{p}{p}$

$$= \frac{(m+n+p)!}{(n+p)!m!}\times\frac{(n+p)!}{p!n!}\times 1 = \frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$$ **જવાબ :** (C)

(9) mn ભિન્ન વસ્તુઓનું n સમાન ભાગમાં ...... રીતે વિભાજન કરી શકાય.

(A) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}\times n!$ (B) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}\times\frac{1}{n}$ (C) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}\times\frac{1}{n!}$ (D) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}$

ઉકેલ : અહીં દરેક ભાગમાં $\frac{mn}{n} = m$ વસ્તુઓ આવે.

વિભાજનના પ્રકારની સંખ્યા $= \dfrac{\binom{mn}{m}\binom{mn-m}{m}\cdots\binom{m}{m}}{n!}$

$$= \frac{\frac{(mn)!}{m!(mn-m)!}\times\frac{(mn-m)!}{m!(mn-2m)!}\cdots\frac{m!}{m!\ 0!}}{n!} = \frac{(mn)!}{(m!)^n}\times\frac{1}{n!}$$ **જવાબ :** (C)

(10) mn ભિન્ન વસ્તુઓ n વ્યક્તિઓને સમાન ભાગે ...... રીતે વહેંચી શકાય.

(A) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}\times n!$ (B) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}$ (C) $\frac{(mn)!}{n!\,(m!)^n}$ (D) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}\times n!$

ઉકેલ : દરેકને $\frac{mn}{n} = m$ વસ્તુઓ મળે.

∴ વહેંચણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા

$$= \binom{mn}{m}\binom{mn-m}{m}\dots\binom{m}{m}\frac{1}{n!}\times n!$$

$$= \frac{(mn)!}{m!(mn-m)!}\times\frac{(mn-m)!}{m!(mn-2m)!}\times\dots\times\frac{m!}{0!\,m!} = \frac{(mn)!}{(m!)^n}$$

જવાબ : (B)

(11) અયુગ્મ અંક યુગ્મ સ્થાને આવે તે રીતે સંખ્યા 221177666 ના અંકોની ફેરબદલી કરીને નવ અંકોની કુલ કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

(A) 16 (B) 54 (C) 60 (D) 90

ઉકેલ : અયુગ્મ અંક 1, 1, 7, 7 ને 4 યુગ્મ સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકારની સંખ્યા $= \frac{4!}{2!2!} = 6$

યુગ્મ અંક 2, 2, 6, 6, 6 ને બાકીનાં 5 સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકારની સંખ્યા $= \frac{5!}{2!\times3!} = \frac{120}{12} = 10$

પ્રકારની કુલ સંખ્યા $= 6 \times 10 = 60$

જવાબ : (C)

(12) 6! + 7! + 8! + ... + 100! નો દશકનો અંક ...... છે.

(A) 4 (B) 6 (C) 2 (D) 8

ઉકેલ : 10 ! + 11 ! + 12 ! + ... + 100 ! નો દશકનો અંક 0 થાય.

6 ! = 720, 7 ! = 5040, 8 ! = 40320, 9 ! = 362880

∴ 6! + 7! + 8! + 9! = 408960

∴ આપેલ સંખ્યાનો દશકનો અંક = 6

જવાબ : (B)

(13) MONDAY શબ્દના બધા જ અક્ષરોની મદદથી બનતા બધા જ (છ અક્ષરોના) શબ્દોને શબ્દકોશ પ્રમાણે ગોઠવતાં આ શબ્દનું સ્થાન ...... ક્રમે આવે. (પુનરાવર્તન સિવાય)

(A) 326 (B) 303 (C) 327 (D) 300

ઉકેલ :

2	3	2	1	0	0
M	O	N	D	A	Y
5!	4!	3!	2!	1!	0!

આ શબ્દનો ક્રમ $= 2\times5! + 3\times4! + 2\times3! + 1\times2! + 0\times1! + 0\times0! + 1$

$= 240 + 72 + 12 + 2 + 1 = 327$

જવાબ : (C)

સમજૂતી : પ્રથમ M O N D A Y લખો.

M ની જમણી બાજુએ આવેલા અક્ષરોમાંથી બે અક્ષરો A અને D એ M ની પહેલાં આવે છે માટે M ની ઉપર 2 લખો.

O ની જમણી બાજુએ આવેલા અક્ષરોમાંથી 3 અક્ષરો A, D, N એ O ની પહેલાં આવે છે માટે O ની ઉપર 3 લખો.

N ની જમણી બાજુએ આવેલા અક્ષરોમાંથી 2 અક્ષરો D, A, એ N ની પહેલાં આવે છે માટે N ની ઉપર 2 લખો.

આ જ રીતે D, A, Y ની ઉપર અનુક્રમે 1, 0, 0 લખો. ત્રીજી હારમાં જમણી બાજુથી શરૂ કરીને 0! 1! 2! ... 5! લખો.

પહેલી અને ત્રીજી હારના અનુરૂપ ઘટકોનો ગુણાકાર કરીને સરવાળો કરો તેમાં 1 ઉમેરતાં આપેલ શબ્દનો ક્રમ મળે.

બધા જ અક્ષરો ભિન્ન હોય તો જ આ રીતનો ઉપયોગ થઈ શકે.

બીજી રીત : M O N D A Y ને ક્રમમાં ગોઠવતાં A, D. M, N, O, Y

સૌપ્રથમ A થી શરૂ થતા 5! = 120 શબ્દ બને. પછી, D થી શરૂ થતા 5! = 120 શબ્દ બને.

પછી, M જરૂરી છે. હવે MA થી શરૂ થતા 4! = 24 શબ્દ બને. MD થી શરૂ થતા 4! = 24 શબ્દ બને.

MN થી શરૂ થતા 4! = 24 શબ્દ બને. હવે O આવશે. MO વાળા શબ્દો લો.

MOA થી શરુ થતા 3! = 6 શબ્દ બને. પછી, MOD થી શરુ થતા 3! = 6 શબ્દ બને.

M O N બનશે. MONA થી શરુ થતા 2! = 2 શબ્દ. હવે એમ MONDAY બનશે.

માટે MONDAY 120 + 120 + 24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 MONDAY એમ પહેલા 326 શબ્દ બને.

MONDAY નો ક્રમ 327મો મળે.

(14) MATHEMATICS શબ્દના અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને ચાર અક્ષરોના કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

(A) 1680 (B) 18 (C) 756 (D) 2454

ઉકેલ : અહીં M, M, T, T, A, A, H, E, I, C, S એમ 11 અક્ષરો છે.

(1) આઠ ભિન્ન અક્ષરો M T A H E I C S થી

બનતા ચાર અક્ષરના શબ્દોની સંખ્યા = $_8P_4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$

(2) બે સમાન અને બે ભિન્ન અક્ષરોથી બનતા ચાર અક્ષરના શબ્દોની સંખ્યા

$= \binom{3}{1}\binom{7}{2} \times \frac{4!}{2!}$ (3 માંથી એક જોડ અને બે ભિન્ન અક્ષર લેતાં)

$= 3 \times 21 \times 12 = 756$

(3) બે સમાન અક્ષરોની બે જોડથી બનતા ચાર અક્ષરના શબ્દોની સંખ્યા

$= \binom{3}{2}\frac{4!}{2!\,2!} = 3 \times 6 = 18$

$\therefore$ ચાર અક્ષરોના કુલ શબ્દોની સંખ્યા = 1680 + 756 + 18 = 2454 **જવાબ :** (D)

(15) 0, 1, 2, 3, 4, 5 નો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરીને 5 આંકડાની 3 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ કેટલી બને ?

(A) 96 (B) 600 (C) 120 (D) 216

ઉકેલ : જે સંખ્યાના બધા જ અંકોનો સરવાળો 3 વડે વિભાજ્ય હોય, તે સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય થાય.

અહીં આપેલ બધા જ અંકોનો સરવાળો 15 છે. માટે છ અક્ષરોમાંથી સરવાળો 15 થાય તેવા 5 અક્ષરો 1 2 3 4 5 અને સરવાળો 12 થાય તેવા પાંચ અક્ષરો 0, 1, 2, 4, 5 નો ઉપયોગ કરીને સંખ્યાઓ બનાવવી પડે. કારણ કે સરવાળો 12 થી ઓછો કે 15 થી વધુ થાય તેવા પાંચ અંકો મળે નહિ.

$\therefore$ 1, 2, 3, 4, 5 ની મદદથી બનતી પાંચ અંકોની 3 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 5\,! = 120$

તથા 0, 1, 2, 4, 5 વડે બનતી પાંચ અંકોની 3 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 4 \times 4! = 96$

આમ કુલ સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 120 + 96 = 216$ **જવાબ :** (D)

(16) Δ ABC માટે $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ પર અનુક્રમે 2, 3 અને 5 બિંદુઓ આવેલાં છે. આ બિંદુઓને શિરોબિંદુઓ તરીકે લઈ કુલ કેટલા ત્રિકોણ રચી શકાય ?

(A) 109 (B) 120 (C) 107 (D) 99

ઉકેલ : કુલ 10 બિંદુઓ છે. ત્રિકોણ રચવા માટે ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ પસંદ કરવા પડે.

$\therefore$ ત્રિકોણની સંખ્યા $= \binom{10}{3} - \binom{3}{3} - \binom{5}{3} = 120 - 1 - 10 = 109$ **જવાબ :** (A)

(17) Δ ABC માટે $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ પર અનુક્રમે 2, 3 અને 5 બિંદુઓ આવેલાં છે. આ બિંદુઓની મદદથી કેટલી રેખાઓ મળે ?

(A) 32 (B) 45 (C) 34 (D) 33

ઉકેલ : બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી અનન્ય રેખા પસાર થાય છે. કુલ 10 બિંદુઓ છે.

$\therefore$ રેખાઓની સંખ્યા $= \binom{10}{2} - \binom{3}{2} - \binom{5}{2} + 2$

$= \frac{10 \times 9}{2} - 3 - 10 + 2 = 34$ **જવાબ :** (C)

(18) જો $\binom{189}{35} + \binom{189}{r} = \binom{190}{r}$ તો $r = ...$

(A) 36 અથવા 154 (B) 35 અથવા 155 (C) 36 અથવા 155 (D) 36 અથવા 153

ઉકેલ : અહીં $\binom{189}{35} + \binom{189}{r} = \binom{190}{r} = \binom{189}{r-1} + \binom{189}{r}$

$\therefore \binom{189}{35} = \binom{189}{r-1}$

$\therefore 35 = r - 1$ અથવા $35 + r - 1 = 189$

$\therefore r = 36$ અથવા $r = 155$ **જવાબ :** (C)

(19) જો n (A) $= m$ અને n (B) $= 2$ તો A થી B પરનાં કેટલાં વ્યાપ્ત વિધેયો મળે ?

(A) $m^2 - 2$ (B) ${}_mP_2$ (C) $2^m - 2$ (D) $2^m - 1$

ઉકેલ : A થી B પરનાં કુલ વિધેયોની સંખ્યા = 2^m

A થી B પરનાં અવ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા = 2

$\therefore$ A થી B પરનાં વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા = કુલ વિધેયોની સંખ્યા – અવ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા

$= 2^m - 2$ **જવાબ :** (C)

(20) જો $A = \{a, b, c, d\}$ અને $B = \{1, 2, 3\}$ તો A થી B પરનાં કેટલાં વ્યાપ્ત વિધેયો મળે ?

(A) 45 (B) 36 (C) 33 (D) 24

ઉકેલ : A થી B પરનાં કુલ વિધેયોની સંખ્યા = $3^4 = 81$

વિસ્તારમાં એક જ ઘટક હોય તેવાં અવ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા = 3

તથા વિસ્તારમાં બે ઘટકો હોય તેવાં અવ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા = $\binom{3}{2}\left(2^4 - 2\right) = 3 \times 14 = 42$

$\therefore$ અવ્યાપ્ત વિધેયોની કુલ સંખ્યા = $3 + 42 = 45$

$\therefore$ વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા = $81 - 45 = 36$ **જવાબ :** (B)

નોંધ : જો $n(A) = m$ અને $n(B) = n$ હોય તો A થી B પરનાં વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા

$$= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^m$$

$$= (-1)^0 \binom{3}{0} (3)^4 + (-1)^1 \binom{3}{1} (2)^4 + (-1)^2 \binom{3}{2}$$

$$= 81 - 48 + 3 = 36$$

(21) 4 છોકરા અને 4 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી એક જ જાતિની બે વ્યક્તિ પાસ પાસે ન આવે ?

(A) 1152 (B) 576 (C) 2880 (D) 2304

ઉકેલ : B G B G B G B G

અથવા

G B G B G B G B

અહીં બે શક્યતાઓ છે. શરૂઆત છોકરાથી થાય અથવા છોકરીથી થાય.

ચાર સ્થાનમાં 4 છોકરા અને 4 સ્થાનમાં 4 છોકરીઓ ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = $4! \times 4!$

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = $2 \times 4! \times 4! = 2 \times 24 \times 24 = 1152$ **જવાબ :** (A)

(22) જો $A = \{1, 2, 3 ... n\}$ તો A પર વ્યાખ્યાયિત સમક્રમી દ્વિક્ક્રિયાઓની સંખ્યા ...... છે.

(A) $n^{\left(\frac{n^2}{2}\right)}$ (B) $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (C) $\frac{n^{n^2}}{2}$ (D) $n^{\Sigma n}$

ઉકેલ : અહીં દરેક $x, y \in A$ માટે $x * y = y * x$

જ્યાં $*$ એ $A \times A$ થી A પરનું વિધેય છે.

દરેક $(x, y) \in A \times A$ માટે $x * y$ નું મૂલ્ય n રીતે નક્કી કરી શકાય.

તેથી $1 * 1$ નું મૂલ્ય નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = n

$2 * 1 = 1 * 2$ અને $2 * 2$ નું મૂલ્ય નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = $n \cdot n = n^2$

$3 * 1 = 1 * 3$, $3 * 2 = 2 * 3$ અને $3 * 3$ નું મૂલ્ય નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = $n \cdot n \cdot n = n^3$

આ જ રીતે, $n * 1 = 1 * n, n * 2 = 2 * n, ...n \times n$ નું મૂલ્ય નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = n^n

∴ સમક્રમી દ્વિક્રિયાઓની સંખ્યા

$= n \times n^2 \times n^3 \times ... \times n^n = n^{1+2+3+...+n} = {}_n\Sigma^n$ **જવાબ :** (D)

(23) 3, 4, 5, 6, 8 અંકોનો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરીને બનતી પાંચ અંકોની બધી જ સંખ્યાઓના દશકના અંકોનો સરવાળો ...... છે.

(A) 6240 (B) 624 (C) 3120 (D) 156

ઉકેલ : દશકના અંકોનો સરવાળો = એકમના અંકોનો સરવાળો

$= (n - 1)! \times$ બધા જ અંકોનો સરવાળો

$= (5 - 1)! \times (3 + 4 + 5 + 6 + 8)$

$= 24 \times 26$

$= 624$

એકમનો અંક નિશ્ચિત હોય તેવી સંખ્યાની સંખ્યા = 4!

તેમના એકમના અંકોનો સરવાળો = $24 \times 26 = 624$ **જવાબ :** (B)

(24) 1 થી 9 સુધીના અંકોની મદદથી પુનરાવર્તન સિવાય બનતી 4 અંકોની બધી જ સંખ્યાઓના એકમના અંકોનો સરવાળો ...... છે.

(A) 10,800 (B) 12,700 (C) 15,120 (D) 50,400

ઉકેલ : માંગેલ સરવાળો

$= {}_{(n-1)}P_{(m-1)}$ (બધા જ અંકોનો સરવાળો) (1)

$= {}_{(9-1)}P_{(4-1)} (1 + 2 + ... + 9)$ $(n = 9, m = 4)$

$= {}_8P_3 (45) = 8 \times 7 \times 6 \times 45 = 15,120$ **જવાબ :** (C)

(25) સંખ્યા 2354768 ના અંકોની ફેરબદલી કરીને બનતી પાંચ અંકોની બધી જ સંખ્યાઓનો સરવાળો ...... થાય.

(A) 9333240 (B) 279997200 (C) 5833275 (D) 139998600

ઉકેલ : n = કુલ અંકોની સંખ્યા = 7, $m = 5$

માંગેલ સરવાળો = ${}_{(n-1)}P_{(m-1)}$ (બધા જ અંકોનો સરવાળો) (11111)

$= {}_6P_4 \times (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) (11111)$

$= 360 \times 35 \times 11111 = 139998600$ **જવાબ :** (D)

(26) સંખ્યા 23456ના બધા જ અંકોનો પુનરાવર્તન સહિત ઉપયોગ કરીને બનાવી શકાતી ચાર અંકોની બધી જ સંખ્યાઓનો સરવાળો ...... થશે.

(A) 2777500 (B) 53328 (C) 3777500 (D) 277500

ઉકેલ : અહીં $n = 5, m = 4$

માંગેલ સરવાળો = $n^{m-1} \times$ (બધા જ અંકોનો સરવાળો) (1111)

$= 5^{4-1} \times (2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times (1111) = 125 \times 20 \times 1111 = 2777500$ **જવાબ :** (A)

(27) સંખ્યા 123456 ના બધા જ અંકોનો પુનરાવર્તન સહિત ઉપયોગ કરીને બનાવી શકાતી ચાર અંકોની બધી જ સંખ્યાઓના શતક અને એકમના અંકોનો સરવાળો ...... થાય.

(A) 8712 (B) 9072 (C) 252 (D) 90720

ઉકેલ : અહીં $n = 6$, $m = 4$

એકમના અંકોનો સરવાળો અને શતકના અંકોનો સરવાળો સમાન જ થાય.

$\therefore$ માંગેલ સરવાળો $= 2 \times n^{m-1} \times (1+2+3+4+5+6)$ (1)

$= 2 \times 6^{4-1} \times (21) = 9072$ **જવાબ :** (B)

(28) સંખ્યા 12304ના અંકોનો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરીને બનાવી શકાતી બે અંકોની બધી જ સંખ્યાઓનો સરવાળો ...... થાય.

(A) 700 (B) 430 (C) 200 (D) 2200

ઉકેલ : અહીં એકમના સ્થાનમાં 0 આવે તેવી ચાર અને શૂન્યેતર અંક આવે તેવી ત્રણ સંખ્યાઓ મળે કારણ કે દશકના સ્થાનમાં 0 આવી શકે નહિ.

$\therefore$ બે અંકની બધી જ સંખ્યાઓના એકમના અંકોનો સરવાળો $= 0 \times 4 + 3 \times (1+2+3+4)$

$= 3 \times 10 = 30$

તથા બે અંકની બધી જ સંખ્યાઓના દશકના અંકોનો સરવાળો $= 4 \times (1+2+3+4)$

$= 4 \times 10 = 40$

$\therefore$ માંગેલ સરવાળો = એકમના અંકોનો સરવાળો × 1 + દશકના અંકોનો સરવાળો × 10

$= 30 + 40 \times 10 = 30 + 400 = 430$ **જવાબ :** (B)

(29) 6^k એ 100! નો અવયવ થાય તેવી k ની મહત્તમ પૂર્ણાંક કિંમત ...... છે.

(A) 48 (B) 97 (C) 47 (D) 46

ઉકેલ : 100 ! માં 2 નો મહત્તમ ઘાતાંક $= \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{8}\right] + \left[\frac{100}{16}\right] + \left[\frac{100}{32}\right] + \left[\frac{100}{64}\right] + \left[\frac{100}{128}\right]$

$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 0 = 97$ તથા

100 ! માં 3 નો મહત્તમ ઘાતાંક $= \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{9}\right] + \left[\frac{100}{27}\right] + \left[\frac{100}{81}\right] = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$

$\therefore 100! = 2^{97} \times 3^{48} \times k$ જ્યાં $k \neq 2n, k \neq 3n, n \in N$

$= (2 \times 3)^{48} \times 2^{49} \times k$

$= 6^{48} \times 2^{49}k$

$\therefore$ 6 નો મહત્તમ ઘાતાંક = 48 **જવાબ :** (A)

નોંધ : અહીં 6 નો મહત્તમ ઘાતાંક = 3 નો મહત્તમ ઘાતાંક તેથી 2 નો મહત્તમ ઘાતાંક શોધવાની જરૂર નથી.

(30) ${}_{100}P_7 + 7 \times {}_{100}P_6 =$ ......

(A) ${}_{100}P_7$ (B) ${}_{101}C_7$ (C) ${}_{100}P_8$ (D) ${}_{101}P_7$

ઉકેલ : ${}_{100}P_7 + 7 \times {}_{100}P_6 = \frac{100!}{93!} + 7 \times \frac{100!}{94!}$

$= \frac{100!}{93!}\left(1+\frac{7}{94}\right) = \frac{100!}{93!} \times \frac{101}{94} = \frac{101!}{94!} = {}_{101}P_7$ **જવાબ :** (D)

(31) એક સરકસમાં 10 પ્રાણીઓને રાખવા માટે 10 પાંજરાં છે. 3 પાંજરાં એટલાં નાનાં છે કે જેમાં 10 પૈકી 6 પ્રાણી આવી શકે નહિ. તો દરેક પાંજરામાં એક-એક પ્રાણી કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

(A) 30240 (B) 120960 (C) 168 (D) 5064

ઉકેલ : 7 પૈકી 6 મોટાં પાંજરામાં 6 મોટાં પ્રાણીઓને ગોઠવવાના પ્રકારની સંખ્યા = ${}_7P_6 = 7! = 7 \times 720 = 5040$

મોટા પાંજરામાં નાનું પ્રાણી આવી શકે.

$\therefore$ બાકીનાં 4 પાંજરામાં 4 પ્રાણીઓને ગોઠવવાના પ્રકારની સંખ્યા = $4! = 24$

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = $5040 \times 24 = 120960$ **જવાબ :** (B)

(32) બે B પાસપાસે ન આવે તે રીતે AAAA BB CCC DDD E F ને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

(A) $\frac{12!}{4!3!3!} \times \binom{13}{2}$ (B) $\frac{12!}{4!3!3!} \times {}_{13}P_2$ (C) $\frac{14!}{4!3!3!2!} - 2!$ (D) $\frac{12!}{4!3!3!} \times 13^2$

ઉકેલ : પ્રથમ B, B સિવાયના બાકીના 12 અક્ષરોને હારમાં ગોઠવવાના પ્રકાર = $\frac{12!}{4!3!3!}$

13 સ્થાનમાં બે B ને ગોઠવવાના પ્રકારની સંખ્યા = $\binom{13}{2}$

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = $\frac{12!}{4!3!3!} \times \binom{13}{2}$ **જવાબ :** (A)

(33) 0, 1 અને 2 ની મદદથી 4 અંકોની કુલ કેટલી અયુગ્મ સંખ્યાઓ બને ?

(A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 8

ઉકેલ : અયુગ્મ સંખ્યા બનાવવા માટે એકમના સ્થાનમાં 1 મૂકવો પડે.

$\therefore$ એકમનું સ્થાન નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 1

ચાર અંકની સંખ્યા બનાવવા માટે હજારના સ્થાનમાં 1 અથવા 2 મૂકી શકાય.

દશક અને શતકના સ્થાનમાં ત્રણમાંથી કોઈ પણ એક અંક આવી શકે.

$\therefore$ હજારનું સ્થાન નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 2

દશકનું સ્થાન નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 3

શતકનું સ્થાન નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 3

$\therefore$ ચાર અંકોની કુલ સંખ્યાઓ = $1 \times 2 \times 3 \times 3 = 18$ **જવાબ :** (B)

(34) પ્રથમ n અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર ...... છે.

(A) n^2 (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^n {}_{2n}P_n$ (C) $2^n \times {}_{2n}P_n$ (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{2n}{n}$

ઉકેલ : અહીં $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (2n-1) \times 2n}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n \times n!}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n {}_{2n}P_n$$

જવાબ : (B)

(35) સંખ્યા 35679 ના અંકોની ફેરબદલી કરીને 56000 કરતાં નાની પાંચ આંકડાની નવી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

(A) 30 (B) 28 (C) 143 (D) 29

ઉકેલ : અહીં 3 x x x x પ્રકારની સંખ્યા = $1 \times 4! = 24$

તથા 5 3 x x x પ્રકારની સંખ્યા = $1 \times 1 \times 3! = 6$

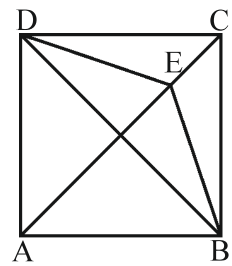
$\therefore$ 56000 કરતાં નાની સંખ્યાઓની સંખ્યા = $24 + 6 = 30$

$\therefore$ એક સંખ્યા 35679 આપેલી છે માટે નવી સંખ્યાઓ = $30 - 1 = 29$ **જવાબ :** (D)

(36) $\square^m$ABCD માં A – E – C અને B, E, D સમરેખ નથી. બિંદુઓ A, B, C, D, E ને આરંભ બિંદુ તરીકે લઈ કુલ ...... કિરણ દોરી શકાય.

(A) 14 (B) 16 (C) 20 (D) 18

ઉકેલ : બે ભિન્ન બિંદુની મદદથી બે કિરણ મળે.



આકૃતિ 5.1

અહીં $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$ તથા $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA}$

$\therefore$ કિરણની કુલ સંખ્યા $= 2\binom{5}{2} - 2$

$= 2(10) - 2$

$= 18$

નોંધ : $2\binom{5}{2}$ એટલા માટે કે $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ **જવાબ :** (D)

(37) ગણ {1, 2, 3, 4, ... n} ના 1 ને સમાવતા પરંતુ 2 ને ન સમાવતા ઓછામાં ઓછા 4 અને વધુમાં વધુ 5 ઘટકોવાળા ઉપગણોની સંખ્યા ...... છે. ($n \geq 6$)

(A) $\binom{n-1}{4}$ (B) $\binom{n-1}{5}$ (C) $\binom{n-2}{4} \times \binom{n-2}{3}$ (D) $\binom{n}{5}$

ઉકેલ : 4 ઘટકોવાળા ઉપગણોની સંખ્યા $= \binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{n-2}{3} = \binom{n-2}{3}$

5 ઘટકોવાળા ઉપગણોની સંખ્યા $= \binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{n-2}{4} = \binom{n-2}{4}$

$\therefore$ માંગેલ ઉપગણોની કુલ સંખ્યા $= \binom{n-2}{3} + \binom{n-2}{4} = \binom{n-1}{4}$ **જવાબ :** (A)

(38) જો $m = {}_nC_2$, તો ${}_mC_2 =$ ......

(A) $3 \times n + 1\ P_4$ (B) $\frac{1}{2} \times \binom{n+1}{4}$ (C) $3 \times \binom{n+1}{4}$ (D) $\frac{1}{8} \times \binom{n+1}{4}$

ઉકેલ : અહીં ${}_mC_2 = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\left\{\frac{n(n-1)}{2} - 1\right\}}{2}$

$$= \frac{n\ (n-1)(n^2-n-2)}{8}$$

$$= \frac{n\ (n-1)(n-2)(n+1)}{8}$$

$$= 3\ \frac{(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)}{24} = 3\binom{n+1}{4}$$ **જવાબ :** (C)

(39) અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય ત્રણ અંકોની યુગ્મ સંખ્યાઓ કેટલી બને ?

(A) 360 (B) 320 (C) 328 (D) 348

ઉકેલ : ત્રણ અંકોની કુલ સંખ્યાઓ $= 9 \times 9 \times 8 = 648$

$\therefore$ ત્રણ અંકોની અયુગ્મ સંખ્યાઓ $= 5 \times 8 \times 8 = 320$ (છેલ્લો અંક 1,3,5,7,9)

$\therefore$ ત્રણ અંકોની યુગ્મ સંખ્યાઓ = કુલ સંખ્યાઓ – અયુગ્મ સંખ્યાઓ $= 648 - 320 = 328$ **જવાબ :** (C)

(40) 1, 2 અને 3 ની મદદથી જેના અંકોનો સરવાળો 10 થાય તેવી 7 અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બને ?

(A) 42 (B) 77 (C) 35 (D) 90

ઉકેલ : 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3 વડે બનતી સંખ્યાઓની સંખ્યા $= \frac{7!}{5!} = \frac{7\times6\times5!}{5!} = 42$

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2 વડે બનતી સંખ્યાઓની સંખ્યા $= \frac{7!}{4!\times3!} = \frac{7\times6\times120}{24\times6} = 35$

કુલ સંખ્યાઓ $= 42 + 35 = 77$

નોંધ : 3 બે વખત લઈએ તો સરવાળો ન્યૂનતમ $3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 11$ થઈ જાય.

આથી 3 બે વખત ન લેવાય, 3 એક વખત લઈએ તો 2 બે વખત પણ ના લેવાય.

કારણ કે સરવાળો $3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 11$ થઈ જાય.

બે જ વિકલ્પ 1,1,1,1,1,2,3 અથવા 1,1,1,1,2,2,2 જ શક્ય છે. **જવાબ :** (B)

(41) ઓછામાં ઓછા એક અક્ષરનું પુનરાવર્તન થઈ શકે તે રીતે A, B, C, D, E અને F ની મદદથી 4 અક્ષરના કેટલા શબ્દો બની શકે ?

(A) 936 (B) 1296 (C) 360 (D) 1281

ઉકેલ : માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા = કુલ શબ્દોની સંખ્યા – એક પણ અક્ષરનું પુનરાવર્તન ન થાય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

$= 6^4 - {}_6P_4$

$= 1296 - 360 = 936$ **જવાબ :** (A)

(42) DAUGHTER શબ્દના બધા જ અક્ષરોને પુનરાવર્તન સિવાય ગોઠવતાં આઠ અક્ષરના કુલ કેટલા શબ્દો મળે કે જેમાં બધા જ સ્વરો વ્યંજનના સ્થાને આવે ?

(A) 720 (B) 3600 (C) 39600 (D) 7200

ઉકેલ : અહીં કુલ આઠ અક્ષરોમાં ત્રણ સ્વર A, U, E અને પાંચ વ્યંજન D, G, H, T, R છે.

ત્રણ સ્વરને પાંચ સ્થાનમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= {}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

બાકીના પાંચ અક્ષરોને પાંચ સ્થાનમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = 5 ! = 120

માંગેલ શબ્દોની કુલ સંખ્યા = $60 \times 120 = 7200$ **જવાબ :** (D)

(43) ENGLISH શબ્દના અક્ષરોની ફેરબદલી કરીને સાત અક્ષરના કેટલા શબ્દો બને કે જેથી સ્વર હંમેશાં અયુગ્મ સ્થાને જ આવે ?

(A) 1440 (B) 719 (C) 2880 (D) 132

ઉકેલ : અહીં કુલ સાત અક્ષર છે. જેમાં બે સ્વર E અને I છે.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

1 3 5 7

બે સ્વરને ચાર અયુગ્મ સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકાર = ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

બાકીના પાંચ અક્ષરોને પાંચ સ્થાનમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકાર = 5 ! = 120

માંગેલ શબ્દોની કુલ સંખ્યા = $12 \times 120 = 1440$ **જવાબ :** (A)

(44) SCHOOL શબ્દના અક્ષરોની ફેરબદલી કરીને બનાવી શકાતા છ અક્ષરોના બધા જ શબ્દોને શબ્દકોશ પ્રમાણે ગોઠવતાં SCHOOL શબ્દ ક્યા ક્રમે આવે ?

(A) 302 (B) 243 (C) 304 (D) 303

ઉકેલ : અહીં C H L O O S શબ્દકોશ પ્રમાણે આવશે.

C થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા = $1 \times \frac{5!}{2!} = 60$

H થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા = 60

L થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા = 60

O થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા = 5! = 120

SCHL થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા = $\frac{2!}{2} = 1$

SCHOL થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા = 1

SCHOOL પોતે = 1

માંગેલ ક્રમ = 60 + 60 + 60 + 120 + 1 +1 + 1 = 303 **જવાબ :** (D)

(45) $1 \cdot 1 ! + 2 \cdot 2 ! + 3 \cdot 3 ! + ... + 99 \cdot 99 ! = ...$

(A) 100! (B) 100 ! – 1 (C) 100 ! + 1 (D) 99 ! + 1

ઉકેલ : અહીં માંગેલ સરવાળો $= \sum_{r=1}^{99} r(r!)$

$$= \sum_{r=1}^{99} \{(r+1) - 1\} r!$$

$$= \sum_{r=1}^{99} \{(r+1)! - r!\}$$

$$= (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + ... + (100! - 99!)$$

$$= 100! - 1$$

જવાબ : (B)

(46) 42! એ ...... વડે વિભાજ્ય છે.

(A) 12^{20} (B) 12^{19} (C) 2^{40} (D) 3^{24}

ઉકેલ : 42! માં 2નો મહત્તમ ઘાતાંક $= \left[\frac{42}{2}\right] + \left[\frac{42}{4}\right] + \left[\frac{42}{8}\right] + \left[\frac{42}{16}\right] + \left[\frac{42}{32}\right]$

$= 21 + 10 + 5 + 2 + 1 = 39$

42! માં 3નો મહત્તમ ઘાતાંક $= \left[\frac{42}{3}\right] + \left[\frac{42}{9}\right] + \left[\frac{42}{27}\right]$

$= 14 + 4 + 1 = 19$

$\therefore 2^{39} \times 3^{19}$ એ 42! નો અવયવ છે.

$\therefore (2^2)^{19} \times 2 \times 3^{19}$ એ 42! નો અવયવ છે.

$\therefore (2 \times 2 \times 3)^{19} \times 2$ એ 42! નો અવયવ છે.

$\therefore$ 42! એ 12^{19} વડે વિભાજ્ય છે.

તથા $12^{20} = 2^{40} \times 3^{20}$ વડે 42! વિભાજ્ય નથી.

2^{40} અને 3^{24} વડે પણ 42! વિભાજ્ય નથી. **જવાબ** : (B)

(47) $\binom{2n}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+2}{2} + ... + \binom{2n+25}{25} =$ ......

(A) $\binom{2n+26}{25}$ (B) $\binom{2n+25}{26}$ (C) $\binom{2n+26}{26}$ (D) $\binom{2n+26}{2n-1}$

ઉકેલ : $\binom{2n}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+2}{2} + ... + \binom{2n+25}{25}$

$= \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+2}{2} + ... + \binom{2n+25}{25}$

$= \binom{2n+2}{1} + \binom{2n+2}{2} + ... + \binom{2n+25}{25}$

$= \binom{2n+3}{2} + \binom{2n+3}{3} + ... + \binom{2n+25}{25}$

= .....

= ....

$= \binom{2n+26}{25}$ **જવાબ** : (A)

(48) 7 રેખાઓ અને 5 વર્તુળ વધુમાં વધુ કેટલાં બિંદુઓમાં છેદે ?

(A) 70 (B) 111 (C) 35 (D) 66

ઉકેલ : બે રેખાઓ વધુમાં વધુ 1 બિંદુમાં છેદે. બે વર્તુળ વધુમાં વધુ બે બિંદુઓમાં છેદે તથા એક રેખા અને એક વર્તુળ વધુમાં વધુ બે બિંદુઓમાં છેદે.

$\therefore$ મહત્તમ છેદબિંદુઓની સંખ્યા

$= \binom{7}{2}(1) + \binom{5}{2}(2) + \binom{7}{1}\binom{5}{1}(2) = 21 + 20 + 70 = 111$ **જવાબ** : (B)

(49) અંકો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 ની મદદથી ત્રણ અંકોની 4 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી કુલ કેટલી સંખ્યાઓ મળે ?

(A) 36 (B) 48 (C) 54 (D) 32

ઉકેલ : અહીં બે અંકોની 4 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64 મળે.

$\therefore$ 4 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી ત્રણ અંકોની કુલ સંખ્યાઓ $= 9 \times 6 = 54$

અહીં એકનો એક અંક ફરીથી આવી શકે કારણ કે કુલ સંખ્યાઓ શોધવાની છે.

છેલ્લા બે અંકથી બનતી સંખ્યા 4 વડે વિભાજ્ય હોય, તો મૂળ સંખ્યા 4 વડે વિભાજિત હોય. **જવાબ :** (C)

(50) 1 થી 9 સુધીના અંકોનો પુનરાવર્તન સહિત ઉપયોગ કરીને વધુમાં વધુ 9 અંકોની કુલ કેટલી સંખ્યાઓ બને ?

(A) $\frac{1}{8}(3^{20} - 9)$ (B) $\sum_{r=1}^{9} {}^9C_r$ (C) $\frac{9^{10}-1}{8}$ (D) $\sum_{r=1}^{9} {}^9P_r$

ઉકેલ : એક અંકની સંખ્યાઓ = 9. બે અંકની સંખ્યાઓ $= 9 \times 9 = 9^2$

ત્રણ અંકની સંખ્યાઓ $= 9 \times 9 \times 9 = 9^3$

આ જ રીતે નવ અંકની સંખ્યાઓ $= 9^9$

$\therefore$ કુલ સંખ્યાઓ $= 9 + 9^2 + 9^3 + ... + 9^9$

$$= \frac{9(9^9-1)}{9-1} = \frac{1}{8}(9^{10} - 9) = \frac{1}{8}(3^{20} - 9)$$ **જવાબ :** (A)

(51) 200! ના અંતમાં ...... શૂન્યો છે.

(A) 48 (B) 50 (C) 51 (D) 49

ઉકેલ : n! ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં 2 નો મહત્તમ ઘાતાંક એ 5 ના મહત્તમ ઘાતાંક કરતાં મોટો અથવા બરાબર હોય

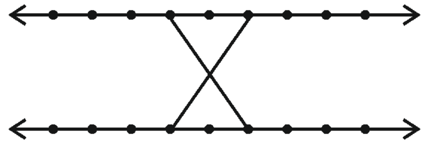
$\therefore$ 200! ના અંતમાં શૂન્યોની સંખ્યા = 200! માં 5 નો મહત્તમ ઘાતાંક

$$= \left[\frac{200}{5}\right] + \left[\frac{200}{25}\right] + \left[\frac{200}{125}\right] = 40 + 8 + 1 = 49$$ **જવાબ :** (D)

(52) બે સમાંતર રેખાઓ પૈકી દરેક રેખા પર 9 બિંદુઓ છે. બંને રેખા પરના દરેક બિંદુને અન્ય રેખા પરના બિંદુ સાથે રેખાખંડ વડે જોડવામાં આવે, તો આ રેખાખંડો n ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે છે. અહીં n ...... કરતાં મોટો ન હોય.

(A) 1296 (B) 1926 (C) 3060 (D) 5184

ઉકેલ : પહેલી રેખા પરનાં બે બિંદુઓની દરેક જોડ અને બીજી રેખા પરનાં બે બિંદુઓની દરેક જોડની મદદથી અનન્ય છેદ બિંદુ મળે.



આકૃતિ 5.2

$\therefore$ માંગેલ છેદબિંદુઓની સંખ્યા $= \binom{9}{2} \times \binom{9}{2}$

$= 36 \times 36$

$= 1296$

1296 પૈકી કેટલાંક બિંદુ સમાન પણ હોઈ શકે.

$\therefore n \le 1296$ આથી $n \not> 1296$ **જવાબ :** (A)

(53) 8! ના બધા જ ભાજકોની સંખ્યા ...... છે.

(A) 14 (B) 96 (C) 15 (D) 11

ઉકેલ : અહીં $8! = 2^7 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$

8! નો દરેક ભાજક $2^a\, 3^b\, 5^c\, 7^d$ પ્રકારનો હોય.

જ્યાં $a \in \{1, 2..., 7, 0\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$

$c \in \{0, 1\}$ અને $d \in \{0, 1\}$

$\therefore$ 8! ના ભાજકોની સંખ્યા $= 8 \times 3 \times 2 \times 2$

$= 96$

બીજી રીત :

$8! = 2^7 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$ ના ભાજકોની સંખ્યા

$= (a+1)\ (b+1)(c+1)......$ (સૂત્ર)

$= (7+1)(2+1)(1+1)(1+1)$

$= 8 \times 3 \times 2 \times 2$

$= 96$

જવાબ : (B)

(54) પાંચ પત્રોને સરનામાં લખેલા પાંચ કવરમાં મૂકતાં બધા જ પત્રો ખોટા કવરમાં મૂકવાના પ્રકારોની સંખ્યા ...... છે.

(A) 96 (B) 24 (C) 45 (D) 44

ઉકેલ : માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા

$= {}_5P_5 - {}_5P_4 + {}_5P_3 - {}_5P_2 + {}_5P_1 - {}_5P_0$

$= 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44$

જવાબ : (D)

(55) જો n એ 0 અને 31 વચ્ચેની પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય, તો $n!\,(31-n)!$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે.

(A) 14 ! × 15! (B) 15 ! × 16! (C) 31! (D) 16! × 17!

ઉકેલ : $n!\,(31-n)!$ ન્યૂનતમ હોય, તો અને તો જ $\binom{31}{n} = \frac{31!}{n!(31-n)!}$ મહત્તમ થાય.

$\therefore n = \frac{31-1}{2}$ અથવા $\frac{31+1}{2}$ આથી $n = 15$ અથવા 16

$n!\,(31-n)!$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= 15! \times 16!$

જવાબ : (B)

(56) જો $2n + 1$ વસ્તુઓમાંથી ઓછામાં ઓછી એક અને વધુમાં વધુ n વસ્તુ પસંદ કરવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા 1023 હોય તો $n =$ ......

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

ઉકેલ : અહીં $\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \binom{2n+1}{3} + ... + \binom{2n+1}{n} = 1023$ (1)

$$\therefore \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + ... + \binom{2n+1}{n} +$$

$$\left\{\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n+2} + ... + \binom{2n+1}{2n+1}\right\}$$

$$= 1023 + \binom{2n+1}{0} + \left\{\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n+2} + ... + \binom{2n+1}{2n+1}\right\}$$

$\therefore\ 2^{2n+1} = 1023 + 1 + \left\{\binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n-1} + \ldots + \binom{2n+1}{0}\right\}$

$= 1024 + \left\{\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \ldots + \binom{2n+1}{n}\right\} + \binom{2n+1}{0}$

$= 1024 + 1023 + 1$ (1) પરથી

$= 2048$

$= 2^{11}$

$\therefore\ 2n+1 = 11$ આથી $n = 5$ **જવાબ :** (C)

(57) FENY શબ્દના બધા જ અક્ષરોની ફેરબદલી કરીને બનતા ચાર અક્ષરોના બધા જ શબ્દોને શબ્દકોશ પ્રમાણે ગોઠવતાં સાતમો શબ્દ ...... આવે.

(A) EYNF (B) ENYF (C) FEYN (D) FENY

ઉકેલ : FENY ના અક્ષરોને શબ્દકોશ પ્રમાણે ગોઠવતાં E F N Y મળે.

$\therefore$ E થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા $= 1 \times 3! = 6$

$\therefore$ સાતમો શબ્દ FENY જ બનશે. **જવાબ :** (D)

(58) LETTERS શબ્દના બધા જ અક્ષરોની ફેરબદલી કરીને સમાન અક્ષરો પાસે ન આવે તેવા સાત અક્ષરોના કેટલા શબ્દો બને ?

(A) 36 (B) 420 (C) 540 (D) 660

ઉકેલ : અહીં E, E, T, T, L, R, S આપેલ છે.

માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા = કુલ શબ્દોની સંખ્યા

− બે E પાસપાસે હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

− બે T પાસપાસે હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

+ બે E અને બે T પાસપાસે હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

$= \frac{7!}{2!\,2!} - \frac{6!}{2!} - \frac{6!}{2!} + 5! = \frac{7\times720}{4} - \frac{720}{2} - \frac{720}{2} + 120 = 1260 - 720 + 120 = 660$ **જવાબ :** (D)

(59) ફક્ત પાસપાસેના બે અંક સમાન હોય તેવી 99 અને 999 વચ્ચે કેટલી સંખ્યાઓ હોય ?

(A) 162 (B) 153 (C) 90 (D) 161

ઉકેલ : aab પ્રકારની સંખ્યાઓ $= 9 \times 9 = 81$

કારણ કે $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ પૈકી કોઈ પણ એક અંક હોઈ શકે તથા b નું મૂલ્ય a સિવાયનો બાકીના નવ અંકોમાંથી (શૂન્ય સાથે) કોઈ પણ અંક હોઈ શકે.

આ જ રીતે baa પ્રકારની સંખ્યાઓ $= 9 \times 9 = 81$

કારણ કે b નું મૂલ્ય 1 થી 9 સુધીના અંકો પૈકી કોઈ પણ અંક હોઈ શકે તથા a નું મૂલ્ય b સિવાયના બાકીના 9 અંકોમાંથી (શૂન્ય સાથે) કોઈપણ અંક હોઈ શકે.

$\therefore$ કુલ સંખ્યાઓ $= 81 + 81 = 162$ **જવાબ :** (A)

(60) 4 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી 6 ભિન્ન અંકની કેટલી સંખ્યાઓ મળે ?

(A) 33600 (B) 87360 (C) 36300 (D) 32340

ઉકેલ : છેલ્લા બે સ્થાનમાં 04, 08, 20, 40, 60 અથવા 80 હોય તેવી સંખ્યાઓ 4 વડે વિભાજ્ય થાય.

આવી સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 6 \times {}_8P_4 = 6 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 10080$

છેલ્લા બે સ્થાનમાં 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96 હોય.

તેવી સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 16 \times 7 \times {}_7P_3 = 112 \times 7 \times 6 \times 5 = 112 \times 210 = 23520$

કુલ સંખ્યાઓ $= 10080 + 23520 = 33600$ **જવાબ :** (A)

(61) સંખ્યાઓ 1 થી 100માંથી બે સંખ્યાઓ કુલ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય કે જેમનો ગુણાકાર 3 વડે વિભાજ્ય હોય ?

(A) $\binom{100}{2} - \binom{67}{2}$ (B) $\binom{100}{2} - \binom{33}{2}$ (C) $\binom{67}{2}$ (D) $\binom{33}{2}$

ઉકેલ : 1 થી 100માંથી બે સંખ્યા પસંદ કરવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{100}{2}$

જો બંને સંખ્યાઓ પૈકી એક પણ સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય ન હોય તો તેમનો ગુણાકાર 3 વડે વિભાજ્ય ન થાય.

અહીં 3, 6, 9 ... 99 એમ 33 સંખ્યાઓ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $100 - 33 = 67$ સંખ્યાઓ 3 વડે વિભાજ્ય નથી. આ 67 માંથી બે સંખ્યાઓ પસંદ થાય તો તેમનો ગુણાકાર 3 વડે વિભાજ્ય ન થાય.

$\therefore$ માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા $= \binom{100}{2} - \binom{67}{2}$ **જવાબ :** (A)

(62) n દડાને બે મિત્રોને કુલ કેટલી રીતે વહેંચી શકાય કે જેથી એક મિત્રને m અને બીજા મિત્રને $n - m$ દડા મળે ?

(A) $\binom{n}{m}$ (B) $2\binom{n}{m}$ (C) $2\frac{n!}{m!}$ (D) $2 \cdot {}_nP_m$

વહેંચણીના કુલ પ્રકાર $= \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-m} + \binom{n}{n-m}\binom{m}{m}$

$= \binom{n}{m}(1) + \binom{n}{n-m}(1)$

$= \binom{n}{m} + \binom{n}{m}$

$= 2\binom{n}{m}$ **જવાબ :** (B)

(63) A હંમેશાં B કરતાં આગળ આવે તે રીતે A, B, C, D, E અને F ને એક હારમાં કુલ કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

(A) 120 (B) 360 (C) 90 (D) 345

ઉકેલ : છ અક્ષરોને હારમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકાર $= 6\,! = 720$

આમાંથી અડધા પ્રકારમાં A એ B કરતાં આગળ આવે અને બીજા અડધા પ્રકારમાં A એ B કરતાં પાછળ આવે.

$\therefore$ A હંમેશાં B કરતાં આગળ આવે તેવી ગોઠવણીની કુલ સંખ્યા $= \frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360$ **જવાબ :** (B)

(64) A પછી તરત જ B આવે તે રીતે A, B, C, D, E અને F ને એક હારમાં કુલ કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

(A) 120 (B) 360 (C) 60 (D) 90

ઉકેલ : અહીં A પછી તરત જ B આવે છે, માટે AB ને એક અક્ષર માનીએ.

આમ (AB), C, D, E, F એમ પાંચ અક્ષરોને હારમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = 5! = 120 **જવાબ :** (A)

(65) એક બહિર્મુખ બહુકોણની બાજુઓની સંખ્યા કરતાં તેના વિકર્ણોની સંખ્યા 52 વધારે છે, તો તે બહુકોણનાં શિરોબિંદુઓની સંખ્યા કેટલી હશે ?

(A) 16 (B) 15 (C) 14 (D) 13

ઉકેલ : ધારો કે બહુકોણના શિરોબિંદુઓની સંખ્યા n છે.

$\therefore$ વિકર્ણોની સંખ્યા = $\binom{n}{2} - n$

હવે વિકર્ણોની સંખ્યા = બાજુઓની સંખ્યા + 52

$\therefore \binom{n}{2} - n = n + 52$

$\therefore \frac{n(n-1)}{2} = 2n + 52$

$\therefore n^2 - n = 4n + 104$

$\therefore n^2 - 5n - 104 = 0$

$\therefore (n + 8)(n - 13) = 0$

$\therefore n = -8$ અથવા $n = 13$

$\therefore n = -8$ શક્ય નથી.

$\therefore n = 13$ **જવાબ :** (D)

(66) અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય 5 ના ગુણકમાં હોય તેવી ચાર અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બને ?

(A) 840 (B) 952 (C) 672 (D) 1008

ઉકેલ : એકમનો અંક શૂન્ય હોય તેવી સંખ્યાઓની સંખ્યા = $1 \times {}_9P_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

જો એકમનો અંક 5 હોય, તો હજારના સ્થાનમાં 0 આવી શકે નહિ.

$\therefore$ હજારનું સ્થાન નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 8

શતકનું સ્થાન નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 8

અને દશકનું સ્થાન નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 7

$\therefore$ એકમનો અંક 5 હોય તેવી સંખ્યાઓની સંખ્યા = $1 \times 8 \times 8 \times 7 = 448$

$\therefore$ માંગેલ સંખ્યાઓની કુલ સંખ્યા = 504 + 448 = 952 **જવાબ :** (B)

બીજી રીત : એકમનું સ્થાન 0 અથવા 5 હોવું જોઈએ

$\therefore$ આવી સંખ્યાઓની સંખ્યા = ${}_9P_3 \times 2 = 1008$

પરંતુ $0\,a\,b\,5$ પ્રકારની સંખ્યા ના ચાલે

આવી સંખ્યાઓની સંખ્યા ${}_8P_2 = 56$

$\therefore$ કુલ સંખ્યા = 1008 – 56 = 952 **જવાબ :** (B)

(67) 27456 સંખ્યાના અંકોની પુનરાવર્તન સિવાય ગોઠવણી કરતાં 4 અંકોની નવ વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ કેટલી મળે ?

(A) 18 (B) 20 (C) 24 (D) 120

ઉકેલ : જે સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 વડે વિભાજ્ય હોય તે સંખ્યા 9 વડે વિભાજ્ય હોય.

$2 + 7 + 5 + 6 + 4 = 24$ સરવાળો મહત્તમ છે અને ન્યૂનતમ $2 + 4 + 5 + 6 = 17$ છે.

અહીં ચાર અંકોનો સરવાળો 9 કે 27 થાય તેવા ચાર અંકો નથી.

$2 + 7 + 4 + 5 = 18$ થાય છે.

$\therefore$ 2, 7, 4 અને 5 નો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરીને બનતી બધી જ ચાર આંકડાની સંખ્યાઓ 9 વડે વિભાજ્ય થશે.

$\therefore$ 9 વડે વિભાજ્ય ચાર અંકોની સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 4! = 24$ **જવાબ :** (C)

(68) 10 બાજુવાળા બહિર્મુખ બહુકોણનાં શિરોબિંદુઓને જોડવાથી જેની એક બાજુ બહુકોણની બાજુ હોય તેવા કેટલા ત્રિકોણ બને ?

(A) 270 (B) 80 (C) 60 (D) 61

ઉકેલ : બહુકોણની કોઈ એક બાજુ પસંદ કરો. આ પસંદગીના પ્રકાર = $\binom{10}{1} = 10$

આ પસંદ થયેલી બાજુનાં અંતિમ બિંદુઓ અને તેની આજુબાજુનાં બે બિંદુ એમ ચાર બિંદુ સિવાયના $10 - 4 = 6$. બિંદુઓમાંથી કોઈ એક બિંદુ પસંદ કરીને પસંદ થયેલ બાજુનાં અંતિમ બિંદુ સાથે જોડવાથી માગેલ ત્રિકોણ મળે.

$\therefore$ માગેલ ત્રિકોણની સંખ્યા $= 10 \times \binom{6}{1} = 60$ **જવાબ :** (C)

(69) જો $n(A) = 51$ હોય, તો જેમાં ઓછામાં ઓછા 25 સભ્યો હોય તેવા A ના ઉપગણોની સંખ્યા ...... હશે.

(A) $\binom{51}{25} + 2^{51}$ (B) 2^{51} (C) 2^{50} (D) $\binom{51}{26} + 2^{50}$

ઉકેલ : ઉપગણોની સંખ્યા $= \binom{51}{25} + \binom{51}{26} + \dots + \binom{51}{51}$

$$= \binom{51}{51} + \binom{51}{50} + \dots + \binom{51}{26} + \binom{51}{25}$$

$$= \binom{51}{0} + \binom{51}{1} + \dots + \binom{51}{25} + \binom{51}{25}$$

$$= \binom{50}{0} + \left\{\binom{50}{0} + \binom{50}{1}\right\} + \left\{\binom{50}{1} + \binom{50}{2}\right\} + \dots + \left\{\binom{50}{24} + \binom{50}{25}\right\} + \binom{51}{25}$$

$$= \binom{50}{0} + \binom{50}{50} + \binom{50}{1} + \binom{50}{49} + \binom{50}{2} + \dots + \binom{50}{26} + \binom{50}{25} + \binom{51}{25}$$

$$= \binom{50}{0} + \binom{50}{1} + \binom{50}{2} + \dots + \binom{50}{50} + \binom{51}{25}$$

$$= 2^{50} + \binom{51}{25}$$

$$= \binom{51}{26} + 2^{50}$$

જવાબ : (D)

(70) એક સમતલમાં 20 રેખાઓ પૈકી 10 રેખાઓ બિંદુ A આગળ સંગામી છે. 4 રેખાઓ બિંદુ B આગળ સંગામી છે. તે સિવાયની બીજી કોઈ પણ ત્રણ રેખાઓ સંગામી નથી. કોઈ પણ બે રેખાઓ સમાંતર નથી. આ 20 રેખાઓ પરસ્પર કેટલાં બિંદુઓમાં છેદશે ?

(A) 141 (B) 187 (C) 139 (D) 137

ઉકેલ : 20 રેખાઓ $\binom{20}{2}$ બિંદુઓમાં છેદે. પરંતુ 10 રેખાઓ $\binom{10}{2}$ છેદબિંદુના બદલે એક જ બિંદુ A અને 4 રેખાઓ $\binom{4}{2}$ છેદબિંદુના બદલે એક જ બિંદુ B માં છેદે છે.

$\therefore$ છેદબિંદુની કુલ સંખ્યા $= \binom{20}{2} - \binom{10}{2} - \binom{4}{2} + 2$

$= 190 - 45 - 6 + 2 = 141$ **જવાબ :** (A)

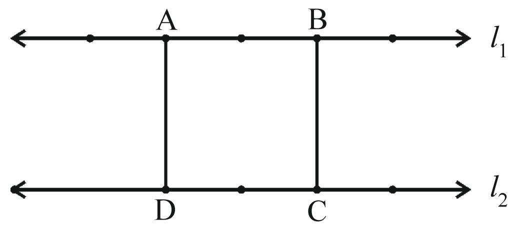
(71) એક સમતલમાં આવેલી બે સમાંતર રેખાઓ l_1 અને l_2 પૈકી l_1 પર પાંચ અને l_2 પર ચાર ભિન્ન બિંદુઓ આવેલાં છે. આ બિંદુઓ જેનાં શિરોબિંદુઓ હોય તેવા કેટલા બહિર્મુખ ચતુષ્કોણ રચી શકાય ?

(A) 180 (B) 60 (C) 90 (D) 720

ઉકેલ : બહિર્મુખ ચતુષ્કોણની સંખ્યા $= \binom{5}{2}\binom{4}{2}$

$= 10 \times 6$

$= 60$



આકૃતિ 5.3

જવાબ : (B)

(72) 0 થી 9 સુધીના અંકોનો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરીને ચાર અંકોની 20 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ કેટલી બને ?

(A) 112 (B) 288 (C) 224 (D) 256

ઉકેલ : 20 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાનો એકમનો અંક શૂન્ય અને દશકનો અંક યુગ્મ હોય.

હજાર શતક દશક એકમ

2, 4 6, 8 0

એકમનો અંક નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 1

દશકનો અંક નક્કી કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 4

બાકીના આઠ અંકોને શતક અને હજારના સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકાર $= {}_8P_2 = 56$

$\therefore$ માગેલ સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 1 \times 4 \times 56 = 224$ **જવાબ :** (C)

(73) 7 બાજુવાળા બહિર્મુખ બહુકોણની એક પણ બાજુ ત્રિકોણની બાજુ ન હોય તેવા કેટલા ત્રિકોણ સપ્તકોણનાં શિરોબિંદુઓને જોડવાથી મળે ?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

ઉકેલ : માગેલ ત્રિકોણની સંખ્યા = કુલ ત્રિકોણની સંખ્યા – બહુકોણની એક બાજુ ત્રિકોણની બાજુ હોય તેવા ત્રિકોણની સંખ્યા – બહુકોણની બે બાજુ ત્રિકોણની બાજુ હોય તેવા ત્રિકોણની સંખ્યા

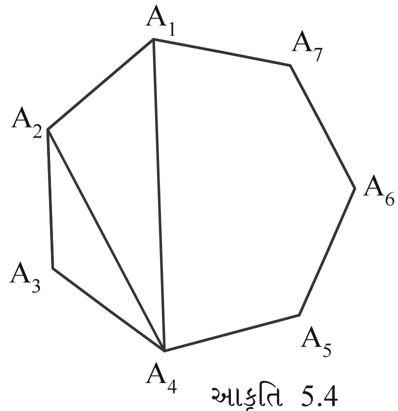
નોંધ : છેલ્લા પ્રકારમાં $\Delta A_1A_2A_3$ જેવા 7 ત્રિકોણ મળે.

$= \binom{7}{3} - \binom{7}{1}\binom{7-4}{1} - 7$

$= \frac{7 \times 6 \times 5}{6} - 7 \times 3 - 7 \times 1$

$= 35 - 21 - 7$

$= 7$



આકૃતિ 5.4

જવાબ : (A)

સમજૂતી :

સપ્તકોણનાં સાત શિરોબિંદુઓમાંથી કોઈ પણ ત્રણ બિંદુઓને જોડવાથી કુલ $\binom{7}{3}$ જેટલા ત્રિકોણ બને.

બહુકોણની એક બાજુ પસંદ કરીને આ બાજુનાં બે અંતિમબિંદુઓ તથા તેની આજુબાજુનાં બે શિરોબિંદુ સિવાયના $7 - 4 = 3$ માંથી કોઈપણ બિંદુને પસંદ થયેલ બાજુના અંતિમબિંદુ સાથે જોડવાથી બહુકોણની એકબાજુ ત્રિકોણની બાજુ હોય તેવા $\binom{7}{1}\binom{7-4}{1}$ જેટલા ત્રિકોણ મળે.

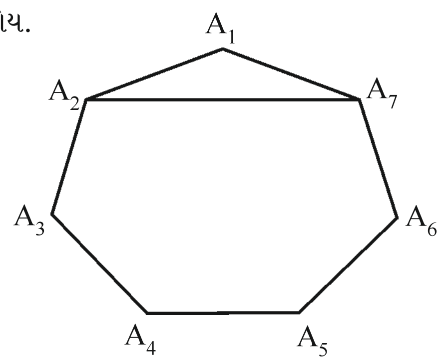
હવે સાત પૈકી એક શિરોબિંદુ $\binom{7}{1}$ રીતે પસંદ કરી શકાય. આ બિંદુ અને તેની આજુબાજુનાં બે બિંદુની મદદથી બનતા ત્રિકોણની બે બાજુઓ બહુકોણની પાસપાસેની બે બાજુઓ હોય.

આમ, બહુકોણની બે બાજુઓ ત્રિકોણની બાજુઓ હોય.

તેવા ત્રિકોણની સંખ્યા $\binom{7}{1}\binom{2}{2} = 7$ થાય.

$\therefore$ બહુકોણની એકપણ બાજુ ત્રિકોણની બાજુ ન હોય.
તેવા ત્રિકોણની સંખ્યા

$$= \binom{7}{3} - \binom{7}{1}\binom{3}{1} - 7 = 35 - 21 - 7 = 7$$



આકૃતિ 5.5

(74) 65 વિકર્ણોવાળા બહિર્મુખ બહુકોણનાં શિરોબિંદુઓને જોડવાથી કેટલા બહિર્મુખ ચતુષ્કોણ બને ?

(A) $\binom{13}{4} \times 3!$ (B) $\binom{10}{4}$ (C) $\binom{13}{4}$ (D) $\binom{13}{4} \times 4!$

ઉકેલ : ધારો કે બહુકોણનાં શિરોબિંદુઓની સંખ્યા n છે.

$\therefore$ બહુકોણના વિકર્ણોની સંખ્યા $= \binom{n}{2} - n = 65$

$\therefore \dfrac{n(n-1)}{2} - n - 65 = 0$

$\therefore n^2 - 3n - 130 = 0$

$\therefore (n + 10)(n - 13) = 0$

$\therefore n = 13$ ($n = -10$ શક્ય નથી.)

$\therefore$ ચતુષ્કોણની સંખ્યા $= \binom{13}{4}$ **જવાબ :** (C)

(75) જેમાં 2 વધુમાં વધુ બે જ વખત આવે તેવી ચાર અંકની કેટલી સંખ્યાઓ બને ? (પુનરાવર્તન સહિત)

(A) 8966 (B) 8965 (C) 8964 (D) 873

ઉકેલ : ચાર અંકની કુલ સંખ્યાઓ $= 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

X 2 2 2 પ્રકારની સંખ્યાઓ = 8

2 X 2 2 પ્રકારની સંખ્યાઓ = 9

2 2 X 2 પ્રકારની સંખ્યાઓ = 9

2 2 2 X પ્રકારની સંખ્યાઓ = 9

2 2 2 2 પ્રકારની સંખ્યા = 1

માંગેલી સંખ્યાઓની સંખ્યા = 4 અંકની કુલ સંખ્યાઓની સંખ્યા – ઓછામાં ઓછી ત્રણ વખત 2 આવે તેવી સંખ્યાઓની સંખ્યા

$= 9000 - (8 + 9 + 9 + 9 + 1)$

$= 9000 - 36$

$= 8964$ **જવાબ :** (C)

(76) $\sum_{k=1}^{50} k!$ ને 14 વડે ભાગતાં શેષ કેટલી મળે ?

(A) 4 (B) 6 (C) 5 (D) 7

ઉકેલ : $7! = 7 \times 6 \times 120 = 14 \times 360$ 14 વડે વિભાજ્ય છે.

આ જ રીતે 8 !, 9! ... 50! દરેક 14 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore \sum_{k=7}^{50} k!$ એ 14 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6!$

$= 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720$

$= 873$

$= 14 \times 62 + 5$

$\therefore \sum_{k=1}^{50} k!$ ને 14 વડે ભાગતાં શેષ 5 મળે. **જવાબ :** (C)

નોંધ : $\sum_{k=1}^{50} k! = 1 + 2 + 6 + 10 + 8 + 6 + 0 + 0 \pmod{14}$

$\equiv 33 \pmod{14}$

$\equiv 5 \pmod{14}$

$\therefore \sum_{k=1}^{50} k!$ ને 14 વડે ભાગતાં 5 શેષ મળે **જવાબ :** (C)

(77) $\sum_{k=4}^{200} (k!)^2$ ને 100 વડે ભાગતાં મળતી શેષ = ...

(A) 17 (B) 76 (C) 24 (D) 6

ઉકેલ : $(5!)^2 = (120)^2 = 14400$ જે 100 વડે વિભાજ્ય છે.

આ જ રીતે $(6!)^2, (7!)^2, \ldots (200!)^2$ દરેક પદ 100 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore \sum_{k=5}^{200} (k!)^2$ ને 100 વડે ભાગતાં શેષ 0 મળે.

હવે k = 4 માટે $(4!)^2 = (24)^2 = 576$ જેને 100 વડે ભાગતાં મળતી શેષ = 76 **જવાબ :** (B)

(78) 1 થી 9999 સુધીની સંખ્યાઓમાં 2 કેટલી વખત આવે ?

(A) 4000 (B) 3001 (C) 3000 (D) 5000

ઉકેલ : એકમના સ્થાનમાં 2 હોય તેવી સંખ્યા *abc*2 પ્રકારની હોય. જ્યાં *a*, *b*, *c* એ 0 થી 9 સુધીનો કોઈ પણ અંક છે.

$\therefore$ એકમના સ્થાનમાં 2 હોય તેવી સંખ્યાઓની સંખ્યા = $1 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000$

એકમના સ્થાનમાં 2 એ 1000 વખત આવે.

આ જ રીતે,

દશકના સ્થાનમાં પણ 2 એ 1000 વખત આવે.

શતકના સ્થાનમાં પણ 2 એ 1000 વખત આવે

અને હજારના સ્થાનમાં પણ 2 એ 1000 વખત આવે.

$\therefore 4 \times 1000 = 4000$ વખત 2 આવે. **જવાબ :** (A)

(79) MONDAY શબ્દના અક્ષરોની ફેરબદલી કરીને છ અક્ષરોના કુલ કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય કે જેથી સ્વરો હંમેશાં શબ્દકોશ પ્રમાણે ક્રમમાં જ આવે ?

(A) 360 (B) 120 (C) 240 (D) 390

ઉકેલ : અહીં કુલ છ અક્ષરોમાં બે સ્વર O અને A છે. શબ્દકોશ પ્રમાણે A પહેલાં અને O પછી આવે તેવા શબ્દોની સંખ્યા શોધવી છે.

છ અક્ષરોના કુલ શબ્દોની સંખ્યા = 6 ! = 720

આમાંથી અડધા એટલે કે 360 શબ્દોમાં A, O ની પહેલાં આવશે.

$\therefore$ માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા = 360 **જવાબ :** (A)

(80) A, A, A, A, B, B, B, C, C, D માંથી ઓછામાં ઓછો એક અક્ષર પસંદ કરવાના કુલ પ્રકાર કેટલા થાય ?

(A) 23 (B) 24 (C) 120 (D) 119

ઉકેલ : અહીં A ચાર વખત, B ત્રણ વખત, C બે વખત અને D એક વખત આવે છે.

$\therefore n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 2, n_4 = 1$

ઓછામાં ઓછો એક અક્ષર પસંદ કરવાના કુલ પ્રકાર $= (n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1)(n_4 + 1) - 1$

$= (4 + 1)(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) - 1$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 - 1$

$= 119$ **જવાબ :** (D)

(81) પાંચ લાલ રંગના ભિન્ન દડા, ચાર પીળા રંગના ભિન્ન દડા અને ત્રણ વાદળી રંગના ભિન્ન દડામાંથી દરેક રંગનો ઓછામાં ઓછો એક દડો પસંદ કરવાના કુલ પ્રકાર ...... છે.

(A) 4095 (B) 3254 (C) 3720 (D) 3255

ઉકેલ : અહીં લાલ રંગનો ઓછામાં ઓછો એક દડો પસંદ કરવાના

$$\text{કુલ પ્રકારની સંખ્યા} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

$$= 2^5 - 1 = 31$$

આ જ રીતે

પીળા રંગનો ઓછામાં ઓછો એક દડો પસંદ કરવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= 2^4 - 1 = 15$ અને

વાદળી રંગનો ઓછામાં ઓછો એક દડો પસંદ કરવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= 2^3 - 1 = 7$

$\therefore$ માંગેલી પસંદગીના કુલ પ્રકાર $= 31 \times 15 \times 7$

$= 3255$ **જવાબ :** (D)

(82) 2, 3, 5 અને 7 એકમના ચાર રેખાખંડોની મદદથી કેટલા ત્રિકોણ બને ? ચાર પૈકી કોઈ પણ ત્રણ રેખાખંડ એક રેખા પર આવેલા નથી.

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

ઉકેલ : એક જ રેખા પર ન હોય તેવા કોઈપણ ત્રણ રેખાખંડોની મદદથી એક ત્રિકોણ બને.

અહીં ચારમાંથી ત્રણ રેખાખંડ પસંદ કરવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{4}{3} = 4$

પરંતુ ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનાં માપનો સરવાળો ત્રીજી બાજુના માપ કરતાં વધારે હોય છે.

અહીં $3 + 5 > 7$ છે. માટે બાજુનું માપ 3, 5, 7 હોય તેવો એક જ ત્રિકોણ મળે. **જવાબ :** (D)

(83) 30! એ ...... સંખ્યા વડે વિભાજ્ય છે.

(A) 9×15^{17} (B) 45^8 (C) 37×15^7 (D) 45^7

ઉકેલ : $\left[\frac{30}{3}\right] + \left[\frac{30}{9}\right] + \left[\frac{30}{27}\right] = 10 + 3 + 1 = 14$

$\therefore 3^{14}$ વડે 30! વિભાજ્ય છે તથા $\left[\frac{30}{5}\right] + \left[\frac{30}{25}\right] = 6 + 1 = 7$

$\therefore 5^7$ વડે 30! વિભાજ્ય છે.

$\therefore 3^{14} \times 5^7 = \left(3^2\right)^7 \times (5)^7 = (9 \times 5)^7 = 45^7$ વડે 30! વિભાજ્ય છે.

$9 \times 15^{17} = 3^2 \times 3^{17} \times 5^{17} = 3^{19} \times 5^{17}$ વડે 30! વિભાજ્ય નથી તથા 45^8 વડે 30! વિભાજ્ય નથી.

37 વડે 30! વિભાજ્ય નથી કારણ કે $\left[\frac{30}{37}\right] = 0$.

$\therefore 37 \times 15^7$ વડે 30! વિભાજ્ય નથી.

$\therefore 45^7$ વડે 30! વિભાજ્ય છે. **જવાબ :** (D)

(84) 50 વસ્તુઓનું 10, 10, 10, 15 અને 5 વસ્તુઓના 5 જૂથમાં વિભાજન કેટલી રીતે કરી શકાય ?

(A) $\frac{50!}{(10!)^3 (15!)(5!)(3!)}$ (B) $\frac{50!}{(10!)^3 (15!)(5!)}$ (C) $\frac{50! \times 5}{(10!)^3 (15!)(5!)(3!)}$ (D) $\frac{50!}{(10!)^3 (15!)(3!)}$

ઉકેલ : અહીં $n = 50, p = 10, l = 3, q = 15, m = 1, r = 5, s = 1$

$$\text{કુલ પ્રકારની સંખ્યા} = \frac{n!}{(p!)^l (q!)^m (r!)^s l! m! s!}$$

$$= \frac{50!}{(10!)^3 (15!)^1 (5!)^1 3! 1! 1!}$$

$$= \frac{50!}{(10!)^3 (15!)(5!)(3!)}$$

જવાબ : (A)

(85) 5 ભિન્ન વસ્તુઓને 3 વ્યક્તિઓની વચ્ચે કેટલી રીતે વહેંચી શકાય કે જેથી દરેકને ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુ મળે ? (JEE Advanced : 2012)

(A) 300 (B) 150 (C) 25 (D) 120

ઉકેલ : ત્રણ વ્યક્તિઓને 1, 1, 3 અથવા 2, 2, 1 વસ્તુઓ વહેંચવાના

$$\text{કુલ પ્રકારની સંખ્યા} = \frac{5!}{(1!)^2 \times 3! \times 2!} \times 3! + \frac{5! \times 3!}{(2!)^2 (1!)\, 2!} = \frac{120}{2} + \frac{120 \times 6}{8} = 60 + 90 = 150$$

જવાબ : (B)

→ **બીજી રીત :**

ત્રણ વ્યક્તિઓને 1, 1, 3 અથવા 2, 2, 1 વસ્તુઓ વહેંચવાના

$$\text{કુલ પ્રકારની સંખ્યા} = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} \times 3!}{2!} + \frac{\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1}}{2!} \times 3!$$

$$= 60 + 90 = 150$$

જવાબ : (B)

(86) જુદા જુદા રંગના ચાર દડા અને તે જ રંગની ચાર પેટીઓ છે. દરેક પેટીમાં એક દડો આવે તે રીતે ચાર દડાઓ પેટીમાં કેટલી રીતે મૂકી શકાય કે જેથી કોઈ દડો તે જ રંગની પેટીમાં ન આવે ? (IIT - 1992)

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

ઉકેલ : પ્રથમ દડો તે દડાના રંગ સિવાયના રંગની પેટીમાં મૂકવાના પ્રકાર = 3

પ્રથમ દડો જે પેટીમાં મૂક્યો હોય તે પેટીનો જે રંગ હોય તે રંગનો દડો બાકીના ત્રણ પેટીમાંથી ગમે તે પેટીમાં મૂકી શકાય.

∴ બીજો દડો મૂકવાના પ્રકારની સંખ્યા = 3

બાકીના બે દડા મૂકવાના પ્રકાર એક-એક છે.

∴ કુલ પ્રકાર = $3 \times 3 \times 1 \times 1 = 9$

→ **બીજી રીત :**

કુલ પ્રકારની સંખ્યા = ${}_4P_4 - {}_4P_3 + {}_4P_2 - {}_4P_1 + {}_4P_0 = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$ **જવાબ :** (C)

(87) COCHIN શબ્દના અક્ષરોના ક્રમચયો બનાવવામાં આવે છે અને બધા જ ક્રમચયોને અંગ્રેજી ડીક્શનરી પ્રમાણે ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે. COCHIN શબ્દની પહેલાં શબ્દોની સંખ્યા ...... છે. (IIT : 2007)

(A) 360 (B) 192 (C) 96 (D) 48

ઉકેલ : COCHIN શબ્દના અક્ષરોનો ડીક્શનરી પ્રમાણે ક્રમ C, C, H, I, N, O છે.

CC થી શરૂ થતાં શબ્દોની સંખ્યા = $1 \times 1 \times 4! = 24$

CH થી શરૂ થતાં શબ્દોની સંખ્યા = $1 \times 1 \times 4! = 24$

CI થી શરૂ થતાં શબ્દોની સંખ્યા = $1 \times 1 \times 4! = 24$

CN થી શરૂ થતાં શબ્દોની સંખ્યા = $1 \times 1 \times 4! = 24$

CO થી શરૂ થતાં શબ્દોમાં પ્રથમ શબ્દ જ COCHIN છે.

∴ COCHIN શબ્દની પહેલાં $24 + 24 + 24 + 24 = 96$ શબ્દો હશે. **જવાબ :** (C)

(88) અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના 10 ભિન્ન અક્ષરો આપેલ છે. આ અક્ષરોમાંથી 5 અક્ષરોના શબ્દ બનાવવામાં આવે છે, તો ઓછામાં ઓછા એક અક્ષરનું પુનરાવર્તન થતું હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા .... છે. (IIT : 1980)

(A) 69760 (B) 30240

(C) 99748 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ

ઉકેલ : માગેલ શબ્દોની સંખ્યા = 5 અક્ષરના કુલ શબ્દોની સંખ્યા

એક પણ અક્ષરનું પુનરાવર્તન ન થાય તેવા પાંચ અક્ષરોના શબ્દોની સંખ્યા = $10^5 - {}_{10}P_5 = 69760$ **જવાબ :** (A)

(89) શબ્દ ENDEANOEL ના અક્ષરોના કેટલા ક્રમચયો શબ્દ ENDEA ને સમાવે છે ? (IIT : 2008)

(A) 5! (B) $2 \times 5!$ (C) $7 \times 5!$ (D) $21 \times 5!$

ઉકેલ : અહીં ENDEAને એક અક્ષર માનતાં ENDEA, N, O, E, L એમ પાંચ અક્ષરોના ક્રમચયોની કુલ સંખ્યા = 5!

જવાબ : (A)

(90)શબ્દ ENDEANOEL ના અક્ષરોના કેટલા ક્રમચયોમાં પ્રથમ અને છેલ્લા સ્થાન પર E હોય ?(IIT : 2008)

(A) 5! (B) $2 \times 5!$ (C) $7 \times 5!$ (D) $21 \times 5!$

ઉકેલ : પ્રથમ અને છેલ્લા સ્થાન પર E ને ગોઠવવાના પ્રકાર $1 \times 1 = 1$

બે E ની વચ્ચે સાત અક્ષરો N, N, D, A, O, E, L ને ગોઠવવાના પ્રકાર = $\frac{7!}{2!} = 21 \times 5!$

∴ માગેલ ક્રમચયોની કુલ સંખ્યા = $1 \times 21 \times 5! = 21 \times 5!$ **જવાબ :** (D)

(91) શબ્દ ENDEANOEL ના અક્ષરોના કેટલા ક્રમચયોના છેલ્લાં પાંચ સ્થાનમાં D, L, N, N નથી ? (IIT : 2008)

(A) 5! (B) $2 \times 5!$ (C) $7 \times 5!$ (D) $21 \times 5!$

ઉકેલ : D, L, N, N ને પહેલા ચાર અને બાકીના અક્ષરોને છેલ્લાં પાંચ સ્થાનમાં ગોઠવવાના

પ્રકારની કુલ સંખ્યા = $\frac{4!}{2!} \times \frac{5!}{3!} = 12 \times 20 = 240 = 2 \times 5!$ **જવાબ :** (B)

(92) અંકો 0,1, 2, 3 અને 4 ની મદદથી 1000 કરતાં મોટી પરંતુ 4000 કરતાં મોટી ન હોય તેવી કુલ કેટલી સંખ્યાઓ

બનાવી શકાય ? (પુનરાવર્તન સાથે) (AIEEE : 2002)

(A) 576 (B) 450 (C) 375 (D) 350

ઉકેલ : અહીં 1001 થી 4000 સુધીની સંખ્યાઓ શોધવાની છે. માટે માગેલ સંખ્યાઓ 4 અંકની હોય.

હજારનું સ્થાન 1, 2, 3 વડે અને બાકીનાં સ્થાન 0, 1, 2, 3, 4 વડે ભરતાં મળતી કુલ સંખ્યાઓની સંખ્યા

$3 \times 5 \times 5 \times 5 = 375$ મળશે.

જેમાં 1000 નો સમાવેશ થશે પરંતુ 4000નો સમાવેશ થશે નહિ. આપણે ગણતરીમાં 1000 લેવાની નથી પરંતુ 4000 લેવાની છે.

$\therefore$ માગેલ સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 375 - 1 + 1 = 375$ **જવાબ** : (C)

(93) અંકો 0,1, 2, 3, 5 અને 7 વડે ચાર અંકોની ...... અયુગ્મ સંખ્યાઓ બને. (AIEEE : 2002)

(A) 400 (B) 720 (C) 375 (D) 216

ઉકેલ : ચાર અંકની અયુગ્મ સંખ્યા બનાવવા માટે એકમનું સ્થાન 1, 3, 5, 7 વડે 4 રીતે, હજારનું સ્થાન 1, 2, 3, 5, 7 વડે 5 રીતે અને બાકીનાં બે સ્થાન 0,1, 2, 3, 5, 7 વડે 6, 6 રીતે ભરી શકાય.

$\therefore$ માંગેલ સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 4 \times 5 \times 6 \times 6 = 720$

જવાબ : (B)

(94) જો ${}_nC_r$ એ n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓના સંચયની સંખ્યા દર્શાવતો ${}_nC_{(r+1)} + {}_nC_{(r-1)} + 2 \times {}_nC_r = ...$ (AIEEE : 2003)

(A) ${}_{(n+2)}C_r$ (B) ${}_{(n+2)}C_{(r+1)}$ (C) ${}_{(n+1)}C_r$ (D) ${}_{(n+1)}C_{(r+1)}$

ઉકેલ : અહીં ${}_nC_{(r+1)} + {}_nC_{(r-1)} + 2 \times {}_nC_r$

$= {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)} + {}_nC_{(r-1)} + {}_nC_r$

$= {}_{(n+1)}C_{(r+1)} + {}_{(n+1)}C_r$

$= {}_{(n+2)}C_{(r+1)}$ **જવાબ** : (B)

(95) એક વિદ્યાર્થી પ્રથમ પાંચ પ્રશ્નોમાંથી ઓછામાં ઓછા ચાર પ્રશ્નોના જવાબ આપવાના હોય તે રીતે 13 પ્રશ્નોમાંથી 10 પ્રશ્નોના જવાબ કેટલી રીતે આપી શકે ? (AIEEE : 2003)

(A) 196 (B) 280 (C) 346 (D) 140

ઉકેલ : કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{5}{4}\binom{8}{6} + \binom{5}{5}\binom{8}{5}$

$= 5 \times \frac{8\times7}{2} + 1 \times \frac{8\times7\times6}{6}$

$= 5 \times 28 + 56 = 140 + 56 = 196$ **જવાબ** : (A)

(96) 8 સમાન દડાને ત્રણ ભિન્ન ખોખામાં કેટલી રીતે મૂકી શકાય કે જેથી એક પણ ખોખું ખાલી ન રહે ?

(AIEEE : 2004)

(A) 5 (B) 21 (C) 3^8 (D) ${}_8C_3$

ઉકેલ : n સમાન વસ્તુઓને એક પણ સ્થાન ખાલી ન રહે તે રીતે r ભિન્ન સ્થાનમાં ગોઠવવાના

કુલ પ્રકાર $= {}_{(n-1)}C_{(r-1)}$

$= {}_7C_2$ $(n = 8, r = 3)$

$= 21$ **જવાબ** : (B)

→ **બીજી રીત :**

8 સમાન દડામાંથી 3 ભાગ કરવાના પ્રકાર (1, 1, 6), (2, 2, 4), (3, 3, 2), (1, 2, 5), (1, 3, 4) છે.

હવે, 1, 1, 6 દડા 3 ખોખામાં ગોઠવવાના પ્રકારની સંખ્યા = 3

આ જ રીતે 2, 2, 4 દડા અને 3, 3, 2 દડા 3 ખોખામાં ગોઠવવાના પ્રકારની સંખ્યા = 3

1, 2, 5 દડા 3 ખોખામાં ગોઠવવાના પ્રકારની સંખ્યા = 3! = 6

1, 3, 4 દડા 3 ખોખામાં ગોઠવવાના પ્રકારની સંખ્યા = 3! = 6

$\therefore$ 8 સમાન દડાને 3 ભિન્ન ખોખામાં મૂકવાના કુલ પ્રકાર $= 3 \times 3 + 2 \times 6 = 9 + 12 = 21$

(97) એક ચૂંટણીમાં મતદાર વધુમાં વધુ જેટલા ઉમેદવાર ચૂંટવાના છે તેટલા મત આપી શકે છે. ચૂંટણીમાં 10 ઉમેદવારમાંથી 4 ઉમેદવાર ચૂંટવાના છે. જો મતદારને ઓછામાં ઓછો એક મત આપવાનો હોય, તો તે મતદાન કેટલી રીતે કરી શકે ? (AIEEE : 2006)

(A) 6210 (B) 1110 (C) 385 (D) 5040

ઉકેલ : મતદાન કરવાના કુલ પ્રકાર $= \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$

$= 10 + 45 + 120 + 210 = 385$ **જવાબ :** (C)

(98) ગણ S = {1, 2, 3,... 12}ને સમાન સભ્યોની સંખ્યાવાળા ઉપગણ A, B, Cમાં વિભાજન કરવામાં આવે કે જેથી $A \cup B \cup C = S, A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$ તો આ કેટલા પ્રકારે શક્ય છે ? (AIEEE : 2007)

(A) $\frac{12!}{(4!)^4}$ (B) $\frac{12!}{(4!)^3}$ (C) $\frac{12!}{3(4!)^3}$ (D) $\frac{12!}{3(4!)^4}$

ઉકેલ : ગણ S માં 12 સભ્યો હોવાથી, દરેક ગણમાં $\frac{12}{3} = 4$ સભ્યો આવશે.

કુલ પ્રકાર $= \binom{12}{4} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4} \frac{3!}{3!} = \frac{12!}{4!8!} \times \frac{8!}{4!4!} \times \frac{3!}{3!}$

$= \frac{12!}{(4!)^3}$ **જવાબ :** (B)

(99) સમતલમાં આવેલાં 10 બિંદુઓ પૈકી 6 બિંદુઓ સમરેખ છે. જો આ બધાં બિંદુઓની મદદથી N ત્રિકોણ બને, તો ...... (AIEEE : 2011)

(A) $N \le 100$ (B) $100 < N \le 140$ (C) $140 < N \le 190$ (D) $N > 190$

ઉકેલ : $N = \binom{10}{3} - \binom{6}{3} = \frac{10\times9\times8}{6} - \frac{6\times5\times4}{6} = 120 - 20 = 100$

$\therefore N \le 100$ **જવાબ :** (A)

(100) MISSISSIPPI શબ્દના અક્ષરોની ફેરબદલી કરીને કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય કે જેથી બે S પાસપાસે ન આવે ? (AIEEE : 2008)

(A) $8 \cdot {}^6C_4 \cdot {}^7C_4$ (B) $6 \cdot 7 \cdot {}^8C_4$ (C) $6 \cdot 8 \cdot {}^7C_4$ (D) $7 \cdot {}^6C_4 \cdot {}^8C_4$

ઉકેલ : ચાર S સિવાયના અક્ષરો M, I, I, I, I, P, P ને હારમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = $\frac{7!}{4!2!}$ = 7 × 5 × 3 = 105

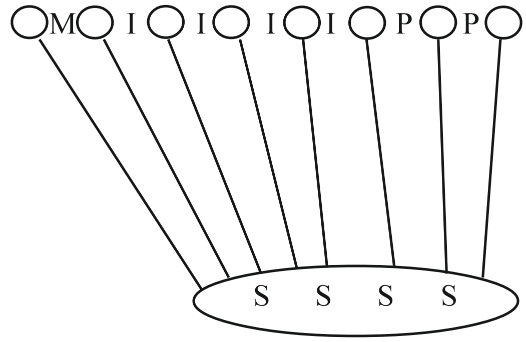
ચાર S આઠ સ્થાનમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકાર = $^8C_4$

∴ માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા = $7 \times 5 \times 3 \times {}^8C_4$

$= 7 \times \frac{6\times5}{2} \times {}^8C_4$

$= 7 \times {}^6C_2 \times {}^8C_4$

$= 7 \times {}^6C_4 \times {}^8C_4$



આકૃતિ 5.6

જવાબ : (D)

(101) 6 ભિન્ન નવલકથાઓ અને 3 ભિન્ન શબ્દકોશોમાંથી 4 નવલકથાઓ અને 1 શબ્દકોશ પસંદ કરીને છાજલી પર ગોઠવવામાં આવે છે. શબ્દકોશ હંમેશાં મધ્યમાં જ રહે તેવી ગોઠવણીના પ્રકારની સંખ્યા ...... છે. (AIEEE : 2009)

(A) 500 થી ઓછા　　(B) ઓછામાં ઓછા 500 અને 750 થી ઓછા

(C) ઓછામાં ઓછા 750 પરંતુ 1000 થી ઓછા　　(D) ઓછામાં ઓછા 1000

ઉકેલ : 3 માંથી 1 શબ્દકોશ પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = $^3C_1$ = 3

6 માંથી 4 નવલકથા પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = $^6C_4$ = 15

હવે મધ્યમાં એક શબ્દકોશ તથા તેની બંને બાજુ બે-બે નવલકથાઓ ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા

$= 3 \times 15 \times 4! = 3 \times 15 \times 24 = 1080 \geq 1000$

∴ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા ઓછામાં ઓછી 1000 છે. **જવાબ :** (D)

(102) જો p અને q નો લ.સા.અ. $r^2\, t^4\, s^2$ હોય, જ્યાં r, s, t અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે. p અને q ધન પૂર્ણાંક છે, તો આવી ક્રમયુક્ત જોડ (p, q) ની સંખ્યા ...... છે. (IIT : 2006)

(A) 225　　(B) 252　　(C) 254　　(D) 224

ઉકેલ : r^2 એ લ.સા.અ. નો અવયવ હોવાથી (p, q) માં rના ઘાતની (r^0, r^2), (r^2, r^0), (r^1, r^2), (r^2, r^1), (r^2, r^2) એમ 5 શક્યતાઓ છે.

આ જ રીતે t ના ઘાતની (t^0, t^4), (t^4, t^0), (t^1, t^4), (t^4, t^1), (t^2, t^4), (t^4, t^2), (t^3, t^4), (t^4, t^3), (t^4, t^4) એમ 9 શક્યતાઓ છે અને આ જ રીતે s ના ઘાતની પણ 5 શક્યતાઓ છે.

ક્રમયુક્ત જોડ (p, q) ની શક્યતાઓ = 5 × 9 × 5 = 225 **જવાબ :** (A)

(103) દડાઓના રંગ સિવાય દડાઓ સમાન છે. તેમ ધારી, 10 સફેદ, 9 લીલા અને 7 કાળા રંગના દડામાંથી એક કે વધુ દડા કરેલી રીતે પસંદ કરી શકાય ? (AIEEE : 2012)

(A) 629　　(B) 630　　(C) 880　　(D) 879

ઉકેલ : p સમાન વસ્તુઓ, q સમાન વસ્તુઓ અને r સમાન વસ્તુઓના જૂથમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુ પસંદ કરવાના કુલ પ્રકાર = $(p+1)(q+1)(r+1) - 1$

$= (10+1)(9+1)(7+1) - 1 = 11 \times 10 \times 8 - 1 = 880 - 1 = 879$

(10 સફેદ દડામાંથી 0, 1, 2... 10 દડા પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 10 + 1 = 11 વગેરે) **જવાબ :** (D)

(104) વિધેય $f(x) = {}_{(7-x)}P_{(x-3)}$ નો વિસ્તાર ...... છે. (AIEEE : 2004)

(A) $\{1, 2, 3, 4\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (C) $\{1, 2, 3\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

ઉકેલ : અહીં $x - 3 \ge 0$ અને $7 - x \ge x - 3$

$\therefore x \ge 3$ અને $10 \ge 2x$

$\therefore 3 \le x$ અને $x \le 5$

$\therefore 3 \le x \le 5$

$\therefore x = 3, 4,$ અથવા 5

$\therefore f(3) = {}_4P_0 = 1$ તથા $f(4) = {}_3P_1 = 3$ તથા $f(5) = {}_2P_2 = 2\,! = 2$

$\therefore f$ નો વિસ્તાર $= \{1, 2, 3\}$ **જવાબ :** (C)

(105) જો $\binom{n-1}{r} = (k^2 - 3)\binom{n}{r+1}$ તો $k \in$ ...... (IIT : 2004)

(A) $[-2, -\sqrt{3}\,] \cup [\sqrt{3}\,, 2]$ (B) $(-2, -\sqrt{3}\,) \cup (\sqrt{3}\,, 2)$

(C) $(-2, -\sqrt{3}\,] \cup [\sqrt{3}\,, 2)$ (D) $[-2, -\sqrt{3}\,) \cup (\sqrt{3}\,, 2]$

ઉકેલ : અહીં $\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\,r!} = (k^2 - 3)\,\frac{n!}{(n-r-1)!\,(r+1)!}$

$\therefore \frac{r+1}{n} = k^2 - 3$

હવે $0 \le r \le n - 1 \quad \Rightarrow 1 \le r + 1 \le n$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \le \frac{r+1}{n} \le 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{r+1}{n} \le 1$

$\Rightarrow 0 < k^2 - 3 \le 1$

$\Rightarrow 3 < k^2 \le 4$

$\Rightarrow k \in [-2, -\sqrt{3}\,) \cup (\sqrt{3}\,, 2]$ **જવાબ :** (D)

(106) ગણ A અને ગણ B માં અનુક્રમે 4 અને 2 ઘટકો હોય, તો જેમાં ઓછામાં ઓછા 3 ઘટકો હોય, તેવા $A \times B$ ના ઉપગણોની સંખ્યા ...... છે. (JEE 2013-15)

(A) 219 (B) 256 (C) 275 (D) 510

ઉકેલ : અહીં $n(A) = 4$ અને $n(B) = 2$ આપેલ છે. આથી $n(A \times B) = 4 \times 2 = 8$

$\therefore A \times B$ ના કુલ ઉપગણોની સંખ્યા $= 2^8 = 256$

તથા $A \times B$ ના 0 ઘટકોવાળા ઉપગણોની સંખ્યા $= \binom{8}{0} = 1$

A × B ના 1 ઘટકોવાળા ઉપગણોની સંખ્યા = $\binom{8}{1}$ = 8

A × B ના 2 ઘટકોવાળા ઉપગણોની સંખ્યા = $\binom{8}{2}$ = 28

∴ A × B ના ઓછામાં ઓછા 3 ઘટકોવાળા ઉપગણોની સંખ્યા = 256 – 1– 8 – 28 = 219 **જવાબ :** (A)

(107) અંકો 3, 5, 6, 7 અને 8 નો પુનરાવર્તન સિવાય ઉપયોગ કરીને 6000 કરતાં મોટા ...... ધન પૂર્ણાંકો બને. (JEE : 2015)

(A) 216 (B) 192 (C) 120 (D) 72

ઉકેલ : **વિકલ્પ 1** 6000 કરતાં મોટા પાંચ અંકોના ધન પૂર્ણાંકોની સંખ્યા = 5! = 120

વિકલ્પ 2 ચાર અંકોની સંખ્યા માટે હજારના સ્થાનમાં 6, 7 કે 8 આવી શકે.

∴ હજારનું સ્થાન ભરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 3

શતકનું સ્થાન ભરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 4

દશકનું સ્થાન ભરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 3

એકમનું સ્થાન ભરવાના પ્રકારની સંખ્યા = 2

ચાર અંકોની 6000 કરતાં મોટી સંખ્યાઓ = 3 × 4 × 3 × 2 = 72

કુલ પ્રકારની સંખ્યા = 120 + 72 = 192 **જવાબ :** (B)

(108) n બાજુવાળા બર્હિમુખ બહુકોણનાં શિરોબિંદુઓને જોડીને T_n જેટલા ત્રિકોણ બને છે. જો $T_{n+1} - T_n = 10$ તો n ની કિંમત ...... છે. (JEE : 2013)

(A) 7 (B) 5 (C) 10 (D) 8

ઉકેલ : અહીં $T_{n+1} - T_n = 10$

$$\therefore \binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = 10$$

$$\therefore \frac{(n+1)n(n-1)}{6} - \frac{n(n-1)\ (n-2)}{6} = 10$$

$$\therefore n\ (n-1)\ (n+1-n+2) = 60$$

$$\therefore n\ (n-1)\ 3 = 60$$

$$\therefore n\ (n-1) = 20 = 5 \times 4$$

$$\therefore n = 5$$

જવાબ : (B)

(109) જો $\binom{100}{50}$ નું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ $2^a 3^b 5^c 7^d$... હોય, તો નીચેનામાંથી ...... સત્ય છે. (જ્યાં $a, b, c, d... \in N$)

(A) $a < b$ (B) $a < d$ (C) $a + d = b + c + 1$ (D) $a + c = b + d$

ઉકેલ : 100 ! માં 2 નો મહત્તમ ઘાતાંક = $\left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{8}\right] + \left[\frac{100}{16}\right] + \left[\frac{100}{32}\right] + \left[\frac{100}{64}\right]$ ...

$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$

50 ! માં 2 નો મહત્તમ ઘાતાંક $= \left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{4}\right] + \left[\frac{50}{8}\right] + \left[\frac{50}{16}\right] + \left[\frac{50}{32}\right]$

$= 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$

$\therefore \quad \binom{100}{50} = \frac{100!}{(50!)^2} = \frac{2^{97}}{2^{47} \times 2^{47}} \times k = 2^3 \times k \qquad (k \neq 2n,\ n \in \mathbb{N})$

$\therefore \quad a = 3$

$b = \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{9}\right] + \left[\frac{100}{27}\right] + \left[\frac{100}{81}\right] - 2\left[\left[\frac{50}{3}\right] + \left[\frac{50}{9}\right] + \left[\frac{50}{27}\right]\right]$

$= 33 + 11 + 3 + 1 - 2(16 + 5 + 1) = 4$

$\therefore \quad a < b$ સત્ય છે. **જવાબ :** (A)

$c = \left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{25}\right] - 2\left[\left[\frac{50}{5}\right] + \left[\frac{50}{25}\right]\right] = 20 + 4 - 2(10 + 2) = 0$

$d = \left[\frac{100}{7}\right] + \left[\frac{100}{49}\right] - 2\left[\left[\frac{50}{7}\right] + \left[\frac{50}{49}\right]\right] = 14 + 2 - 2(7 + 1) = 0$

$\therefore$ (B) સત્ય નથી, (C) પણ સત્ય નથી, (D) પણ સત્ય નથી. આથી જવાબ (A).

JEE - ADVANCED માટે ઉપયોગી દાખલા

ફકરા પરથી જવાબ આપો.

(110) અંકો 0, 1 અથવા બંનેનો ઉપયોગ કરીને

(i) બે 0 પાસપાસે ન આવે તેવા n અંકોના પૂર્ણાંકોની સંખ્યા $= a_n$

(ii) બે 0 પાસપાસે ન આવે તથા અંતિમ અંક 1 હોય તેવા n અંકોના પૂર્ણાંકોની સંખ્યા $= b_n$ અને

(iii) બે 0 પાસપાસે ન આવે તથા અંતિમ અંક 0 હોય તેવા n અંકોના પૂર્ણાંકોની સંખ્યા $= c_n$ છે.

(1) નીચેના પૈકી કયું સાચું છે ?

(A) $a_{17} = a_{16} + a_{15}$ (B) $c_{17} \neq c_{16} + c_{15}$ (C) $b_{17} = b_{16} + c_{16}$ (D) $a_{17} = c_{17} + b_{16}$

ઉકેલ : (I) અહીં એક અંકની સંખ્યાઓ 1 અને 1 અને એક પણ ન મળે.

$\therefore \quad a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = 0$

બે અંકની સંખ્યાઓ 11, 10 તથા 11 અને 10 મળે.

$\therefore \quad a_2 = 2, b_2 = 1, c_2 = 1$

ત્રણ અંકની સંખ્યાઓ 111, 101, 110 મળે, જે પૈકી અંતિમ અંક 1 હોય તેવી બે અને 0 હોય તેવી એક સંખ્યા મળે.

$\therefore \quad a_3 = 3, b_3 = 2, c_3 = 1$

ચાર અંકની સંખ્યાઓ 1111, 1011, 1101, 1110, 1010 એમ 5 મળે જે પૈકી અંતિમ અંક 1 હોય તેવી 1111, 1011, 1101 એમ 3 મળે અને અંતિમ અંક 0 હોય તેવી 1110, 1010 એમ બે મળે.

$\therefore \quad a_4 = 5, b_4 = 3, c_4 = 2$

આમ, $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$, $b_n + b_{n+1} = b_{n+2}$ અને

$c_n + c_{n+1} = c_{n+2}$ તથા $b_n + c_n = a_n$ છે. ($n \in N$)

$\therefore$ વિકલ્પ (A) $a_{17} = a_{16} + a_{15}$ સત્ય છે. વિકલ્પ (C) માટે $b_{16} + c_{16} = a_{16} \neq b_{17}$ જે સત્ય નથી.

વિકલ્પ (D) માટે $a_{17} = b_{17} + c_{17} = c_{17} + b_{16}$

$\therefore$ $b_{17} = b_{16}$ જે સત્ય નથી તથા $c_{17} \neq c_{16} + c_{15}$ સત્ય નથી કારણ કે $c_n + c_{n+1} = c_{n+2}$ છે.

$\therefore$ સાચો જવાબ $a_{17} = a_{16} + a_{15}$ છે. ($\therefore$ B સત્ય નથી) **જવાબ :** (A)

(II) b_6 ની કિંમત ...... છે.

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 11

$b_6 = b_4 + b_5 = b_4 + b_4 + b_3 = 2b_4 + b_3 = 8$ **જવાબ :** (B)

$\rightarrow$ **બીજી રીત :**

અંતિમ અંક 1 હોય તેવી સંખ્યા નીચે મુજબ હોય :

○ ○ ○ ○ ○ ○

1

વચ્ચેના ચાર સ્થાનમાં 0 એક પણ વખત ન આવે તેવી સંખ્યાઓની સંખ્યા = 1

0 એક વખત આવે તેવી સંખ્યાઓ = 4 અને

બે વખત આવે તેવી સંખ્યાઓ = 3 (0101, 1010, 0110 વાળી)

$\therefore$ કુલ સંખ્યાઓ = 8

(અહીં n અંકોની સંખ્યા માટે પ્રથમ અંક 1 જ લેવો પડે.) **જવાબ :** (B)

(111) છ પત્ર અને છ કવર પર 1 થી 6 સુધીના નંબર આપીને 1 નંબરનો પત્ર 2 નંબરના કવરમાં આવે તથા એક પણ નંબરનો પત્ર તે જ નંબરના કવરમાં ન આવે તે રીતે દરેક કવરમાં ફક્ત એક જ પત્ર કુલ .... રીતે મૂકી શકાય.

(JEE Advance : 2014)

(A) 264 (B) 265 (C) 53 (D) 67

ઉકેલ : એક પણ પત્ર તે જ નંબરના કવરમાં ન મૂકવાના

કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= {}_6P_6 - {}_6P_5 + {}_6P_4 - {}_6P_3 + {}_6P_2 - {}_6P_1 + {}_6P_0$

$= 720 - 720 + 360 - 120 + 30 - 6 + 1$

$= 265$

અહીં 1 નંબરનો પત્ર અન્ય નંબરના કવરમાં મૂકવાના પ્રકારની સંખ્યા 5 છે, જે પૈકી 1 નંબરનો પત્ર 2 નંબરના કવરમાં મૂકવાના પ્રકાર = $\frac{265}{5} = 53$ **જવાબ :** (C)

(112) એક વર્તુળ પર n ભિન્ન બિંદુઓ લઈને પ્રત્યેક બિંદુઓની જોડને રેખાખંડથી જોડો. બે પાસપાસેનાં બિંદુઓને જોડતા દરેક રેખાખંડને વાદળી તથા બાકીના રેખાખંડોને લાલ રંગથી રંગો. જો લાલ અને વાદળી રેખાખંડોની સંખ્યા સરખી થાય તો $n =$ .... (જ્યાં $n \geq 2, n \in N$)

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

ઉકેલ : અહીં લાલ રેખાખંડ બહુકોણનો વિકર્ણ તથા વાદળી રેખાખંડ બહુકોણની બાજુ થશે. વિકર્ણોની સંખ્યા $\binom{n}{2} - n$ અને બાજુઓની સંખ્યા n થાય.

$\therefore \binom{n}{2} - n = n$

$\therefore n(n-1) = 4n$

$\therefore n^2 - 5n = 0$

$\therefore n(n-5) = 0$

$\therefore n = 0$ અથવા $n = 5$

$\therefore n = 5$ **જવાબ :** (B)

(113) $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 20$ થાય તેવા પાંચ ધન પૂર્ણાંકો $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5$ ની ભિન્ન ગોઠવણી $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ ની સંખ્યા = ... (JEE Advanced : 2014)

(A) 12 (B) 9 (C) 8 (D) 7

ઉકેલ : અહીં નીચે મુજબ 7 રીતે ગોઠવણી થઈ શકે

(1, 2, 3, 4, 10), (1, 2, 3, 5, 9), (1, 2, 3, 6, 8)

(1, 2, 4, 5, 8), (1, 2, 4, 6, 7), (1, 3, 4, 5, 7) (2, 3, 4, 5, 6) **જવાબ :** (D)

(114) સમતલમાં n રેખાઓ છે, જે પૈકી કોઈ પણ બે સંપાતી અથવા સમાંતર નથી અને કોઈ પણ ત્રણ સંગામી નથી. આ રેખાઓનાં છેદબિંદુઓને જોડીને નવી કેટલી રેખાઓ દોરી શકાય ?

(A) $\frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3)$ (B) $\frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3) + n$

(C) $\frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3) - n$ (D) $\frac{1}{8} n(n^2-1)(n-2) - n$

ઉકેલ : આપેલ રેખાઓનાં છેદબિંદુઓની સંખ્યા = ${}_nC_2 = N$ ધારો.

હવે દરેક રેખાને બાકીની $n-1$ રેખાઓ $n-1$ બિંદુઓમાં છેદે. આ $n-1$ બિંદુઓ સમરેખ થાય. માટે $n-1$ બિંદુમાંથી કોઈ પણ બે બિંદુઓ જોડવાથી એક જ રેખા મળે.

$\therefore$ નવી રેખાઓની સંખ્યા

$= {}_NC_2 - {}_nC_1 \times {}_{(n-1)}C_2$

$= \frac{1}{2} N(N-1) - n \times \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$= \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2} \left\{\frac{n(n-1)}{2} - 1\right\} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ $N = \frac{n(n-1)}{2}$

$= \frac{1}{8} n(n-1)(n^2-n-2) - \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)$

$= \frac{1}{8} n(n-1)(n^2-n-2-4n+8)$

$= \frac{1}{8} n(n-1)(n^2-5n+6)$

$= \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3)$ **જવાબ :** (A)

(115) સમતલમાં આવેલાં n બિંદુઓ પૈકી 4 બિંદુઓ સમરેખ છે. અન્ય કોઈ પણ ત્રણ બિંદુઓ સમરેખ નથી. આ બિંદુઓને શિરોબિંદુઓ તરીકે લઈ કેટલા ભિન્ન ચતુષ્કોણ બને ?

(A) $\binom{n}{4} - 1$ (B) $\binom{n}{4} - 4n + 15$ (C) $\binom{n-4}{4}$ (D) $\binom{n}{4} - 5$

ઉકેલ : ચાર ભિન્ન બિંદુઓ એક ચતુષ્કોણ રચે. પરંતુ આ ચાર બિંદુઓ પૈકી બે થી વધારે બિંદુઓ સમરેખ ન હોવાં જોઈએ.

n બિંદુઓમાંથી 4 બિંદુઓ પસંદ કરવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = $\binom{n}{4}$

4 સમરેખ બિંદુઓમાંથી 3 અને બાકીનાં બિંદુઓમાંથી 1 બિંદુ પસંદ કરવાના પ્રકાર

$= \binom{4}{3} \binom{n-4}{1} = 4(n-4) = 4n - 16$

4 સમરેખ બિંદુઓમાંથી 4 બિંદુઓ પસંદ કરવાના પ્રકાર = $\binom{4}{4} = 1$

$\therefore$ માંગેલ ચતુષ્કોણોની સંખ્યા $= \binom{n}{4} - \binom{4}{3}\binom{n-4}{1} - \binom{4}{4}$

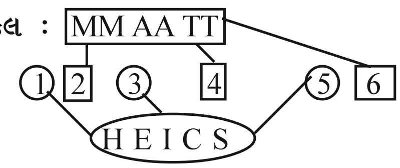
$= \binom{n}{4} - (4n - 16) - 1$

$= \binom{n}{4} - 4n + 15$ **જવાબ :** (B)

(116) MATHEMATICS શબ્દમાં જે અક્ષરોનું પુનરાવર્તન થતું નથી તે અક્ષરો અયુગ્મ સ્થાને અને જે અક્ષરોનું પુનરાવર્તન થાય છે તે અક્ષરો યુગ્મ સ્થાને આવે તે રીતે છ અક્ષરોના બનતા શબ્દોની સંખ્યા ...... છે.

(A) 720 (B) 540 (C) 2520 (D) 102

ઉકેલ :



અહીં H, E, I, C, S ને ત્રણ અયુગ્મ સ્થાનમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = ${}_5P_3 = 60$

ત્રણ યુગ્મ સ્થાનમાં બે સમાન અને એક ભિન્ન અથવા ત્રણે ભિન્ન અક્ષરોને

ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{3}{1}\binom{2}{1} 3! + 3! = 36 + 6 = 42$

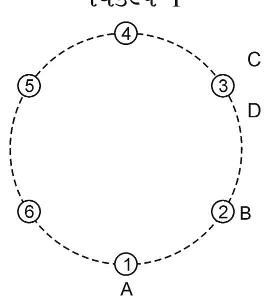
$\therefore$ 6 અક્ષરોના કુલ શબ્દોની સંખ્યા $= 60 \times 42 = 2520$ **જવાબ :** (C)

(117) છ વ્યક્તિઓ A, B, C, D, E, F એક વર્તુળાકાર ટેબલ પર કેટલી રીતે બેસી શકે કે જેથી Aની જમણી બાજુ B અથવા C અને B ની જમણી બાજુ C અથવા D આવે ?

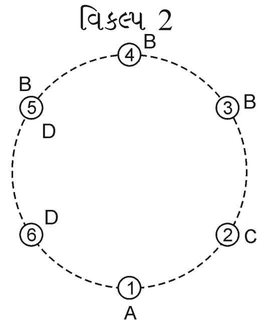
(A) 18 (B) 72 (C) 20 (D) 16

ઉકેલ : A ના સ્થાનને 1 તથા બાકીની પાંચ વ્યક્તિઓના સ્થાનને વિષમ ઘડી દિશામાં 2, 3, 4, 5 અને 6 નંબર આપો.

વિકલ્પ 1



વિકલ્પ 2



અથવા

(1) બીજા સ્થાનમાં B હોય, તો ત્રીજા સ્થાનમાં C અથવા D આવે અને બાકીના ત્રણ સ્થાનમાં ત્રણ વ્યક્તિ 3! રીતે બેસી શકે.

$\therefore$ આ વિકલ્પમાં ગોઠવણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= 1 \times 1 \times \binom{2}{1} \times 3! = 2 \times 6 = 12$

(2) બીજા સ્થાનમાં C હોય તો ત્રીજા અથવા ચોથા અથવા પાંચમા સ્થાનમાં B, $\binom{3}{1}$ રીતે બેસી શકે. B ની જમણી બાજુએ D એક રીતે બેસી શકે બાકીના બે સ્થાનમાં બાકીની બે વ્યક્તિ $2! = 2$ રીતે બેસી શકે. અહીં B અને D અનુક્રમે 3, 4 અથવા 4, 5 અથવા 5, 6 સ્થાને આવી શકે.

આ વિકલ્પમાં ગોઠવણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= 1 \times 1 \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1} \times 2! = 3 \times 2 = 6$

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= 12 + 6 = 18$ **જવાબ :** (A)

(118) પાંચ છોકરીઓ પાસપાસે આવે તે રીતે 5 છોકરા અને પાંચ છોકરીઓ એક હારમાં n રીતે બેસી શકે છે તથા ફક્ત 4 છોકરીઓ પાસપાસે આવે તે રીતે 5 છોકરા અને 5 છોકરીઓ એક હારમાં m રીતે બેસી શકે છે. તો $m : n =$ ......

(JEE-Advanced : 2015)

ઉકેલ : પ્રથમ 5 છોકરીઓને હારમાં બેસવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = 5!

હવે 5 છોકરીઓનું જૂથ અને 5 છોકરાઓને હારમાં બેસવાના કુલ પ્રકાર = 6!

$\therefore$ પાંચ છોકરીઓ પાસપાસે આવે તેવી ગોઠવણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= n = 5! \times 6!$

		B B B B B			

4 છોકરીઓનું જૂથ

હવે 5 માંથી 4 છોકરીઓને હારમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= {}_5P_4$ તથા

4 છોકરીઓના જૂથને એક વ્યક્તિ માનો આ એક વ્યક્તિ અને 5 છોકરા એમ 6 વ્યક્તિઓને હારમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = 6!

હવે બાકીની એક છોકરી ચાર છોકરીઓના જૂથ પાસે ન આવે તે રીતે આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ 5 □ (ચોરસ) સ્થાનમાં 5 રીતે બેસી શકે.

આમ m = ફક્ત ચાર જ છોકરીઓ પાસપાસે આવે તે રીતે 5 છોકરા અને 5 છોકરીઓને એક હારમાં બેસવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= {}_5P_4 \times 6! \times 5$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{{}_5P_4 \times 6!. \times 5}{6! \times 5!} = 5$$

$\therefore m : n = 5$

(119) $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots (1 + x^{100})$ ના વિસ્તરણમાં x^9 નો સહગુણક ...... છે.

(JEE Advanced : 2015)

ઉકેલ :

(1) $(1 + x^9)$ માં x^9 નો સહગુણક = 1

(2) $(1 + x)(1 + x^8)$ માં x^9 નો સહગુણક = 1

$(1 + x^2)(1 + x^7)$ માં x^9 નો સહગુણક = 1

$(1 + x^3)(1 + x^6)$ માં x^9 નો સહગુણક = 1

$(1 + x^4)(1 + x^5)$ માં x^9 નો સહગુણક = 1

(3) $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^6)$ માં x^9 નો સહગુણક = 1

$(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)$ માં x^9 નો સહગુણક = 1

$(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)$ માં x^9 નો સહગુણક = 1

$\therefore$ x^9 નો સહગુણક = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8

નોંધ : 1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5, 1 + 2 + 6, 1 + 3 + 5, 2 + 3 + 4 માંથી મળે. **જવાબ : 8**

(120) આઠ સદિશોનો ગણ $V = \{a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \mid a, b, c \in \{-1, 1\}\}$ લો. Vમાંથી ત્રણ અસમતલીય સદિશો 2^p રીતે પસંદ કરી શકાય તો p = ...

ઉકેલ : અહીં કુલ સદિશો જૂથ 1 અને જૂથ 2 માં નીચે મુજબ છે :

જૂથ 1	**જૂથ 2**
$\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$	$-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$
$-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$	$\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$
$\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$	$-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$
$-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$	$\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

2^p = ત્રણ અસમતલીય સદિશો પસંદ કરવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા

$$= \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{3}{2} + \binom{4}{3}\binom{4}{0} + \binom{4}{0}\binom{4}{3}$$

$= 12 + 12 + 4 + 4$

$= 32$

$\therefore p = 5$ **જવાબ : 5**

(121) એક ઢગમાં 1 થી n પૂર્ણાંક લખેલાં n પત્તાં છે. આ ઢગમાંથી બે ક્રમિક પૂર્ણાંકનાં પત્તાં કાઢી નાખીને બાકીનાં પત્તાં પરનાં પૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરતાં 1224 થાય છે. જો દૂર કરેલાં પત્તાંમાં નાના પૂર્ણાંકવાળા પત્તાનો પૂર્ણાંક k હોય તો $k - 20$ = ... (JEE Advanced : 2013)

ઉકેલ : પ્રથમ n પૂર્ણાંકોનો સરવાળો = $\frac{n(n+1)}{2}$

જો દૂર કરેલાં પત્તાં પરના નંબર k અને $k + 1$ હોય તો બાકીનાં પત્તાં પરના પૂર્ણાંકોનો સરવાળો =

$\frac{n(n+1)}{2} - k - (k+1) = 1224$ આપેલ છે.

$\therefore n(n + 1) = 2450 + 4k$

$\therefore n(n + 1) = 2550 - 100 + 4k$

$\therefore n(n + 1) = 50 \times 51 - 100 + 4k$

$\therefore n = 50$ અને $k = 25$

$\therefore k - 20 = 5$ **જવાબ : 5**

(122) $(1 + x^2)^4 (1 + x^3)^7 (1 + x^4)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં x^{11} નો સહગુણક ...... છે. (JEE Advanced : 2014)

(A) 1051 (B) 1106 (C) 1113 (D) 1120

ઉકેલ : અહીં x^{11} ગુણાકારમાં આવી રીતે શક્ય છે.

$$\begin{aligned} x^{11} &= x^0\, x^3\, x^8 = (x^2)^0\, (x^3)^1\, (x^4)^2, \\ &= x^8\, x^3\, x^0 = (x^2)^4\, (x^3)^1\, (x^4)^0 \\ &= x^2\, x^9\, x^0 = (x^2)^1\, (x^3)^3\, (x^4)^0, \\ &= x^4\, x^3\, x^4 = (x^2)^2\, (x^3)^1\, (x^4)^1 \end{aligned}$$

$\therefore x^{11}$ નો સહગુણક $= \binom{4}{0}\binom{7}{1}\binom{12}{2} + \binom{4}{4}\binom{7}{1}\binom{12}{0} + \binom{4}{1}\binom{7}{3}\binom{12}{0} + \binom{4}{2}\binom{7}{1}\binom{12}{1}$

$= (1 \times 7 \times 66) + (1 \times 7 \times 1) + (4 \times 35 \times 1) + (6 \times 7 \times 12)$

$= 462 + 7 + 140 + 504$

$= 1113$ **જવાબ :** (C)

(123) અંકો 3, 3, 5, 5, 5, 8, 8, 8 અને 8 નો ઉપયોગ કરીને 4000 થી મોટી ચાર અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

(A) 48 (B) 60 (C) 51 (D) 87

ઉકેલ :

વિકલ્પ 1 હજારના સ્થાનમાં 8 હોય તેવી સંખ્યાઓ

ⓧ8 ○ ○ ○

3, 3, 5, 5, 5, 8, 8, 8

ત્રણે અંકો ભિન્ન હોય અથવા ત્રણે અંકો સમાન હોય અથવા બે અંકો સમાન (એક જોડ) હોય અને એક અંક ભિન્ન હોય તેવી સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 3! + 2 + \binom{3}{1}\binom{2}{1}\frac{3!}{2!} = 6 + 2 + 18 = 26$

વિકલ્પ 2 હજારના સ્થાનમાં 5 હોય તેવી સંખ્યાઓ

ⓧ5 ○ ○ ○

3, 3, 5, 5, 8, 8, 8, 8

ત્રણે અંકો ભિન્ન હોય અથવા ત્રણે અંકો સમાન હોય અથવા બે અંકો સમાન (એક જોડ) હોય અને એક અંક ભિન્ન હોય તેવી સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 3! + 1 + \binom{3}{1}\binom{2}{1}\frac{3!}{2!} = 6 + 1 + 18 = 25$

4 અંકોની માંગેલ સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 26 + 25 = 51$ **જવાબ :** (C)

(124) GUJARAT શબ્દના અક્ષરોની મદદથી અક્ષર G આવે જ તેવી રીતે ચાર અક્ષરના કુલ કેટલા શબ્દો બને ?

(A) 300 (B) 296 (C) 336 (D) 288

ઉકેલ :

ક્રમ	પ્રકાર	પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા	ગોઠવણીની સંખ્યા
1	ચારેય અક્ષર ભિન્ન હોય	$\binom{1}{1}\binom{5}{3} = 10$	$10 \times 4! = 240$
2	બે A અને બે અક્ષર ભિન્ન હોય	$\binom{1}{1}\binom{2}{2}\binom{4}{1} = 4$	$4 \times \frac{4!}{2!} = 48$

કુલ શબ્દોની સંખ્યા $= 240 + 48 = 288$ **જવાબ :** (D)

(125) પાંચ A, ચાર B, ત્રણ C અને બે D વડે પાંચ અક્ષરોના કેટલા શબ્દો બને ?

(A) 901 (B) 900 (C) 41 (D) 910

ઉકેલ : પાંચેય અક્ષર સમાન હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા = 1 (એક શબ્દ AAAAA બને.)

ચાર અક્ષર સમાન અને એક અક્ષર ભિન્ન હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

$$= \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \frac{5!}{4!} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

(ઉદાહરણ તરીકે AAAAB, BBBBD, BCBBB)

ત્રણ અક્ષર સમાન અને બે અક્ષર અન્ય પણ સમાન હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

$$= \binom{3}{1}\binom{3}{1} \times \frac{5!}{3!2!} = 3 \times 3 \times 10 = 90$$ (ઉદાહરણ તરીકે AAADD)

ત્રણ અક્ષર સમાન અને બે અક્ષર ભિન્ન હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

$$= \binom{3}{1} \times \binom{3}{2} \times \frac{5!}{3!} = 3 \times 3 \times 20 = 180$$ (ઉદાહરણ તરીકે AAABC)

બે અક્ષરોની બે જોડ અને એક અક્ષર ભિન્ન હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

$$= \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \frac{5!}{2!2!} = 6 \times 2 \times 30 = 360$$ (ઉદાહરણ તરીકે AABBC)

બે અક્ષરોની એક જોડ અને ત્રણ અક્ષર ભિન્ન હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

$$= \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} \times \frac{5!}{2!} = 4 \times 60 = 240$$ (ઉદાહરણ તરીકે AABCD)

કુલ શબ્દોની સંખ્યા = 1 + 30 + 90 + 180 + 360 + 240 = 901 **જવાબ :** (A)

નિષ્કર્ષ તથા કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાન આપેલાં હોય છે. આ બંને વિધાનો પૈકી સ્વતંત્ર રીતે એક સાચું અને બીજું ખોટું હોઈ શકે અથવા બંને સાચાં હોય તો વિધાન 2 એ વિધાન 1ની પૂર્ણ સમજુતી છે કે નહિ તે તપાસવાનું રહે છે.

વિધાન 1 : નિષ્કર્ષ

વિધાન 2 : કારક

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં 4 વિકલ્પો (A), (B), (C) તથા (D) નીચે પ્રમાણે હોય છે.

(A) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે તથા વિધાન 2 સત્ય છે.

(126) એક દુકાનમાં પાંચ પ્રકારના આઈસક્રીમ ઉપલબ્ધ છે. એક બાળક છ આઈસક્રીમ ખરીદવા માગે છે.

વિધાન 1 : બાળક છ આઈસક્રીમ ${}_{10}C_5$ જેટલી ભિન્ન રીતે ખરીદી શકે.

વિધાન 2 : બાળક છ આઈસક્રીમ ભિન્ન રીતે ખરીદી શકે તેના પ્રકારોની સંખ્યા અને 6, A તથા 4, B ને એક હારમાં ગોઠવવાના ભિન્ન પ્રકારોની સંખ્યા સમાન છે. (AIEEE : 2008)

ઉકેલ : 6 A અને 4 B ને હારમાં ગોઠવવાના પ્રકાર = $\frac{10!}{6!4!} = {}_{10}C_6$

= 10 માંથી 6 આઈસક્રીમ પસંદ કરવાના ભિન્ન પ્રકારોની સંખ્યા $\neq {}_{10}C_5$

∴ વિધાન-2 સત્ય છે તથા વિધાન-1 અસત્ય છે. **જવાબ :** (D)

(127) **વિધાન 1 :** અંકો 0 અને 1 ની મદદથી 3 × 3 પ્રકારના કુલ 512 શ્રેણિકો બની શકે.

વિધાન 2 : n ભિન્ન વસ્તુઓને m સ્થાનમાં પુનરાવર્તન સહિત ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = n^m

ઉકેલ : અહીં દરેક વસ્તુને m પૈકી કોઈ પણ સ્થાનમાં n રીતે ગોઠવી શકાય.

∴ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = $n \times n \times n \times \ldots m$ વખત = n^m

∴ 0 અને 1 ને નવ સ્થાનમાં ગોઠવવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = $2^9 = 512$

∴ બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ :** (A)

(128) **વિધાન 1 :** 70! ના અંતમાં શૂન્યોની સંખ્યા 16 છે.

વિધાન 2 : દરેક ધન પૂર્ણાંક n ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં 10નો મહત્તમ ઘાતાંક અને 5 નો મહત્તમ ઘાતાંક સમાન હોય છે.

ઉકેલ : 70! માં 5નો મહત્તમ ઘાતાંક $= \left[\frac{70}{5}\right] + \left[\frac{70}{25}\right] + \left[\frac{70}{125}\right] = 14 + 2 + 0 = 16$

∴ 70! ના અંતમાં શૂન્યોની સંખ્યા 16 છે.

∴ વિધાન 1 સત્ય છે.

તથા વિધાન 2 અસત્ય છે કારણ કે 125માં 5નો મહત્તમ ઘાતાંક = 3, જ્યારે 10 નો મહત્તમ ઘાતાંક = 0

∴ 5 નો મહત્તમ ઘાતાંક ≠ 10 નો મહત્તમ ઘાતાંક

સ્પષ્ટ છે કે n એ 2 વડે વિભાજ્ય ન હોય, તો 10 નો મહત્તમ ઘાતાંક 0 જ થાય. **જવાબ :** (C)

(129) **વિધાન 1 :** n ક્રમિક પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર $n!$ વડે વિભાજ્ય છે.

વિધાન 2 : કોઈપણ n ક્રમિક પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર $(n+1)!$ વડે વિભાજ્ય નથી. ($\forall\, n \in N$)

ઉકેલ : n ક્રમિક પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર $= n(n-1) \ldots (n-r+1) = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{r!} \times r!$

∴ r ક્રમિક પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર $= \binom{n}{r} \times r!$ એ $r!$ વડે વિભાજ્ય છે કારણ કે $\binom{n}{r} \in N$

∴ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 અસત્ય છે કારણ કે 24 × 25 એ (2 + 1) ! = 3! વડે વિભાજ્ય છે. ($n = 2$) **જવાબ :** (C)

(130) **વિધાન 1** : $(n!)!$ એ $n!^{(n-1)!}$ વડે વિભાજ્ય છે.

વિધાન 2 : $(kn)!$ એ $(n!)^k$ વડે વિભાજ્ય છે. ($k, n \in N$)

ઉકેલ : kn ભિન્ન વસ્તુઓના k સરખા ભાગ કરવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા

$= \binom{kn}{n}\binom{kn-n}{n}\binom{kn-2n}{n} \ldots \binom{2n}{n}\binom{n}{n} \times \frac{1}{k!} = \frac{(kn)!}{(n!)^k\, k!}$ એક પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

∴ $(kn)!$ એ $(n!)^k$ વડે વિભાજ્ય છે.

∴ વિધાન 2 સત્ય છે.

હવે વિધાન 2 માં $k = (n-1)!$ લેતાં,

$\{(n-1)!\, n\}!$ એ $(n!)^{(n-1)!}$ વડે વિભાજ્ય છે.

∴ $(n!)!$ એ $(n!)^{(n-1)!}$ વડે વિભાજ્ય છે.

∴ વિધાન 1 પણ સત્ય છે. તથા વિધાન 2 ની મદદથી વિધાન 1 સાબિત થઈ શકે છે.

∴ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ :** (A)

એક કરતાં વધારે સાચા જવાબો હોય તેવા પ્રશ્નો

(131) 28! એ ...... વડે વિભાજ્ય છે.

(A) 30^6 (B) 30^7 (C) 90^6 (D) 6×90^6

ઉકેલ : 28! માં 2 નો મહત્તમ ઘાતાંક $= \left[\frac{28}{2}\right] + \left[\frac{28}{4}\right] + \left[\frac{28}{8}\right] + \left[\frac{28}{16}\right] = 14 + 7 + 3 + 1 = 25$

28! માં 3 નો મહત્તમ ઘાતાંક $= \left[\frac{28}{3}\right] + \left[\frac{28}{9}\right] + \left[\frac{28}{27}\right] = 9 + 3 + 1 = 13$

28! માં 5 નો મહત્તમ ઘાતાંક $= \left[\frac{28}{5}\right] + \left[\frac{28}{25}\right] = 5 + 1 = 6$

∴ $28! = 2^{25} \times 3^{13} \times 5^6 \times 7^a \times 11^b \times 13^c \times \ldots$

$= 30^6 \times 2^{19} \times 3^7 \times 7^a \times 11^b \times 13^c \times \ldots$

જે 30^6, 90^6 અને 6×90^6 વડે વિભાજ્ય છે પરંતુ 30^7 વડે વિભાજ્ય નથી કારણ કે 28! માં 5 નો મહત્તમ ઘાતાંક 6 છે.

જવાબ : (A), (C), (D)

(132) $r = \ldots\ldots$ માટે $\binom{2n+1}{r}$ મહત્તમ થાય. ($n \in N$)

(A) $\left\lceil \frac{2n+1}{2} \right\rceil$ (B) $\left\lfloor \frac{2n+3}{2} \right\rfloor$ (C) $\left\lfloor \frac{2n+5}{2} \right\rfloor$ (D) $[n+1]$

ઉકેલ : $\left\lceil \frac{2n+1}{2} \right\rceil = \left\lceil n + \frac{1}{2} \right\rceil = n + 1$

$\left\lfloor \frac{2n+3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor n + \frac{3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor (n+1) + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + 1$

$\left\lfloor \frac{2n+5}{2} \right\rfloor = \left\lfloor (n+2) + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + 2$

$[n+1] = n + 1$

જો n અયુગ્મ હોય, તો $r = \frac{n+1}{2}$ અને $r = \frac{n-1}{2}$ માટે $\binom{n}{r}$ મહત્તમ થાય.

અહીં $2n + 1$ અયુગ્મ હોવાથી $r = \frac{2n+1+1}{2} = n + 1$ અને $r = \frac{2n+1-1}{2} = n$ માટે $\binom{2n+1}{r}$ મહત્તમ થાય.

$\therefore$ $r = n + 1$ અને $r = n$ માટે $\binom{2n+1}{r}$ મહત્તમ થાય.

$\therefore$ (A), (B), (D) સાચા જવાબો છે. **જવાબ :** (A), (B), (D)

(133) $2n$ બાજુઓવાળા બહિર્મુખ બહુકોણના વિકર્ણોની સંખ્યા ...... છે.

(A) $\binom{n}{2} - 2n$ (B) $2n^2 - 3n$ (C) $\binom{2n}{2}$ (D) $\binom{2n}{2} - 2n$

ઉકેલ : વિકર્ણોની સંખ્યા $= \binom{2n}{2} - 2n$

$$= \frac{(2n)\,(2n-1)}{2} - 2n$$

$$= 2n\,\frac{(2n-1-2)}{2}$$

$$= 2n\,\frac{(2n-3)}{2} = n\,(2n-3) = 2n^2 - 3n$$

જવાબ : (B), (D)

(134) $n =$ ...... માટે $\binom{2n}{4}, \binom{2n}{5}$ અને $\binom{2n}{6}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

(A) $\frac{7}{2}$ (B) 7 (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$ અથવા 7

ઉકેલ : $2n = m$ ધારો.

$\binom{m}{4}, \binom{m}{5}$ અને $\binom{m}{6}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$$\Leftrightarrow \binom{m}{4} + \binom{m}{6} = 2\binom{m}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m!}{4!(m-4)!} + \frac{m!}{6!(m-6)!} = 2\,\frac{m!}{5!(m-5)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(m-4)(m-5)} + \frac{1}{6\times 5} = \frac{2}{5(m-5)}$$

$\Leftrightarrow$ $30 + (m-4)\,(m-5) = 12\,(m-4)$

$\Leftrightarrow$ $30 + m^2 - 9m + 20 = 12m - 48$

$\Leftrightarrow$ $m^2 - 21m + 98 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(m-7)\,(m-14) = 0$

$\Leftrightarrow$ $m = 7$ અથવા $m = 14$

$\Leftrightarrow$ $2n = 7$ અથવા $2n = 14$

$\Leftrightarrow$ $n = \frac{7}{2}$ અથવા $n = 7$

જવાબ : (A), (B), (D)

(135) જો n ધન પૂર્ણાંક હોય તો નીચેના પૈકી ...... સત્ય છે :

(A) $n! \le n^{n+1}$ (B) $n!\,(n^n) < (2n)!$ (C) $n!\,(n^n) \le (2n)!$ (D) $n! < (n^n)$

ઉકેલ : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \le n \times n \times n \times \ldots \times n$ (n વખત)

$\le n^n$

$\le n^n \times n$

$\le n^{n+1}$

$\therefore n! \le n^{n+1}$ સત્ય છે.

$n!\,(n^n) = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \times (n \times n \times n \times \ldots \times n$ n વખત$)$

$< 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \times (n+1) \times (n+2) \times \ldots \times (n+n)$

$= 1 \times 2 \times 3 \times \ldots 2n$

$= (2n)!$

$\therefore n!\,(n^n) < (2n)!$ સત્ય છે.

$\therefore n!\,(n^n) \le (2n)!$ સત્ય છે.

પરંતુ $n = 1$ માટે $n! < n^n$ સત્ય નથી. **જવાબ :** (A), (B), (C)

(136) જો $x =$ ...... તો $\binom{x-1}{4} - \binom{x-1}{3} < \frac{5}{4}\ {}_{(x-2)}P_2$

(A) 5, 6, 7, 8, 9, 10 (B) 9, 10 (C) 7, 8 (D) 6

ઉકેલ : અહીં $x - 1 \ge 4$, $x - 1 \ge 3$, $x - 2 \ge 2$

$\therefore x \ge 5, x \ge 4$

$\therefore x \ge 5$

તથા $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} < \frac{5}{4}(x-2)(x-3)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) - 4(x-1) < 30$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 - 4x + 4 < 30$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x - 22 < 0$

$\Leftrightarrow (x-11)(x+2) < 0$

$\Leftrightarrow -2 < x < 11$

$\Leftrightarrow x = 5, 6, 7, 8, 9, 10$

અહીં ચારે ચાર વિકલ્પ સાચા છે. **જવાબ :** (A), (B), (C), (D)

●