

2020 (A)**गणित****द्वितीय पाली (Second Sitting)**

समय : 3 घंटे + 15 मिनट]

[पूर्णांक : 100

परीक्षार्थियों के लिए निर्देश : 2019 (A) प्रथम पाली का निर्देश देखें।

खण्ड-अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

निम्नांकित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प चुनें।

50 × 1 = 50

- $\tan 30^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cot 60^\circ \cdot \operatorname{cosec} 30^\circ =$
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1
- एक घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 216 cm^2 है तो इसका आयतन है
(A) 144 cm^3 (B) 196 cm^3 (C) 212 cm^3 (D) 216 cm^3
- निम्नलिखित में कौन-सा द्विघात समीकरण नहीं है?
(A) $5x + 2x^2 = x^2 + 3$ (B) $x^3 - x^2 = (x - 1)^3$
(C) $(x + 3)^2 = 3(x^2 - 5)$ (D) $(\sqrt{2}x + 3)^2 = 2x^2 + 5$
- समान ऊँचाई वाले दो बेलनों के आयतनों का अनुपात 9 : 16 है, तो उनके वक्र पृष्ठों के क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?
(A) 3 : 4 (B) 2 : 3 (C) 3 : 1 (D) 4 : 3
- यदि P(5, 6) बिन्दु A(6, 5) और B(4, y) में शामिल होने वाले रेखाखंड AB का मध्यबिन्दु है, तो y बराबर क्या है?
(A) 5 (B) 7 (C) 12 (D) 16
- $\cot(90^\circ - A) =$
(A) $\cot A$ (B) $\tan A$ (C) $\sin A$ (D) इनमें से कोई नहीं
- $\sqrt{3}$ है एक
(A) परिमेय संख्या (B) प्राकृत संख्या (C) अपरिमेय संख्या (D) इनमें से कोई नहीं
- यदि $\operatorname{cosec} \theta = \sqrt{10}$ हो, तो $\sec \theta = ?$
(A) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{10}}$
- बिन्दुओं R(x_1, y_1) और S(x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्यबिन्दु के नियामक हैं
(A) $\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
(C) $\left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$ (D) $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- दो भिन्न त्रिज्याओं वाले वृत्त हमेशा होते हैं
(A) सर्वांगसम (B) समरूप
(C) सर्वांगसम और समरूप (D) इनमें से कोई नहीं
- किसी पासे को फेंकने पर सम संख्या आने की प्रायिकता है
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

12. 96 का अभाज्य गुणनखंड क्या होगा?

- (A) $2^4 \times 3^2$ (B) $2^3 \times 3^3$ (C) $2^5 \times 3$ (D) 2×3^5

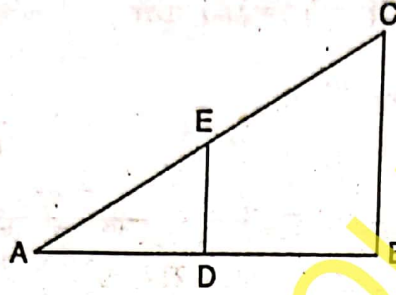
13. r त्रिज्या के गोले का आयतन होता है

- (A) $\frac{4}{3} \pi r^3$ (B) $\frac{2}{3} \pi r^3$ (C) $\frac{3}{2} \pi r^3$ (D) $\frac{1}{3} \pi r^3$

14. $(1 - \cos^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta) =$

- (A) 0 (B) -1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

15. चित्र में $BC \parallel DE$, $AD : AB = AE : x$, तो x बराबर है



- (A) BD (B) BC (C) AC (D) EC

16. k के किस मान के लिए समीकरण निकाय $4x + ky = 6$, $2x - 4y = 3$ के अनगिनत हल होंगे?

- (A) -2 (B) -8 (C) 8 (D) 2

17. समान्तर श्रेणी 6, 13, 20, ..., 216 का मध्य पद है

- (A) 118 (B) 104 (C) 111 (D) 125

18. बिन्दु $(6, -5)$ का भुज है

- (A) 6 (B) -5 (C) -6 (D) 5

19. $\sec^2 60^\circ - 1$ का मान है

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 0

20. यदि $(x^2 + 5x + 8)$ के शून्यक α तथा β हों तो $(\alpha + \beta) = ?$

- (A) 5 (B) -5 (C) 8 (D) -8

21. यदि एक ऊँचे खम्भे की ऊँचाई तथा उसकी भूमि पर छाया की लंबाई समान है, तो सूर्य का उन्नयन कोण है

- (A) 0° (B) 30° (C) 43° (D) 60°

22. यदि A और B दो ऐसे न्यूनकोण हों कि $\sin A = \cos B$, तब $(A + B) = ?$

- (A) 45° (B) 60° (C) 90° (D) 30°

23. बिन्दुओं $(4, -1)$ और $(2, 3)$ के बीच की दूरी है

- (A) $3\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{5}$

24. दो बेलनों की त्रिज्याओं का अनुपात $(1 : 2)$ है तथा उनकी ऊँचाइयों का अनुपात $(5 : 3)$ है, तो उनके आयतनों का अनुपात है

- (A) 4 : 9 (B) 11 : 12 (C) 5 : 12 (D) 20 : 9

25. यदि 1, 4, x , 5 तथा 12 का माध्य 7 है, तो x का मान है

- (A) 6 (B) 8 (C) 13 (D) 9

26. 8 cm त्रिज्या वाले वृत्त के अंतःवर्ग का क्षेत्रफल है

- (A) 64 cm^2 (B) 100 cm^2 (C) 125 cm^2 (D) 128 cm^2

27. $\triangle ABC$ तथा $\triangle DEF$ में $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF}$, ये दोनों त्रिभुज समरूप होंगे, यदि

- (A) $\angle B = \angle E$ (B) $\angle A = \angle D$ (C) $\angle B = \angle D$ (D) $\angle A = \angle F$

28. यदि रेखिक समीकरण का युग्म असंगत है, तो उसे निरूपित करने वाली रेखाएँ होंगी
 (A) समांतर (B) सदैव संपाती
 (C) सदैव प्रतिच्छेदी (D) प्रतिच्छेदी अथवा संपाती
29. दो संख्याओं का गुणनफल 8670 है और उसका म.स. 17 है, तो उसका ल.स. होगा
 (A) 102 (B) 85 (C) 107 (D) 510
30. 6, 8 और 22 का ल.स. और म.स. का अनुपात है
 (A) 132 : 1 (B) 2 : 22 (C) 8 : 6 (D) 12 : 3
31. $\sec \theta = ?$
 (A) $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ (B) $\frac{1}{\cos \theta}$ (C) $\frac{1}{\sin \theta}$ (D) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
32. यदि $3\cos \theta = 2$ हो, तो $(2\sec^2 \theta + 2\tan^2 \theta - 7)$ का मान होगा
 (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4
33. किसी घटना E के घटित होने की प्रायिकता $P(E)$ हो, तो निम्नांकित में कौन सही है?
 (A) $P(E) < 0$ (B) $P(E) > 1$
 (C) $-1 \leq P(E) \leq 1$ (D) $0 \leq P(E) \leq 1$
34. बहुपद $x^2 - 2x - 3$ के शून्यक कौन-से हैं?
 (A) 3, 1 (B) 3, -1 (C) -3, 1 (D) -3, -1
35. किसी वृत्त की स्पर्शरेखा उसे कितने बिन्दु पर स्पर्श करती है?
 (A) ∞ (B) 2 (C) 1 (D) 3
36. 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2 का बहुलक है
 (A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 1
37. यदि संख्याएँ $(2x - 1)$, $(3x + 2)$ तथा $(6x - 1)$ समांतर श्रेणी में हों, तो x का मान है
 (A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 0
38. यदि द्विघात समीकरण $px^2 + 4x + 3 = 0$ के मूल बराबर हों, तो P का मान होगा
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$
39. दो लगातार संख्याओं का म.स. है
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4
40. बिन्दु $(2, 3)$ की दूरी मूल बिन्दु से है
 (A) $\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{12}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) 5
41. यदि किसी समद्विबाहु त्रिभुज का आधार b और बराबर भुजा a हो, तो उसका क्षेत्रफल होगा
 (A) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (B) $\frac{a + b + c}{2}$ (C) $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$ (D) $\frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$
42. यदि समीकरण $x - 2y = 3$ तथा $3x + ky = 1$ का एक अद्वितीय हल हो, तो
 (A) $k = -6$ (B) $k \neq -6$ (C) $k = 0$ (D) $k \neq 0$
43. किसी मीनार की ऊँचाई 10 m है। जब सूर्य का उन्नयन कोण 45° हो, तो मीनार की छाया की लम्बाई जमीन पर क्या होगी?
 (A) 5 m (B) 8 m (C) 7 m (D) 1
44. किसी वृत्त के केन्द्र से 5 cm दूर स्थित बिन्दु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा 4 cm है, तो वृत्त की त्रिज्या है
 (A) 7 cm (B) 6 cm (C) 3 cm (D) 4 cm

45. दो पासों को एक साथ उछाला गया। दोनों पासों के ऊपरी सतह पर एक ही संख्या आने प्रायिकता
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$
46. $\frac{\tan 49^\circ}{\cot 41^\circ} =$
- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 6
47. समांतर श्रेणी 2, 7, 12, 17, ... के लिए $a_{30} - a_{20}$ का मान है (जहाँ a_n समांतर श्रेणी का n वाँ है।)
- (A) 100 (B) 10 (C) 50 (D) 20
48. द्विघात बहुपद $2x^2 + 5x - 12$ के शून्यक हैं
- (A) $\left(4, \frac{3}{2}\right)$ (B) $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$ (C) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$ (D) $(-3, 4)$
49. कितने दो अंकों की संख्या 3 से विभाज्य है?
- (A) 25 (B) 30 (C) 32 (D) 36
50. यदि $\sin A = \frac{8}{17}$ हो, तो $\cot A$ का मान होगा
- (A) $\frac{8}{15}$ (B) $\frac{17}{15}$ (C) $\frac{15}{8}$ (D) $\frac{8}{17}$
51. 5005 के कितने अभाज्य गुणखंड हैं?
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7
52. $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = ?$
- (A) -1 (B) $\sec^2 A$ (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$
53. एक घड़ी की मिनट की सूई 21 cm लंबी है। इसके द्वारा 10 मिनट में रचित क्षेत्रफल है
- (A) 126 cm^2 (B) 210 cm^2 (C) 231 cm^2 (D) 252 cm^2
54. बिन्दुएँ (3, 2) और (-3, 2) दोनों अवस्थित हैं
- (A) x-अक्ष पर (B) y-अक्ष पर
(C) x-अक्ष के एक ओर (D) x-अक्ष के दोनों ओर
55. $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y = -24$ के हल हैं
- (A) $x = 2, y = 4$ (B) $x = -2, y = -5$
(C) $x = -3, y = 1$ (D) $x = -2, y = 5$
56. 21, 18, 15, ... का कौन-सा पद शून्य है?
- (A) 6वाँ (B) 7वाँ (C) 8वाँ (D) 7वाँ
57. प्रथम पाद में स्थित किसी बिन्दु की x-अक्ष से दूरी क्या कहलाती है?
- (A) भुज (B) कोटि
(C) (A) और (B) दोनों (D) इनमें से कोई नहीं
58. बहुपद $2 - x(x - 1)$ के शून्यकों का गुणनफल है
- (A) -2 (B) 2 (C) 7 (D) 1
59. निम्नलिखित में कौन समांतर श्रेणी है?
- (A) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \dots$ (B) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \dots$
(C) $-10, -16, -2, 2, \dots$ (D) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \dots$
60. निम्नलिखित में कौन बहुपद नहीं है?
- (A) $2 - x^2 + \sqrt{3}x$ (B) $\frac{2}{3}x + 1$ (C) x^3 (D) $\frac{1}{x+1}$

खंड-ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

प्रश्न-संख्या 1 से 25 तक लघु उत्तरीय प्रश्न हैं, इनमें से किन्हीं 15 प्रश्नों का उत्तर दें, प्रत्येक के लिए 2 अंक निर्धारित हैं। 15 × 2 = 30

1. एक शंकु के आधार की त्रिज्या 5 cm तथा ऊँचाई 12 cm है। इसका वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें। 2
2. यूक्लिड विभाजकता एल्गोरिथ्म का प्रयोग कर 1651 तथा 2032 का म.स. निकालें। 2
3. उस त्रिभुज ABC का केन्द्रक बिन्दु ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष बिन्दु $(-1, 0)$, $(5, -2)$ और $(8, 2)$ है। 2
4. सिद्ध करें कि $\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = (\sec \theta - \tan \theta)^2$ 2
5. त्रिभुज ABC में भुजाओं AB तथा AC पर दो बिन्दु D और E क्रमशः इस प्रकार हैं कि $DE \parallel BC$ यदि $AD = (7x - 4)$, $DB = (3x + 4)$, $AE = (5x - 2)$ तथा $EC = 3x$, तो x का मान निकालें। 2
6. बहुपद $6x^2 - 3 - 7x$ के शून्यक ज्ञात करें तथा इसके शून्यकों और गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच करें। 2
7. दो संख्याओं का म.स. 18 तथा उनका गुणनफल 12960 है। तो उनका ल.स. ज्ञात करें। 2
8. दूरी सूत्र का प्रयोग कर दर्शाइए कि बिन्दुएँ $(-2, 5)$, $(0, 1)$ तथा $(2, -3)$ सररेखी हैं। 2
9. एक बेलन के आधार की परिधि 132 cm और उसकी ऊँचाई 25 cm है, तो बेलन का आयतन ज्ञात करें। 2
10. $1.\bar{8}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में बदलें। 2
11. समीकरण निकाय $7x - 2y = 3$ और $22x - 3y = 16$ को वज्र गुणन विधि से हल करें। 2
12. यदि समांतर श्रेणी का 7वाँ पद $\frac{1}{9}$ तथा 9वाँ पद $\frac{1}{7}$ है, तो 63वाँ पद का मान निकालें। 2
13. द्विघात सूत्र का प्रयोग कर समीकरण $3x^2 - 4x - 1 = 0$ का हल निकालें। 2
14. सिद्ध करें कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। 2
15. यदि बिन्दु (x, y) , बिन्दुओं $(6, -1)$ और $(2, 3)$ से समदूरस्थ है, तो सिद्ध करें कि $x - y = 3$ । 2
16. त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध करें कि $AB^2 = 2AC^2$ । 2
17. यदि $\tan \theta = \frac{a}{b}$, तो $\frac{a \sin \theta - b \cos \theta}{a \sin \theta + b \cos \theta}$ का मान ज्ञात करें। 2
18. तीन सिक्कों को एक बार उछाला जाता है। तीन शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात करें। 2
19. दो संख्याओं का अंतर 4 है तथा उनके व्युत्क्रमों का अंतर $\frac{4}{21}$ है। संख्याएँ ज्ञात करें। 2
20. निम्न का मान ज्ञात करें—

$$\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - 3 \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$$
 2
21. सिद्ध करें कि वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु होकर खींची गई त्रिज्या पर लंब होती है। 2
22. एक अर्द्धवृत्ताकार पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसका परिमाप 360 m है। 2
23. दो पासों को एक बार फेंका जाता है, तो दोनों पासों की संख्या का योग 8 आने की प्रायिकता ज्ञात करें। 2

24. निम्नलिखित बंटन का बहुलक ज्ञात करें—

वर्ग-अंतराल	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
बारंबारता	33	27	85	155	110	45	15

25. निम्नलिखित बंटन का माध्य ज्ञात करें—

वर्ग-अंतराल	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारंबारता	15	25	14	12	8	6

26. सिद्ध करें कि $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

27. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुएँ $P(3, 2)$, $Q(-2, -3)$ और $R(2, 3)$ एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

प्रश्न-संख्या 28 से 35 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। इस कोटि के प्रत्येक प्रश्न के लिए 5 अंक निर्धारित हैं। किन्हीं 4 प्रश्नों का उत्तर दें। $4 \times 5 = 20$

28. समीकरण युग्म $3x - y = 2$ तथा $9x - 3y = 6$ का ग्राफ खींचे और हल करें।
29. एक बहुमंजिला भवन के शिखर से देखने पर एक 8 m ऊँचे भवन के शिखर और तल के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। बहुमंजिला भवन की ऊँचाई और दोनों भवनों के बीच की दूरी ज्ञात करें।
30. सिद्ध करें कि किसी वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज होता है।
31. पाँच वर्ष पूर्व, A की आयु, B की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात् A की आयु, B की आयु की दोगुनी हो जाएगी। A और B की वर्तमान आयु ज्ञात करें।
32. सिद्ध करें कि $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$
33. एक त्रिभुज ABC की रचना करें जिसमें $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$ तथा $\angle ABC = 60^\circ$ है। फिर, एक त्रिभुज की रचना करें जिसकी भुजाएँ $\triangle ABC$ की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ गुनी हों।
34. एक मोटर बोट को धारा के प्रतिकूल 30 km और धारा के अनुकूल 28 km जाने में 7 घंटे का समय लगता है। वह धारा के प्रतिकूल 21 km जाकर 5 घंटे में वापस आ सकती है। शांत जल में मोटर बोट की चाल और धारा की चाल ज्ञात करें।
35. एक त्रिभुज ABC के अंतःवृत्त की त्रिज्या 4 cm है तथा उन दो रेखाखंडों BD तथा DC की लंबाइयाँ, जिनमें भुजा BC स्पर्शबिन्दु D द्वारा विभाजित होती है, 6 cm तथा 8 cm हैं। भुजाओं AB तथा AC की लंबाइयाँ ज्ञात करें।

उत्तर (Answers)

खण्ड-अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

- | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (D) | 2. (D) | 3. (B) | 4. (A) | 5. (B) | 6. (B) |
| 7. (C) | 8. (B) | 9. (B) | 10. (B) | 11. (D) | 12. (C) |
| 13. (A) | 14. (D) | 15. (C) | 16. (B) | 17. (C) | 18. (A) |
| 19. (B) | 20. (B) | 21. (C) | 22. (C) | 23. (D) | 24. (C) |
| 25. (C) | 26. (D) | 27. (C) | 28. (A) | 29. (D) | 30. (A) |
| 31. (B) | 32. (A) | 33. (D) | 34. (B) | 35. (C) | 36. (A) |
| 37. (A) | 38. (B) | 39. (B) | 40. (C) | 41. (D) | 42. (A) |
| 43. (D) | 44. (C) | 45. (B) | 46. (C) | 47. (C) | 48. (B) |
| 49. (B) | 50. (C) | 51. (A) | 52. (D) | 53. (C) | 54. (D) |
| 55. (D) | 56. (C) | 57. (B) | 58. (A) | 59. (B) | 60. (D) |

खंड-ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया गया है—त्रिज्या = 5 cm, ऊँचाई = 12 cm,

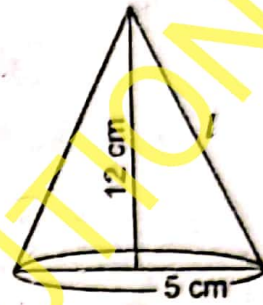
वक्र-पृष्ठ का क्षेत्रफल = ?

अब, तिरछी ऊँचाई = l

$$\text{अतः } l = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

अब, वक्र-पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 5 \times 13 = 65\pi \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$



2. 1651 एवं 2032

$$\therefore 1651 < 2032$$

$$\therefore a = 2032, b = 1651$$

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम के अनुसार,

$$a = bq + r \Rightarrow 2032 = 1651 \times 1 + 381 \text{ चूँकि शेषफल, } 381 \neq 0$$

\therefore 381 एवं 1651 में यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम प्रयोग करने पर,

$$1651 = 381 \times 4 + 127$$

चूँकि शेषफल, $127 \neq 0$

फिर से, 127 एवं 381 के बीच यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम प्रयोग करने पर,

$$381 = 127 \times 3 + 0$$

अतः यहाँ हमारा शेषफल = 0 आ गया एवं विभाजन प्रक्रिया यहाँ समाप्त हो जाती है।

चूँकि अंतिम भाजक 127 है।

अतः (2032, 1651) का HCF = 127 है। Ans.

3. प्रश्न के अनुसार माना कि एक त्रिभुज (ΔABC) है जिसकी शीर्ष बिंदु $A(-1, 0)$, $B(5, -2)$ और $C(8, 2)$ है।

अब, केन्द्रक के सूत्र के अनुसार माना की केन्द्रक G बिंदु पर है।

$$\text{अतः } G = \left(\frac{-1 + 5 + 8}{3}, \frac{0 + (-2) + 2}{3} \right) = (4, 0) \text{ Ans.}$$

$$4. \text{ L.H.S.} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

अंश एवं हर $(1 - \sin \theta)$ गुणा करने पर,

$$= \frac{(1 - \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} = \frac{(1 - \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{(1 - \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta}$$

$$= \left(\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2$$

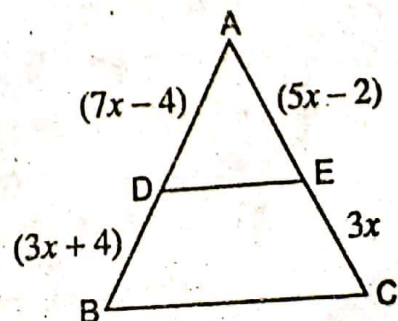
$$= (\sec \theta - \tan \theta)^2 = \text{R.H.S. Proved.}$$

5. प्रश्न के अनुसार, $DE \parallel BC$ (दिया गया है)

अतः थेल्स के नियम के अनुसार,

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} \text{ या, } \frac{7x - 4}{3x + 4} = \frac{5x - 2}{3x}$$

$$\text{या, } (7x - 4)3x = (5x - 2)(3x + 4)$$



$$\begin{aligned} \text{या,} & \quad 21x^2 - 12x = 15x^2 + 20x - 6x - 8 \\ \text{या,} & \quad 6x^2 - 26x + 8 = 0 \quad \text{या,} \quad 6x^2 - 24x - 2x + 8 = 0 \\ \text{या,} & \quad 6x(x - 4) - 2(x - 4) = 0 \quad \text{या,} \quad (x - 4)(6x - 2) = 0 \\ \therefore & \quad x = 4, \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{अतः } x = 4 \text{ एवं } \frac{1}{3} \text{ Ans.}$$

6. दिया गया बहुपद है— $6x^2 - 7x - 3$

$$\text{माना कि } y = 6x^2 - 7x - 3$$

अब, $y = 0$ रखने पर,

$$6x^2 - 9x + 2x - 3 = 0$$

$$\text{या,} \quad 3x(2x - 3) + 1(2x - 3) = 0$$

$$\text{या,} \quad (3x + 1)(2x - 3) = 0$$

$$\text{अतः शून्यक है— } \frac{3}{2} \text{ एवं } -\frac{1}{3}$$

$$\text{माना कि } \alpha = \frac{3}{2} \text{ एवं } \beta = -\frac{1}{3}$$

$$\text{अब, शून्यकों का योगफल } (\alpha + \beta) = \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{9 - 2}{6} = \frac{7}{6} = -\left(-\frac{7}{6}\right)$$

$$= \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल } (\alpha\beta) = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-1}{2} = \frac{-3}{6} = \frac{\text{स्थिरांक पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a} \quad \text{Proved}$$

7. दिया गया है— दो संख्याओं का म० स० = 18

दो संख्याओं का गुणनफल = 12960

अतः सूत्र के अनुसार, ल०स० \times म०स० = प्रथम संख्या \times द्वितीय संख्या

$$\text{ल०स०} \times 18 = 12960$$

$$\therefore \text{ल०स०} = 720 \text{ Ans.}$$

8. माना कि बिंदुएँ $A(-2, 5)$, $B(0, 1)$ तथा $C(2, -3)$ है।

अब दूरी सूत्र के अनुसार,

$$AB = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - (-3))^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$CA = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

ऊपर से हम देख पा रहे हैं कि $AB + BC = CA$

अतः यह संभव तभी है जब यह एक रेखा हो एवं सारी बिंदुएँ सरेख हो। **Proved.**

9. दिया गया है— बेलन के आधार की परिधि = 132 cm

ऊँचाई = 25 cm = h (माना कि ऊँचाई h है)

चूँकि बेलन के आधार की परिधि = $2\pi r$, जहाँ r = बेलन के आधार की त्रिज्या

$$\therefore 2\pi r = 132 \Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 132 \therefore r = 21 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{अब बेलन का आयतन} &= \pi r^2 h \text{ cm}^3 \\ &= \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 25 = 66 \times 21 \times 25 \text{ cm}^3 \\ &= 34650 \text{ cm}^3 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

10. माना कि $1.\bar{8} = x$

अतः $1.8888 = x$

अब दोनों तरफ 10 को गुणा करने पर,

$$18.888 = 10x$$

$$\Rightarrow 17 = 9x \therefore \frac{17}{9} = x$$

\therefore अतः $1.\bar{8}$ का $\frac{p}{q}$ रूप $\frac{17}{9}$ है। Ans.

11. दिए गए समीकरणों का निकाय है—

$$7x - 2y = 3 \quad \dots (i)$$

$$22x - 3y = 16 \quad \dots (ii)$$

अब वज्रगुणन विधि द्वारा हम पाते हैं कि

$$\begin{array}{r} x \qquad y \qquad 1 \\ -2 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 7 \quad \quad \quad -2 \\ -3 \quad \quad \quad 16 \quad \quad \quad 22 \quad \quad \quad -3 \end{array}$$

$$\therefore \frac{x}{-32 + 9} = \frac{y}{66 - 112} = \frac{1}{-21 + 44}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-23} = \frac{y}{-46} = \frac{1}{23}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-23}{23} = -1 \text{ एवं } y = -\frac{46}{231} = -2$$

अतः $x = -1$ एवं $y = -2$ है। Ans.

12. माना कि प्रथम पद a एवं सार्व-अंतर d है।

अब प्रश्न के अनुसार,

$$a + (7 - 1)d = \frac{1}{9} \text{ या, } a + 6d = \frac{1}{9} \quad \dots (i)$$

$$\text{एवं } a + (9 - 1)d = \frac{1}{7} \text{ या, } a + 8d = \frac{1}{7} \quad \dots (ii)$$

$$\text{समीकरण (ii) में से (i) को घटाने पर, } (a + 8d) - (a + 6d) = \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \quad \dots (iii)$$

$$\text{या, } 2d = \frac{9 - 7}{9 \times 7} = \frac{2}{9 \times 7} \therefore d = \frac{1}{63}$$

$$\text{समीकरण (iii) को (i) में रखने पर, } a + \frac{6}{63} = \frac{1}{9}$$

$$\text{या, } a = \frac{1}{9} - \frac{2}{21} = \frac{21 - 18}{9 \times 21} = \frac{3}{9 \times 21} = \frac{1}{63} \therefore a = \frac{1}{63}$$

$$\text{अब, } a + (63 - 1)d = a + 62d = \frac{1}{63} + 62 \times \frac{1}{63} = \frac{1 + 62}{63} = \frac{63}{63} = 1 \text{ Ans.}$$

13. दिए गए समीकरण है— $3x^2 - 4x - 1 = 0$

अतः $a = 3$, $b = -4$, एवं $c = -1$

($ax^2 + bx + c$ का रूप तुलना करने पर)

अब द्विघात सूत्र के अनुसार, वास्तविक शून्यक के लिए, $D > 0$

$$\text{अतः } D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 3 \times -1 = 16 + 12 = 28 > 0$$

$$\text{अब, } x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{28}}{2 \times 3} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2 \times 3} = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2 \times 3}, \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2 \times 3} = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}, \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$$

अतः दिए गए समीकरण के हल $\frac{2 + \sqrt{7}}{3}$ एवं $\frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ होंगे। **Ans.**

14. उत्तर के लिए 2011 (A) के प्रश्न-संख्या 32 देखें।

15. प्रश्न के अनुसार बिंदु $A(x, y)$ समदूरस्थ है बिंदुएँ $B(6, -1)$ एवं $C(2, 3)$ हैं।

चूँकि, $AB = AC$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

दोनों तरफ गुणा करने पर,

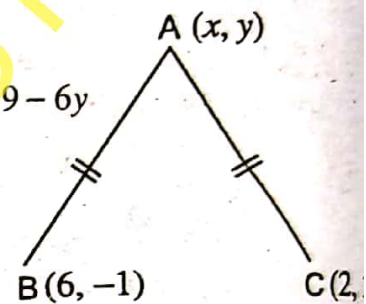
$$\Rightarrow (x-6)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 36 - 12x + y + 1 + 2y = x^2 + 4 - 4x + y^2 + 9 - 6y$$

$$\Rightarrow 37 - 13 = (-4x + 12x) + (-6y - 2y)$$

$$\Rightarrow 24 = 8x - 8y \Rightarrow 24 = 8(x - y)$$

अतः $x - y = 3$ है। **Proved.**



16. उत्तर के लिए 2011 (A) के प्रश्न-संख्या 38 देखें।

17. दिया गया है—

$$\text{यदि, } \tan \theta = \frac{a}{b} \text{ तो, } \frac{a \sin \theta - b \cos \theta}{a \sin \theta + b \cos \theta} = ?$$

ऊपर दिए गए प्रश्न के अंश एवं हर में $\cos \theta$ से भाग देने पर,

$$\text{अतः } \frac{\frac{a \sin \theta - b \cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{a \sin \theta + b \cos \theta}{\cos \theta}} = \frac{a \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - b \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{a \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + b \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{a \tan \theta - b}{a \tan \theta + b} = \frac{\frac{a \times a}{b} - b}{a \times \frac{a}{b} + b} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \text{ Ans.}$$

18. प्रश्न के अनुसार तीन सिक्कों को एक बार उछाला जाता है, तब कुल संभावनाएँ इस प्रकार हैं—

$HHH, HHT, HTT, TTH, THT, TTH, HTH, TTT$

अतः तीन शीर्ष आने की संभावनाएँ है = 1

अतः तीन शीर्ष आने की प्रायिकता = $\frac{1}{8}$ **Ans.**

19. माना कि एक संख्या x एवं दूसरा संख्या y है।

अब प्रश्न के अनुसार, $x - y = 4$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{4}{21}$$

$$\frac{x - y}{xy} = \frac{4}{21}$$

$$\frac{x - y}{xy} = \frac{4}{21}$$

समीकरण (i) को (ii) में रखने पर,

$$\frac{4}{xy} = \frac{4}{21} \Rightarrow xy = 21$$

चूँकि $x - y = 4$ या, $x = 4 + y$

समीकरण (iv) को (iii) में रखने पर,

$$(4 + y)y = 21 \text{ या, } 4y + y^2 = 21$$

$$\text{या, } y^2 + 4y - 21 = 0 \text{ या, } y^2 + 7y - 3y - 21 = 0$$

$$\text{या, } y(y + 7) - 3(y + 7) = 0$$

$$\text{या, } (y + 7)(y - 3) = 0 \therefore y = -7, 3$$

$y = -7$, समीकरण (iv) में रखने पर, $x = 4 - 7 = -3$

एवं $y = 3$, समीकरण (iv) में रखने पर, $x = 4 + 3 = 7$

अतः प्रथम संख्या $x = -3$, तब $y =$ दूसरा संख्या $= -7$

एवं प्रथम संख्या $x = 7$, तब $y =$ दूसरा संख्या $= 3$ Ans.

20. प्रश्न के अनुसार,
$$\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - 3 \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$$

$$= \frac{5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 3(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{4} + 4 \times \frac{4}{3} - 3}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{15 + 64 - 36}{4} = \frac{79 - 36}{12} = \frac{43}{12} \text{ Ans.}$$

21. दिया है— माना कि $C(O, r)$ एक वृत्त है तथा AB एक स्पर्श रेखा है जो वृत्त को P बिंदु पर स्पर्श करती है। स्पर्श बिंदु P से वृत्त की त्रिज्या OP खींची गई है।

सिद्ध करना है— $OP \perp AB$

रचना : AB रेखा पर बिंदु P के अतिरिक्त कोई बिंदु Q लिया तथा OQ को मिलाया जो वृत्त को R बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

प्रमाण : चूँकि AB वृत्त की स्पर्श रेखा है तथा P स्पर्श बिंदु है। अतः P के अतिरिक्त AB का प्रत्येक बिंदु वृत्त के बाहर स्थित होगा। अतएव Q वृत्त के बाहर स्थित है।

$$\therefore OP = OR = r \text{ (वृत्त की त्रिज्या)}$$

$$\therefore OP < OR + RQ \Rightarrow OP < OQ$$

अतः वृत्त के केन्द्र O से स्पर्श रेखा AB के किसी बिंदु (P के अतिरिक्त) के बीच की दूरियाँ में OP दूरी सबसे छोटा होगी।

$\therefore OP$, केन्द्र O से रेखा AB की न्यूनतम दूरी है।

चूँकि हम जानते हैं कि किसी बिंदु एवं एक रेखा के बीच की न्यूनतम दूरी उस रेखा पर लम्ब होती है।

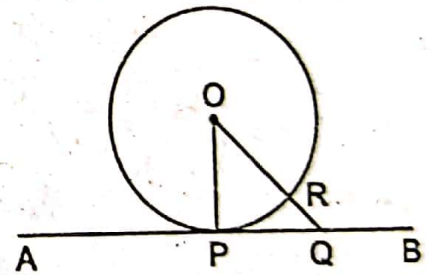
$\therefore OP \perp AB$ Proved.

22. दिया गया है—

अर्द्धवृत्ताकार पार्क का परिमाण = 360 m, अर्द्धवृत्ताकार पार्क का क्षेत्रफल = ?

$$\text{अब, प्रश्न के अनुसार, अर्द्धवृत्ताकार पार्क का परिमाण} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

$$\Rightarrow \pi r = 360 \Rightarrow \frac{22}{7} \times r = 360 \therefore r = \frac{7 \times 180}{11} = 114.5 \text{ मी}$$



$$\begin{aligned} \text{अब, अर्द्धवृत्ताकार का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 114.5 \times 114.5 \\ &= 20,618.18181 \text{ m}^2 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

23. यदि दो पासों को एक बार फेंका जाता है, तब कुल संभावनाएँ इस प्रकार हैं,

- (1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
 (2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)
 (3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
 (4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
 (5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)
 (6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

अब ऊपर से हम यह देख सकते हैं कि दोनों पासों की संख्या का योग 8 आने की संभावनाएँ हैं
 $= (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) = 5$

अतः $P(\text{दोनों पासों का योग } 8) = \frac{5}{36} \text{ Ans.}$

24. चूँकि दिया गया बंटन है—

वर्ग अंतराल	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
बारंबारता	33	27	85	155	110	45	15

ऊपर से हम यह आसानी से पता लगा सकते हैं कि सबसे ज्यादा बार बारंबारता वर्ग अंतराल (95-100) का 155 है। अर्थात् इस बंटन का बहुलक वर्ग 95-100

$\therefore l = 95, f_1 = 100, f_0 = 85, f_2 = 110$ एवं $h = 5$

$$\begin{aligned} \therefore \text{बहुलक} &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ &= 95 + \left(\frac{100 - 85}{2 \times 100 - 85 - 110} \right) \times 20 = 110 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

25. ऊपर्युक्त सारिणी को निम्न प्रकार से तैयार किया जा सकता है—

वर्ग-अंतराल	बारंबारता (f_i)	वर्ग-चिह्न (x_i)	$f_i \times x_i$
40-50	15	45	675
50-60	25	55	1375
60-70	14	65	910
70-80	12	75	900
80-90	8	85	680
90-100	6	95	570
कुल	$\Sigma f_i = 80$		$\Sigma f_i x_i = 5110$

$\therefore \text{माध्य} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{5110}{80} = 63.875 \text{ Ans.}$

26. दिया गया है— $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

$\therefore \text{L.H.S.} = \tan 48^\circ \tan(90 - 48)^\circ \tan 23^\circ \tan(90 - 23)^\circ$

$= \tan 48^\circ \cot 48^\circ \tan 23^\circ \cot 23^\circ$

$= 1 = \text{R.H.S. Proved.}$

27. दिया गया बिंदु है— $P(3, 2)$, $Q(-2, -3)$ और $R(2, 3)$
अब, दूरी नियम के अनुसार,

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$QR = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

अतः $(PQ)^2 + (PR)^2 = (QR)^2$

या, $(\sqrt{50})^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{52})^2$

या, $50 + 2 = 52$ या, $52 = 52$

अतः यह एक समकोण त्रिभुज है जो कि P पर लम्ब बनाती है।

28. समीकरण युग्म है—

$$3x - y = 2$$

$$9x - 3y = 6$$

समीकरण (i) से, $3x - y = 2$ या, $y = 3x - 2$

अतः $x = -1$ रखने पर, $y = 3 \times -1 - 2 = -5$

$x = 0$, रखने पर, $y = -2$

$x = 1$, रखने पर, $y = 1$

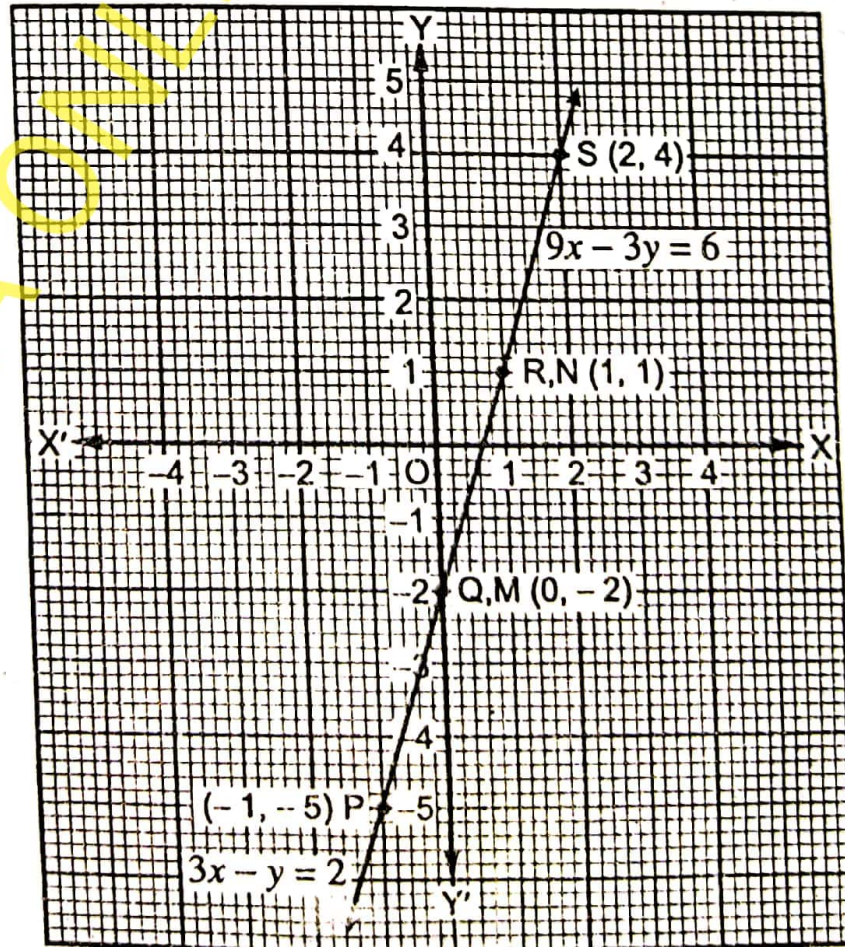
अतः सारिणी में लिखने पर,

x	-1	0	1
y	-5	-2	1

... (i)

... (ii)

अब समीकरण (ii) से, $9x - 3y = 6$ या, $\frac{9x - 6}{3} = y$



$$\text{अब, } x = 1, \text{ तब } y = \frac{9 - 6}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$x = 0, \text{ तब } y = \frac{-6}{3} = -2$$

$$x = 2, \text{ तब } y = \frac{12}{3} = 4$$

अतः सारिणी में लिखने पर,

x	0	1	2
y	-2	1	4

अतः (i) से हमारे पास बिंदुएँ हैं $P(-1, -5)$, $Q(0, -2)$, एवं $R(1, 1)$ और इसे दिखाने वाली लाइन PQR होगी।

अब, B से हमारे पास बिंदुएँ हैं $M(0, -2)$, $N(1, 1)$ एवं $S(2, 4)$ और इसे दिखाने वाली लाइन MNS होगी।

अतः हम पाते हैं कि उपर्युक्त दोनों समीकरणों के ग्राफ PQR एवं MNS एक-दूसरे के संपाती हैं अर्थात् सरल रेखा PQR एवं MNS पर स्थित सभी बिंदु दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। अतः दिए गए समीकरणों के निकाय के अनंत हल होंगे।

29. उत्तर के लिए 2011 (A) के प्रश्न-संख्या 45 देखें।

30. दिया गया है— $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है।

$$\therefore AB = DC \text{ एवं } AD = BC \quad \dots (i)$$

चूँकि खींचा गया वृत्त समान्तर भुजाओं को क्रमशः L, M, N एवं P बिंदु पर स्पर्श करता है।

$$\text{सिद्ध करना है कि } AB = BC = CD = DA$$

प्रमाण : किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ समान होती हैं।

$$AL = AP \quad \dots (ii)$$

$$BL = BM \quad \dots (iii)$$

$$CN = CM \quad \dots (iv)$$

$$DN = DP \quad \dots (iv)$$

समीकरण (i), (ii), (iii) एवं (iv) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$AL + BL + CN + DN = AP + BM + CM + DP$$

$$\text{अर्थात् } AB + CD = (AP + DP) + (BM + CM) = AD + BC$$

$$\text{या, } CD + CD = AD + BC = BC + BC$$

$$\text{या, } 2CD = 2BC \text{ या, } CD = BC$$

$$\text{अतः समीकरण (i) से, } AB = BC = CD = DA$$

$\therefore ABCD$ एक समचतुर्भुज है। Proved.

31. माना कि A की वर्तमान आयु x वर्ष तथा B की आयु y वर्ष है।

अब, प्रश्न के अनुसार

$$\text{पाँच वर्ष पहले, } A \text{ की आयु } = (x - 5) \text{ वर्ष एवं } B \text{ की आयु } = (y - 5) \text{ वर्ष}$$

$$\text{अतः } x - 5 = 3(y - 5) = 3y - 15$$

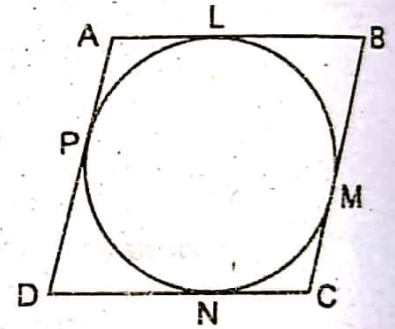
$$x - 3y = -15 + 5 = -10$$

... (i)

फिर प्रश्न के अनुसार,

$$\text{दस साल बाद, } A \text{ की आयु } = (x - 5 + 10) \text{ वर्ष } = (x + 5) \text{ वर्ष}$$

$$\text{एवं } B \text{ की आयु } = (y - 5 + 10) \text{ वर्ष } = (y + 5) \text{ वर्ष}$$



$$\text{अब, } x + 5 = 2(y + 5) = 2y + 10$$

$$x - 2y = 5$$

$$x = 5 + 2y$$

⇒ समीकरण (iii) को (i) में रखने पर,

$$5 + 2y - 3y = -10 \Rightarrow 5 - y = -10$$

$$\Rightarrow +y = -10 - 5 = +15 \therefore y = 15 \text{ वर्ष}$$

समीकरण (iv) को (iii) में रखने पर, $x = 5 + 2 \times 15 = 5 + 30 = 35$ वर्ष

समीकरण (iv) एवं (v) से, A एवं B की आयु क्रमशः 35 एवं 15 साल है। Ans.

$$32. \therefore \text{L.H.S.} = (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A \right) \left(\frac{1}{\cos A} - \cos A \right) = \frac{(1 - \sin^2 A)(1 - \cos^2 A)}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin A} \times \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \frac{\cos A \times \sin A}{\sin^2 A + \cos^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A + \cos^2 A} \cdot \frac{1}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2 A}{\sin A \cos A} + \frac{\cos^2 A}{\sin A \cos A}} = \frac{1}{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{1}{\tan A + \cot A} = \text{R.H.S. Proved.}$$

33. रचना के चरण :

(i) दिए गए सूचनाएँ से एक त्रिभुज ($\triangle ABC$) का निर्माण करें जिसमें $\angle B = 60^\circ$, $BC = 6$ cm एवं $AB = 5$ cm हो।

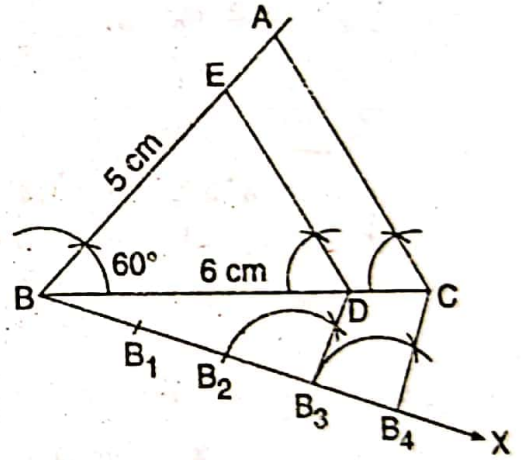
(ii) B बिंदु के नीचे एक उचित चाप का कोण बनाए ($LCBX$)

(iii) B बिंदु के नीचे चार कट डालें जो कि हो,
 $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

(iv) अब B_4 को C से मिलाए।

(v) अब, $B_4C \parallel B_3D$ बनाए एवं परस्पर C, D से $AC \parallel DE$ भी बनाए।

(vi) अब, प्राप्त त्रिभुज EBD जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC के $\frac{3}{4}$ गुणा है।



34. माना कि शांत जल में, मोटरवोट की चाल = x km/h

एवं शांत जल में धारा की चाल = y km/h

अब, मोटरवोट की धारा के अनुकूल कुल चाल = $(x + y)$ km/h

एवं मोटरवोट की धारा के प्रतिकूल कुल चाल = $(x - y)$ km/h

$$\text{अब, प्रश्न के अनुसार, } \frac{30}{x - y} + \frac{28}{x + y} = 7 \text{ या, } \frac{15}{x - y} + \frac{14}{x + y} = \frac{7}{2} \quad \dots (i)$$

$$\text{फिर, प्रश्न के अनुसार, } \frac{21}{x - y} + \frac{21}{x + y} = 5 \quad \dots (ii)$$

समीकरण (i) को 3 से एवं (ii) को 2 से गुणा करने पर,

$$\frac{45}{x - y} + \frac{42}{x + y} = \frac{21}{2} \quad \dots (iii)$$

$$\frac{42}{x-y} + \frac{42}{x+y} = 10 \quad \dots (iv)$$

अब समीकरण (iv) को (iii) से घटाने पर, $\frac{3}{x-y} = \frac{21}{2} - \frac{10}{1} = \frac{21-20}{2} = \frac{1}{2}$
 $\therefore x-y = 6 \quad \dots (v)$

अब समीकरण (v) को (i) में रखने पर, $\frac{15}{6} + \frac{14}{x+y} = \frac{7}{2}$
या, $\frac{14}{x+y} = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \therefore x+y = 14 \quad \dots (vi)$

समीकरण (v) एवं (vi) को हल करने पर, $2x = 20 \therefore x = 10 \quad \dots (vii)$

अब समीकरण (vii) को (vi) में रखने पर, $10 + y = 14 \therefore y = 14 - 10 = 4$

अतः मोटरवोट की चाल एवं धारा की चाल (शांत जल में) $x = 10 \text{ km/h}$ एवं $y = 4 \text{ km/h}$ क्रमशः है।

35. दिया गया है—

एक त्रिभुज ABC के अंतःवृत्त की त्रिज्या = 4 cm एवं उन दो रेखाखंडों BD तथा CD की लंबाईयाँ, जिनमें भुजा BC स्पर्शबिंदु D द्वारा विभाजित होती है, 6 cm तथा 8 cm है।

भुजाएँ AB एवं $AC = ?$

अब, प्रश्न के अनुसार,

चूँकि, $BD = 6 \text{ cm}$, तो $BE = 6 \text{ cm}$

एवं $CD = CF = 8 \text{ cm}$ (स्पर्श रेखा के सूत्र के अनुसार)

एवं $AE = AF = x \text{ cm}$

अब, हीरो के नियम से,

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल } (S) &= \frac{a+b+c}{2} = \frac{AB+BC+CA}{2} \\ &= \frac{(x+6) + (6+8) + (8+x)}{2} = \frac{28+2x}{2} = 14+x \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{(14+x)(8)(6) \times x} \quad \dots (i)$$

अब, $(\Delta AOB + \Delta BOC + \Delta COA)$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times r \times AB + \frac{1}{2} \times r \times BC + \frac{1}{2} \times r \times AC$$

$$= \frac{1}{2} \times r [AB + BC + AC]$$

$$= r \times \frac{[AB + BC + CA]}{2}$$

$$= 4 \times (14+x) = \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}$$

... (ii)

समीकरण (i) एवं (ii) को एकत्रित करने पर,

$$4 \times (14+x) = \sqrt{8 \times 6 \times x \times (14+x)}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

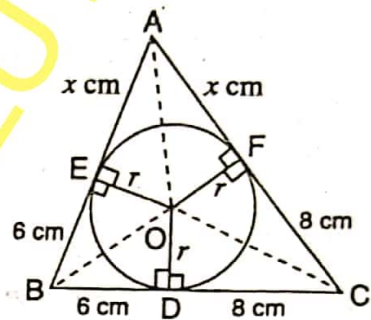
$$4^2 \times (14+x)^2 = 8 \times 6 \times x \times (14+x)$$

या, $16 \times (14+x) = 8 \times 6 \times x$ या, $14+x = 3x$ या, $14 = 2x \therefore x = 7 \text{ cm}$.

अब, $AB = (6+x) \text{ cm} = (6+7) \text{ cm} = 13 \text{ cm}$

एवं $AC = (x+8) \text{ cm} = (7+8) \text{ cm} = 15 \text{ cm}$ Ans.

□



2020 (A)

गणित

प्रथम पाली (First Sitting)

समय : 3 घंटे + 15 मिनट]

[पूर्णांक : 100

परीक्षार्थियों के लिए निर्देश :

1. परीक्षार्थी यथासंभव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।
2. दाहिनी ओर हाशिये पर दिए हुए अंक पूर्णांक निर्दिष्ट करते हैं।
3. इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का अतिरिक्त समय दिया गया है।
4. यह प्रश्न-पत्र दो खंडों में है, खण्ड-अ एवं खण्ड-ब।
5. खण्ड-अ में 60 वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं, जिनमें से किन्हीं 50 प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य है। पचास से अधिक प्रश्नों के उत्तर देने पर प्रथम 50 उत्तरों का ही मूल्यांकन कम्प्यूटर द्वारा किया जाएगा। प्रत्येक के लिए 1 अंक निर्धारित है। सही उत्तर को उपलब्ध कराये गये OMR-शीट में दिए गए सही वृत्त को नीले/काले बॉल पेन से प्रगाढ़ करें। किसी भी प्रकार के क्लाइटर/तरल पदार्थ/ब्लेड/नाखून आदि का OMR उत्तर पत्रिका में प्रयोग करना मना है, अन्यथा परीक्षा परिणाम अमान्य होगा।
6. खण्ड-ब में 27 लघु उत्तरीय प्रश्न हैं, जिनमें से किन्हीं 15 प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य है। प्रत्येक के लिए 2 अंक निर्धारित है। इसके अतिरिक्त, इस खंड में 8 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, जिनमें से किन्हीं 4 प्रश्नों का उत्तर देना है। प्रत्येक प्रश्न के लिए 5 अंक निर्धारित हैं।
7. किसी प्रकार के इलेक्ट्रॉनिक उपकरण का प्रयोग पूर्णतया वर्जित है।

खण्ड-अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

निम्नांकित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प चुनें।

50 × 1 = 50

1. निम्नलिखित में से कौन $\operatorname{cosec} \theta$ के बराबर है?
(A) $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ (B) $\frac{1}{\sec \theta}$ (C) $\frac{1}{\sin \theta}$ (D) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
2. यदि $2 \sin \theta = 1$, तो $(3 \cot^2 \theta + 3)$ का मान होगा
(A) 12 (B) 15 (C) 9 (D) 8
3. असंभव घटना की प्रायिकता होती है
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 0 (D) $\frac{1}{3}$
4. निम्नलिखित में $x^2 - \sqrt{2}x - 12$ के शून्यक कौन-से हैं?
(A) $-3\sqrt{2}, \sqrt{2}$ (B) $-3\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (D) इनमें से कोई नहीं
5. वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है
(A) चाप (B) चापकर्ण (C) व्यास (D) इनमें से कोई नहीं
6. 12 m ऊँचे खंभे की जमीन पर पड़ रही छाया की लंबाई $4\sqrt{3}$ m है। सूर्य का उन्नयन कोण है
(A) 60° (B) 45° (C) 30° (D) 90°
7. $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle C = 90^\circ$ है तो $\cos(A + B)$ का मान है
(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$