

(100) સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ અને $\vec{d}$ માં $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ પરસ્પર લંબ નથી. $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$ અને

$$\vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d} \text{ હોય, તો } \vec{d} = \dots, (\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{d}) \quad [\text{AIEEE : 2011}]$$

$$(A) \vec{b} - \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right) \vec{c} \quad (B) \vec{c} + \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right) \vec{b} \quad (C) \vec{b} + \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right) \vec{c} \quad (D) \vec{c} - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right) \vec{b}$$

ઉકેલ : $\vec{a}$ એ $\vec{b}$ ને લંબ નથી તેથી $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ અને $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$

$$\text{હવે } \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d} \text{, આથી, } \vec{b} \times (\vec{c} - \vec{d}) = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{b} \parallel (\vec{c} - \vec{d}) \text{, આથી, } \vec{c} - \vec{d} = m \vec{b}, m \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$\vec{a}$ થી અંતઃગુણન કરતાં

$$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{d} = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{, આથી, } \vec{a} \cdot \vec{c} - 0 = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\therefore m = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

$$m \text{ નું મૂલ્ય (1) માં મૂકતાં, } \vec{c} - \vec{d} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right) \vec{b}$$

$$\therefore \vec{c} - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right) \vec{b} = \vec{d}$$

જવાબ : (D)

(101) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ શૂન્યેતર સદિશો છે. આ પૈકી કોઈ પણ બે સદિશો સમરેખ નથી. જો $\vec{a} + 3\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમરેખ હોય તથા $\vec{b} + 2\vec{c}$ અને $\vec{a}$ સમરેખ હોય, તો $\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c} = \dots$ [AIEEE : 2011]

$$(A) \vec{a} \quad (B) \vec{b} \quad (C) \vec{0} \quad (D) \vec{a} + \vec{c}$$

ઉકેલ : $\vec{a} + 3\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમરેખ છે. આથી, $\vec{a} + 3\vec{b} = m\vec{c}$, $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ (1)

$$\vec{b} + 2\vec{c} \text{ અને } \vec{a} \text{ સમરેખ છે. આથી, } \vec{b} + 2\vec{c} = n\vec{a}, n \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore 3\vec{b} + 6\vec{c} = 3n\vec{a} \quad (2)$$

(1) માંથી (2) બાદ કરતાં

$$\vec{a} - 6\vec{c} = m\vec{c} - 3n\vec{a}$$

$$\therefore (1 + 3n)\vec{a} - (6 + m)\vec{c} = \vec{0}$$

$\vec{a}$ અને $\vec{c}$ અસમરેખ તથા શૂન્યેતર છે.

$\therefore 1 + 3n = 0$ અને $6 + m = 0$. આથી, $n = -\frac{1}{3}$ અને $m = -6$

(1) માં m (અથવા (2)માં n) નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c} = \vec{0}$$

જવાબ : (C)

(102) જો સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{29}$ અને $\vec{a} \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times \vec{b}$

હોય, તો $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-7\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ નું શક્ય મૂલ્ય

[IIT : 2012]

(A) 0

(B) 3

(C) 4

(D) 8

ઉકેલ : $\vec{a} \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times \vec{b}$

$$\therefore \vec{a} \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) + \vec{b} \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = \vec{0}$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = m(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}), m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}|^2 = m^2(4 + 9 + 16)$$

$$\therefore 29 = m^2(29). \text{ આથી, } 1 = m^2. \text{ આથી, } m = \pm 1$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = \pm(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$\begin{aligned} \text{હવે, } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-7\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) &= \pm(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot (-7\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \\ &= \pm(-14 + 6 + 12) = \pm 4 \end{aligned}$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-7\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \text{ નું શક્ય મૂલ્ય } 4.$$

જવાબ : (C)

(103) $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ એકમ સદિશો છે. જો $\vec{c} = \hat{a} + 2\hat{b}$ અને $\vec{d} = 5\hat{a} - 4\hat{b}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

[AIEEE : 2012]

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : $\vec{c} \perp \vec{d}$. આથી, $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$

$$\therefore (\hat{a} + 2\hat{b}) \cdot (5\hat{a} - 4\hat{b}) = 0$$

$$\therefore 5|\hat{a}|^2 + 6\hat{a} \cdot \hat{b} - 8|\hat{b}|^2 = 0$$

$$\therefore 5(1) + 6|\hat{a}||\hat{b}|\cos\theta - 8(1) = 0, \text{ જ્યાં } (\hat{a}, \hat{b}) = \theta$$

$$\therefore 6\cos\theta - 3 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

જવાબ : (C)

- (104) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં $\vec{AB} = \vec{q}$ અને $\vec{AD} = \vec{p}$ તથા $\angle BAD$ લઘુકોણ છે. જો B માંથી $\overline{AD}$ પરનો લંબ એ સદિશ $\vec{r}$ દર્શાવે, તો $\vec{r} = \dots\dots$ [AIEEE : 2012]

(A) $3\vec{q} - \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{q})}{(\vec{p} \cdot \vec{p})}\vec{p}$ (B) $-\vec{q} + \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{p} \cdot \vec{p}}\right)\vec{p}$ (C) $\vec{q} - \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{p} \cdot \vec{p}}\right)\vec{p}$ (D) $-3\vec{q} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{q})}{(\vec{p} \cdot \vec{p})}\vec{p}$

ઉકેલ : ધારો કે $\overline{BE} \perp \overline{AD}$

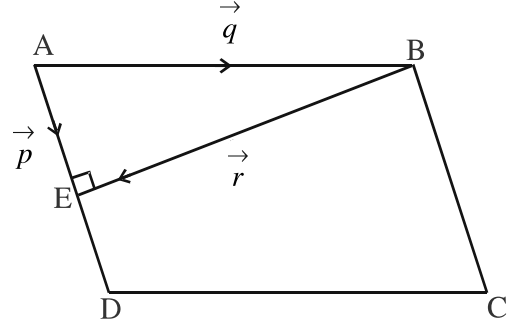
$\therefore \vec{AE}$ એ $\vec{q}$ નો $\vec{p}$ પરનો પ્રક્ષેપ થશે.

$$\therefore \vec{AE} = \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{p} \cdot \vec{p}}\right)\vec{p}$$

હવે, $\triangle ABE$ માં $\vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$

$$\therefore \vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB}$$

$$\therefore \vec{r} = \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{p} \cdot \vec{p}}\right)\vec{p} - \vec{q}$$



આકૃતિ 20.14

જવાબ : (B)

- (105) એકમ સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ માટે $|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2 = 9$, તો $|4\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}| = \dots\dots$
- (A) 7 (B) 3 (C) 1 (D) 0

ઉકેલ : $|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2 = 9$

$$\therefore 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 9$$

$$\therefore 2(1 + 1 + 1) - 9 = 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$\therefore -3 = 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \quad (1)$$

$$\text{હવે, } |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 3 - 3 = 0$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 0$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$$

$$\therefore |4\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}| = |4\vec{a} + 3(-\vec{a})| = |\vec{a}| = 1$$

જવાબ : (C)

$$(106) \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{તો} \quad \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \dots\dots$$

(A) 1

(B) -1

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(D) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{ઉકેલ : } \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a} \wedge \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

જવાબ : (A)

(107) જો કોઈ સદિશના અક્ષો પરના પ્રક્ષેપ અનુક્રમે 3, -2, 6 હોય, તો તે સદિશની દિક્કોસાઈન અનુક્રમે

(A) $\frac{3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{6}{5}$

(B) $\frac{3}{25}, \frac{-2}{25}, \frac{6}{25}$

(C) $\frac{3}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{6}{7}$

(D) $\frac{3}{49}, \frac{-2}{49}, \frac{6}{49}$

ઉકેલ : ધારો કે સદિશ $\vec{x} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$ નો $\hat{i}$ ની દિશાનો પ્રક્ષેપ 3 છે.

$$\therefore \frac{\vec{x} \cdot \hat{i}}{|\hat{i}|} = 3. \text{ આથી, } x_1 = 3$$

તે જ પ્રમાણે $x_2 = -2$ અને $x_3 = 6$

$$\therefore \vec{x} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{x}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$$

$$\therefore \vec{x} \text{ ની દિક્કોસાઈન, } \frac{3}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{6}{7}$$

જવાબ : (C)

નોંધ : માત્ર (C) માં જ એકમ સદિશ છે. આથી, જવાબ (C) છે.

(108) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ એ સમાંતર ફલકની ધારો છે. કોઈ પણ બે સદિશનું અંતઃગુણન 3 અને દરેક સદિશનું માન 3 હોય, તો સમાંતર ફલકનું ઘનફળ =

(A) 9

(B) $12\sqrt{15}$

(C) $6\sqrt{15}$

(D) 18

ઉકેલ : આપેલ શરત મુજબ, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 3$ અને $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 3$

$$[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2 = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 27 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27(24 - 2 - 2) = 540$$

$$\therefore \text{ઘનફળ} = |[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]|$$

$$= 6\sqrt{15}$$

જવાબ : (C)

(109) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ની વ્યસ્ત સદિશ અનુક્રમે $\vec{a}', \vec{b}'$ અને $\vec{c}'$ છે. $\vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}' = \dots$

- (A) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (B) $\vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}'$ (C) $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$ (D) $\vec{0}$

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}' &= \frac{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]} + \frac{\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]} + \frac{\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]} \\ &= \frac{1}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]} \{ (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} + (\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} + (\vec{c} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b} \} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

જવાબ : (D)

(110) $\vec{a} \times [\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})] = \dots$

- (A) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ (B) $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
(C) $(\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \times \vec{a})$ (D) $[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}] \vec{a}$

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \vec{a} \times [\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})] &= \vec{a} \times [(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{b}] \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \times \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{a} \times \vec{b}) \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{0} + (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \times \vec{a}) \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \times \vec{a}) \end{aligned}$$

જવાબ : (C)

(111) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \dots$

- (A) $\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{b} & \vec{a} \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{a} \\ \vec{b} & \vec{b} \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{a} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix}$

ઉકેલ : લાગ્રાન્જના નિત્યસમ પ્રમાણે,

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix}$$

જવાબ : (C)

(112) જો સદિશો $\vec{a} = x^2 \hat{i} + x \hat{j} + 2 \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3 \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{c} = 2 \hat{i} - 8 \hat{j} + 3 \hat{k}$ માટે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$

વચ્ચેનો ખૂણો લઘુકોણ તથા $\vec{a}$ અને $\vec{c}$ વચ્ચેનો ખૂણો ગુરુકોણ હોય, તો $x \in \dots$

- (A) (1, 3) (B) (2, 3) (C) $(-10, 11) \cup (2, 3)$ (D) (-1, 3)

ઉકેલ : $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો લઘુકોણ છે.

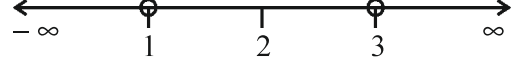
$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

$$\therefore x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$\therefore (x - 1)(x - 2) > 0$$

$$\therefore x \in (2, \infty) \text{ અથવા } x \in (-\infty, 1)$$

$$\therefore x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$



અને $\vec{a}$ અને $\vec{c}$ વચ્ચેનો ખૂણો ગુરુકોણ છે.

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} < 0$$

$$\therefore 2x^2 - 8x + 6 < 0$$

$$\therefore (x - 1)(x - 3) < 0$$

$$\therefore x \in (1, 3), \text{ પરંતુ } x \in (1, 2] \text{ માટે } \vec{a} \cdot \vec{b} \not> 0.$$

$$\therefore x \in (2, 3)$$

જવાબ : (B)

(113) $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$, $\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$ અને $\vec{c} = c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k}$ શૂન્યેતર સદિશો છે કે જેથી

$$\vec{c} \text{ એ એકમ સદિશ છે તથા } \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b} \text{ છે. જો } (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{6} \text{ હોય, તો } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \dots$$

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{1}{4} |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

(D) $\frac{3}{4} |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2$

ઉકેલ : શ્રેણિકના નિશ્ચાયકના ગુણધર્મ $|AB| = |A| |B|$ જ્યાં A અને B (ચોરસ શ્રેણિકો)નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(બીજા નિશ્ચાયકની હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં ફેરવતાં)

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & 0 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ (શ્રેણિકનો ગુણાકાર)}$$

$$(\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b} \text{ અને } |\vec{c}| = 1)$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

જવાબ : (C)

બીજી રીત :

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ તથા } \vec{c} \perp \vec{b} \text{ તથા } |\vec{c}| = 1$$

$$\therefore \vec{c} = \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

$$\text{હવે, } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 = [(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}]^2$$

$$= \left(\frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \right)^2$$

$$= |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

જવાબ : (C)

(114) શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ પરસ્પર લંબ છે. $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{b}$ થાય તેવો સદિશ $\vec{r} = \dots\dots$ (α અદિશ છે.)

$$(A) \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (B) \alpha \vec{b} - \frac{1}{|\vec{b}|^2}(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (C) \alpha(\vec{b} \times \vec{a}) \quad (D) \alpha \vec{a} + \frac{1}{|\vec{a}|^2}(\vec{a} \times \vec{b})$$

ઉકેલ : $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{a} \times \vec{b}$ વિષમતલીય સદિશો છે.

$\therefore$ કોઈ પણ સદિશ $\vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય, જ્યાં α , β , γ અદિશ છે.

$$\text{હવે, } \vec{r} \times \vec{a} = \alpha(\vec{a} \times \vec{a}) + \beta(\vec{b} \times \vec{a}) + \gamma(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$$

$$\therefore \vec{b} = \vec{0} - \beta(\vec{a} \times \vec{b}) + \gamma(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} - \gamma(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$$

$$\therefore \vec{b} + \beta(\vec{a} \times \vec{b}) - \gamma|\vec{a}|^2 \vec{b} + \gamma(0)\vec{a} = \vec{0}$$

$$\therefore (1 - \gamma|\vec{a}|^2)\vec{b} + \beta(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

$$\therefore 1 - \gamma|\vec{a}|^2 = 0 \text{ અને } \beta = 0$$

($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ વિષમતલીય છે.)

$$\therefore \gamma = \frac{1}{|\vec{a}|^2}$$

$$\therefore \vec{r} = \alpha \vec{a} + 0 \vec{b} + \frac{1}{|\vec{a}|^2}(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\therefore \vec{r} = \alpha \vec{a} + \frac{1}{|\vec{a}|^2}(\vec{a} \times \vec{b})$$

જવાબ : (D)

● JEE અને Advanced માં પુછાયેલા પ્રશ્નો :

- (115) જો સદિશો $\vec{AB} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$ અને $\vec{AC} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ એ ΔABC ની બે બાજુઓ દર્શાવે, તો A માંથી દોરેલ મધ્યગાની લંબાઈ [JEE-Main : 2013]

- (A) $\sqrt{18}$ (B) $\sqrt{72}$ (C) $\sqrt{33}$ (D) $\sqrt{45}$

ઉકેલ : A માંથી દોરેલી મધ્યગા $= \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{8\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}}{2} = 4\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore$ તેની લંબાઈ $= \sqrt{16 + 1 + 16} = \sqrt{33}$

જવાબ : (C)

- (116) $\vec{PR} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ અને $\vec{SQ} = \hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં વિકર્ણો દર્શાવે છે અને

આરંભબિંદુ P વાળો એક સદિશ $\vec{PT} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ છે. $\vec{PT}$, $\vec{PQ}$ અને $\vec{PS}$ જે સમાંતર ફલકની ધારો હોય, તેવા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ = [JEE-Adv. : 2013]

- (A) 5 (B) 20 (C) 10 (D) 30

ઉકેલ : $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

$\therefore \vec{a} + \vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

અને $\vec{SR} + \vec{RQ} = \vec{SQ}$

$\therefore \vec{a} - \vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$

(1) અને (2) નું સમાધાન કરતાં,

$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

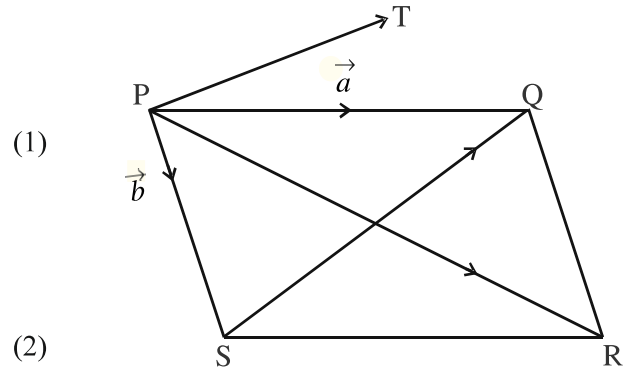
$\therefore \vec{PQ} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\vec{PS} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ તથા $\vec{PT} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

જેની ધારો $\vec{PT}$, $\vec{PQ}$, $\vec{PS}$ હોય તેવા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $= |[\vec{PT} \ \vec{PQ} \ \vec{PS}]|$

હવે, $[\vec{PT} \ \vec{PQ} \ \vec{PS}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(5) - 2(5) + 3(5) = 10$

$\therefore$ સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $= 10$

જવાબ : (C)



આકૃતિ 20.15

(117) સૂચિ I ની વિગતોને સૂચિ II ની વિગતો સાથે યોગ્ય રીતે સાંકળો :

[JEE Adv. : 2013]

	સૂચિ I	સૂચિ II	
(P)	જેની પાસપાસેની ધારો સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ હોય, તેવા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ 2 હોય, તો જેની પાસપાસેની ધારો $2(\vec{a} \times \vec{b})$, $3(\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{c} \times \vec{a})$ હોય તેવા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ થાય.	1	100
(Q)	સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ જેની ધારો હોય તેવા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ 5 હોય, તો $3(\vec{a} + \vec{b})$, $(\vec{b} + \vec{c})$ અને $2(\vec{c} + \vec{a})$ ધારોવાળા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ થાય.	2	30
(R)	$\vec{a}$ અને $\vec{b}$ બાજુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 20 હોય, તો $(2\vec{a} \times 3\vec{b})$ અને $(\vec{a} - \vec{b})$ બાજુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ થાય.	3	24
(S)	જેની પાસપાસેની બાજુઓના સદિશ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ 30 હોય, તો $(\vec{a} + \vec{b})$ અને $\vec{a}$ પાસપાસેની બાજુઓવાળા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ થાય.	4	60

	(P)	(Q)	(R)	(S)
(A)	4	2	3	1
(B)	2	3	1	4
(C)	3	4	1	2
(D)	1	4	3	2

ઉકેલ : (P) : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ જેની ધારો હોય તેવા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $= |[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]| = 2$

હવે, $2(\vec{a} \times \vec{b})$, $3(\vec{b} \times \vec{c})$ અને $(\vec{c} \times \vec{a})$ ધારોવાળા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ

$$= |[2(\vec{a} \times \vec{b}) \ 3(\vec{b} \times \vec{c}) \ (\vec{c} \times \vec{a})]|$$

$$= 6|[\vec{a} \times \vec{b} \ \vec{b} \times \vec{c} \ \vec{c} \times \vec{a}]|$$

$$= 6[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^2 = 6(2)^2 = 24$$

$\therefore$ (P) $\rightarrow$ 3

[ખરેખર તો હવે આગળ જવાની જરૂર નથી. (P) $\rightarrow$ 3 માત્ર વિકલ્પ (C) માં છે. આથી, જવાબ (C)]

(Q) : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ધારોવાળા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $= |[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]| = 5$

હવે, $3(\vec{a} + \vec{b})$, $(\vec{b} + \vec{c})$ અને $2(\vec{c} + \vec{a})$ ધારોવાળા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ

$$= |[3(\vec{a} + \vec{b}) \ \vec{b} + \vec{c} \ 2(\vec{c} + \vec{a})]|$$

$$= 6|[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}]| = 6|2[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]| = 6(2)(5) = 60$$

$$\therefore (Q) \rightarrow 4$$

$$(R) : \text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\therefore 20 = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\therefore 40 = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

હવે, $2\vec{a} + 3\vec{b}$ અને $\vec{a} - \vec{b}$ બાજુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$$

$$= \frac{1}{2}|-2(\vec{a} \times \vec{b}) + 3(\vec{b} \times \vec{a})| = \frac{1}{2}|-5(\vec{a} \times \vec{b})| = \frac{5}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{5}{2}(40) = 100$$

$$(R) \rightarrow 1$$

(S) : $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ પાસપાસેની બાજુઓ હોય તેવા સમાંતર ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = 30$$

હવે $\vec{a} + \vec{b}$ અને $\vec{a}$ જેની પાસપાસેની બાજુઓ હોય તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ

$$= |(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = 30$$

$$\therefore (S) \rightarrow 2$$

આમ, (P) $\rightarrow$ 3, (Q) $\rightarrow$ 4, (R) $\rightarrow$ 1, (S) $\rightarrow$ 2

જવાબ : (C)

(118) એકમ સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ માટે $\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ તો $\vec{a}$ અને $\vec{c}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

[JEE : 2013]

$$(A) \frac{\pi}{4}$$

$$(B) \frac{\pi}{3}$$

$$(C) \frac{\pi}{6}$$

$$(D) \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ઉકેલ : } \vec{a} - \sqrt{3}\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{c} = \sqrt{3}\vec{b}$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{c}|^2 = 3|\vec{b}|^2$$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{c}|\cos(\vec{a} \wedge \vec{c}) = 3|\vec{b}|^2$$

$$\therefore 1 + 1 + 2(1)(1)\cos(\vec{a} \wedge \vec{c}) = 3(1)$$

$$\therefore \cos(\vec{a} \wedge \vec{c}) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (\vec{a} \wedge \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$$

જવાબ : (B)

- (119) $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ અસમરેખ છે. સદિશો $\vec{u} = (\alpha - 2)\vec{a} + \vec{b}$ અને $\vec{v} = (2 + 3\alpha)\vec{a} - 3\vec{b}$ સમરેખ હોય, તો $\alpha = \dots\dots$ [JEE : 2013]
- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{2}{3}$

ઉકેલ : $\vec{v}$ અને $\vec{u}$ સમરેખ છે. આથી, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

$$\therefore ((\alpha - 2)\vec{a} + \vec{b}) \times ((2 + 3\alpha)\vec{a} - 3\vec{b}) = \vec{0}$$

$$\therefore -3(\alpha - 2)(\vec{a} \times \vec{b}) + (2 + 3\alpha)(\vec{b} \times \vec{a}) = 0$$

$$\therefore ((6 - 3\alpha) - (2 + 3\alpha)) (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

$$\therefore 4 - 6\alpha = 0 \quad (\vec{a}, \vec{b} \text{ અસમરેખ હોવાથી } \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0})$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \alpha$$

જવાબ : (B)

- (120) R^3 માં એક સદિશના X, Y, Z - અક્ષ પરના પ્રક્ષેપ અનુક્રમે 2, 3 અને 6 હોય, તો સદિશનું માન [JEE : 2013]
- (A) 12 (B) 7 (C) 9 (D) 6

ઉકેલ : ધારો કે A નો સ્થાનસદિશ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ અને B નો સ્થાનસદિશ $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ છે.

$$\therefore \vec{AB} = (b_1 - a_1)\hat{i} + (b_2 - a_2)\hat{j} + (b_3 - a_3)\hat{k}$$

$$\vec{AB} \text{ નો X-અક્ષ પરનો પ્રક્ષેપ } \frac{\vec{AB} \cdot \hat{i}}{|\hat{i}|} = 2$$

$$\therefore (b_1 - a_1) = 2$$

તે જ પ્રમાણે $(b_2 - a_2) = 3$ અને $(b_3 - a_3) = 6$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7 \quad \text{જવાબ : (B)}$$

- (121) ધારો કે $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ત્રણ સદિશો છે, જો કોઈક $\lambda \in R$ માટે $\vec{b} + \lambda\vec{c}$ ના $\vec{a}$ પરના પ્રક્ષેપનું માપ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ હોય, તો $\vec{b} + \lambda\vec{c} = \dots\dots$ [JEE : 2013]

$$(A) 2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k} \quad (B) 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k} \quad (C) 2\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k} \quad (D) 2\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

ઉકેલ : $\vec{b} + \lambda\vec{c}$ ના $\vec{a}$ પરના પ્રક્ષેપનું માપ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ છે.

$$\vec{b} + \lambda\vec{c} = (1 + \lambda)\hat{i} + (2 + \lambda)\hat{j} - (1 + 2\lambda)\hat{k}$$

$$\therefore \frac{|(\vec{b} + \lambda\vec{c}) \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \frac{|2 + 2\lambda - 2 - \lambda - 1 - 2\lambda|}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore |-\lambda - 1| = 2$$

$$\therefore \lambda + 1 = 2 \quad \text{અથવા} \quad \lambda + 1 = -2$$

$$\therefore \lambda = 1 \quad \lambda = -3$$

$$\therefore \vec{b} + \lambda \vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k} \quad \text{અથવા} \quad \vec{b} + \lambda \vec{c} = -2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

જવાબ : (B)

$$(122) \text{ સદિશો } ((\hat{i} \times \vec{a}) \cdot \vec{b})\hat{i} + ((\hat{j} \times \vec{a}) \cdot \vec{b})\hat{j} + ((\hat{k} \times \vec{a}) \cdot \vec{b})\hat{k} = \dots\dots$$

[JEE : 2013]

$$(A) \vec{b} \times \vec{a}$$

$$(B) \vec{a}$$

$$(C) \vec{a} \times \vec{b}$$

$$(D) \vec{b}$$

$$\text{ઉકેલ : ધારો કે } \vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \quad \text{અને} \quad \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

$$\text{હવે } (\hat{i} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = [\hat{i} \quad \vec{a} \quad \vec{b}]$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$$

$$\text{તે જ પ્રમાણે } (\hat{j} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = a_3b_1 - a_1b_3 \quad \text{અને} \quad (\hat{k} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\therefore ((\hat{i} \times \vec{a}) \cdot \vec{b})\hat{i} + ((\hat{j} \times \vec{a}) \cdot \vec{b})\hat{j} + ((\hat{k} \times \vec{a}) \cdot \vec{b})\hat{k} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

$$= \vec{a} \times \vec{b}$$

જવાબ : (C)

બીજી રીત :

$$\left((\hat{i} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \right) \hat{i} + \left((\hat{j} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \right) \hat{j} + \left((\hat{k} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \right) \hat{k}$$

$$= \left(\hat{i} \cdot (\hat{a} \times \hat{b}) \right) \hat{i} + \left(\hat{j} \cdot (\hat{a} \times \hat{b}) \right) \hat{j} + \left(\hat{k} \cdot (\hat{a} \times \hat{b}) \right) \hat{k} = \vec{a} \times \vec{b}$$

જવાબ : (C)

$$(123) \text{ } R^3 \text{ માં } \Delta ABC \text{ ની શિરોબિંદુઓ } A(2, 3, 5), B(-1, 3, 2), C(\lambda, 5, \mu) \text{ છે. જો } A \text{ માંથી દોરેલ મધ્યગા}$$

[JEE : 2013]

$$(A) (10, 7)$$

$$(B) (7, 5)$$

$$(C) (7, 10)$$

$$(D) (5, 7)$$

$$\text{ઉકેલ : } \Delta ABC \text{ માં } \overline{BC} \text{ નું મધ્યબિંદુ } D\left(\frac{\lambda-1}{2}, 4, \frac{\mu+2}{2}\right) \text{ છે.}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \left(\frac{\lambda-5}{2}\right)\hat{i} + \hat{j} + \left(\frac{\mu-8}{2}\right)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AD}, \text{ ત્રણેય અક્ષો સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવે છે.}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \hat{i} = \overrightarrow{AD} \cdot \hat{j} = \overrightarrow{AD} \cdot \hat{k}$$

$$\therefore \frac{\lambda-5}{2} = 1 = \frac{\mu-8}{2}. \text{ આથી, } \lambda = 7, \mu = 10$$

$$\therefore (\lambda, \mu) = (7, 10)$$

જવાબ : (C)

(124) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ અને $\vec{c}$ એવું સદિશ છે કે જેથી $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|$, $|\vec{c} - \vec{a}| = 2\sqrt{2}$ અને $\vec{a} \times \vec{b}$ તથા $\vec{c}$ વચ્ચેનું ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{6}$ થાય, તો $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| = \dots$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(C) 3

(D) $\frac{3}{2}$

ઉકેલ : $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \sin \frac{\pi}{6}$

$$= |2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}| \cdot |\vec{c}| \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} |\vec{c}|$$

હવે, $|\vec{c} - \vec{a}|^2 = 8$

$$\therefore |\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} = 8$$

$$\therefore |\vec{c}|^2 + 9 - 2|\vec{c}| - 8 = 0$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|)$$

$$\therefore |\vec{c}|^2 - 2|\vec{c}| + 1 = 0$$

$$\therefore (|\vec{c}| - 1)^2 = 0. \text{ આથી, } |\vec{c}| = 1$$

$$\therefore |(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| = \frac{3}{2}$$

જવાબ : (D)

(125) જો $[\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}] = \lambda [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2$ તો $\lambda = \dots$

[JEE Main : 2014]

(A) 2

(B) 3

(C) 0

(D) 1

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $[\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2$

$$\therefore \lambda = 1$$

જવાબ : (D)

નોંધ : $[\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})]$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \{((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}) \vec{c} - ((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}) \vec{a}\}$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \{[\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{a}] \vec{c} - [\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{c}] \vec{a}\}$$

$$= \{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\} \{[\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{a}] - 0\}$$

$$= [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$$

$$= [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2$$

(126) સદિશો $\vec{x}$, $\vec{y}$ અને $\vec{z}$ માટે $|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = \sqrt{2}$ અને આ સદિશોની દરેક જોડ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ છે. જો શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$ એ $\vec{x}$ અને $\vec{y} \times \vec{z}$ ને લંબ હોય તથા $\vec{b}$ એ $\vec{y}$ અને $\vec{z} \times \vec{x}$ ને લંબ હોય તો

[JEE Adv. : 2014]

(A) $\vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{z})(\vec{z} - \vec{x})$

(B) $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{y})(\vec{y} - \vec{z})$

(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -(\vec{a} \cdot \vec{y})(\vec{b} \cdot \vec{z})$

(D) $\vec{a} = -(\vec{a} \cdot \vec{y})(\vec{z} - \vec{y})$

ઉકેલ : $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos(\vec{x}, \vec{y}) = (\sqrt{2})(\sqrt{2})\cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

તે જ પ્રમાણે $\vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 1$

$\vec{a}$ એ $\vec{x}$ અને $\vec{y} \times \vec{z}$ ને લંબ છે.

$\therefore \vec{a} = m\{\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})\} = m\{(\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}\} = m(\vec{y} - \vec{z})$

હવે, $\vec{a} \cdot \vec{y} = m(\vec{y} - \vec{z}) \cdot \vec{y} = m(|\vec{y}|^2 - \vec{z} \cdot \vec{y}) = m(2 - 1) = m$

$\therefore \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{y})(\vec{y} - \vec{z})$

$\therefore$ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

$\vec{b}$ એ $\vec{y}$ અને $\vec{z} \times \vec{x}$ ને લંબ છે.

$\therefore \vec{b} = n\{\vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x})\} = n\{(\vec{y} \cdot \vec{x})\vec{z} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}\} = n(\vec{z} - \vec{x})$

હવે, $\vec{b} \cdot \vec{z} = n(\vec{z} - \vec{x}) \cdot \vec{z} = n(|\vec{z}|^2 - \vec{x} \cdot \vec{z}) = n(2 - 1) = n$

$\therefore \vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{z})(\vec{z} - \vec{x})$

$\therefore$ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

હવે $\vec{a} \cdot \vec{b} = ((\vec{a} \cdot \vec{y})(\vec{y} - \vec{z})) \cdot ((\vec{b} \cdot \vec{z})(\vec{z} - \vec{x}))$

$= (\vec{a} \cdot \vec{y})(\vec{b} \cdot \vec{z})((\vec{y} - \vec{z}) \cdot (\vec{z} - \vec{x}))$

$= (\vec{a} \cdot \vec{y})(\vec{b} \cdot \vec{z})(\vec{y} \cdot \vec{z} - \vec{y} \cdot \vec{x} - |\vec{z}|^2 + \vec{z} \cdot \vec{x})$

$= (\vec{a} \cdot \vec{y})(\vec{b} \cdot \vec{z})(1 - 1 - 2 + 1)$

$= -(\vec{a} \cdot \vec{y})(\vec{b} \cdot \vec{z})$

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

(B) સત્ય હોવાથી (D) પણ સત્ય છે.

આમ, વિકલ્પ (A), (B), (C) અને (D) સત્ય છે.

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

(127) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ વિષમતલીય એકમ સદિશો છે. તેમની દરેક જોડ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ છે. જો વાસ્તવિક અચળ p, q, r

માટે $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ હોય, તો $\frac{p^2 + 2q^2 + r^2}{q^2} = \dots$ [JEE Adv. : 2014]

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

ઉકેલ : $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3}$

$$= (1)(1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

તે જ પ્રમાણે $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$

હવે $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ નું $\vec{a}$ સાથે અંતઃગુણન કરતાં,

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = p|\vec{a}|^2 + q(\vec{a} \cdot \vec{b}) + r(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

$$\therefore [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] = p + \frac{q}{2} + \frac{r}{2} \quad (1)$$

તે જ પ્રમાણે $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સાથે અંતઃગુણન કરતાં,

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = p(\vec{a} \cdot \vec{b}) + q|\vec{b}|^2 + r(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\therefore 0 = \frac{p}{2} + q + \frac{r}{2}. \text{ આથી, } 0 = p + 2q + r \quad (2)$$

$$\text{અને } \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = p(\vec{a} \cdot \vec{c}) + q(\vec{b} \cdot \vec{c}) + r|\vec{c}|^2$$

$$\therefore [\vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{b}] = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + r$$

$$\therefore [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + r \quad (3)$$

(1) અને (3) પરથી,

$$p + \frac{q}{2} + \frac{r}{2} = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + r$$

$$\therefore p = r$$

(2) પરથી $p = -q$. આથી, $r = -q$

$$\text{હવે } \frac{p^2 + 2q^2 + r^2}{q^2} = \frac{q^2 + 2q^2 + q^2}{q^2} = 4$$

જવાબ : (D)

- (128) જો $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ અને $|2\vec{a} - \vec{b}| = 5$ તો $|2\vec{a} + \vec{b}| = \dots$ [JEE : 2014]
 (A) 17 (B) 7 (C) 5 (D) 1

ઉકેલ : $|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 25$

$$\therefore 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 25$$

$$\therefore 16 + 9 - 25 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore 0 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore |2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 + 9$$

$$\therefore |2\vec{a} + \vec{b}| = 5$$

જવાબ : (C)

- (129) $|\vec{c}|^2 = 60$ અને $\vec{c} \times (\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) = \vec{0}$ તો $\vec{c} \cdot (-7\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \dots$ [JEE : 2014]
 (A) $4\sqrt{2}$ (B) 12 (C) 24 (D) $12\sqrt{2}$

ઉકેલ : $\vec{c} \times (\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) = \vec{0}$

$$\therefore \vec{c} \text{ અને } \hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k} \text{ સમરેખ છે.}$$

$$\therefore \vec{c} = \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}), \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore |\vec{c}|^2 = |\lambda|^2(30), 60 = 30|\lambda|^2$$

$$\therefore |\lambda|^2 = 2$$

$$(|\vec{c}| = 60)$$

$$\therefore \lambda = \pm\sqrt{2}$$

$$\therefore \vec{c} = \pm\sqrt{2}(\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k})$$

$$\text{હવે, } \vec{c} \cdot (-7\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \pm\sqrt{2}(\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot (-7\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \pm 12\sqrt{2}$$

જવાબ : (D)

- (130) જો $\vec{x} = 3\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{y} = \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\vec{z} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 12\hat{k}$ હોય, તો $\vec{x} \times \vec{y}$ નો $\vec{z}$ પરના પ્રક્ષેપનું મૂલ્ય [JEE : 2014]
 (A) 12 (B) 15 (C) 14 (D) 13

ઉકેલ : $\vec{x} \times \vec{y}$ નો $\vec{z}$ પરના પ્રક્ષેપનું મૂલ્ય = $\frac{|(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}|}{|\vec{z}|} = \frac{|[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]|}{|\vec{z}|}$

$$\text{હવે, } [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -4 & -12 \end{vmatrix} = 3(-60) + 6(-3) - 1(-16) = -182$$

$$\vec{x} \times \vec{y} \text{ નો } \vec{z} \text{ પરના પ્રક્ષેપનું મૂલ્ય} = \frac{182}{13} = 14$$

જવાબ : (C)

(131) $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ એકમ સદિશો છે. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$ અને $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3(\vec{a} \times \vec{b})$ હોય, તો $2|\vec{c}| = \dots$

[JEE Online : 2015]

(A) $\sqrt{55}$

(B) $\sqrt{37}$

(C) $\sqrt{51}$

(D) $\sqrt{43}$

ઉકેલ : $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 3$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

$$\therefore 1 + 1 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{હવે, } |\vec{c}|^2 = |\vec{a} + 2\vec{b} + 3(\vec{a} \times \vec{b})|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 9|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + 12\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$= 1 + 4 + 9\left(\frac{3}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 6(0) + 12(0) = \frac{55}{4}$$

$$\therefore |\vec{c}| = \frac{\sqrt{55}}{2}. \text{ આથી, } 2|\vec{c}| = \sqrt{55}$$

જવાબ : (A)

(132) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં $|\vec{AB}| = a$, $|\vec{AD}| = b$, $|\vec{AC}| = c$ તો $\vec{DA} \cdot \vec{AB} = \dots$ [JEE online : 2015]

(A) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

(B) $\frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)$

(C) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$

(D) $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$

ઉકેલ : $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

$$\therefore |\vec{AB} + \vec{AD}|^2 = |\vec{AC}|^2$$

$$\therefore |\vec{AB}|^2 + |\vec{AD}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |\vec{AC}|^2$$

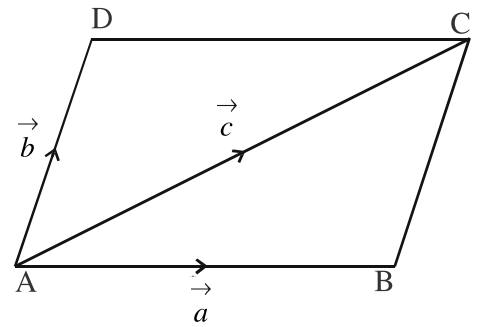
$$\therefore a^2 + b^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} = c^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 + 2\vec{AB} \cdot (-\vec{DA}) = c^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = 2\vec{DA} \cdot \vec{AB}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = \vec{DA} \cdot \vec{AB}$$

જવાબ : (C)



આકૃતિ 20.16

(133) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ એવા શૂન્યેતર સદિશો છે કે તેમના પૈકી કોઈ પણ બે સદિશો સમરેખ નથી અને $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \frac{1}{3}|\vec{b}||\vec{c}|\vec{a}$.

જો θ એ $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ હોય, તો $\sin\theta = \dots$ [JEE Main : 2015]

- (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ઉકેલ : $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \frac{1}{3}|\vec{b}||\vec{c}|\vec{a}$

$$\therefore (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} = \frac{1}{3}|\vec{b}||\vec{c}|\vec{a}$$

$$\therefore -(\vec{c} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{3}|\vec{b}||\vec{c}| \quad (\vec{a}, \vec{b} \text{ સમરેખ નથી.})$$

$$\therefore -|\vec{c}||\vec{b}|\cos\theta = \frac{1}{3}|\vec{b}||\vec{c}|$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{3}. \text{ અર્થાત્, } \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

જવાબ : (A)

(134) ΔPQR માં $\vec{a} = \vec{QR}, \vec{b} = \vec{RP}, \vec{c} = \vec{PQ}$ છે. જો $|\vec{a}| = 12, |\vec{b}| = 4\sqrt{3}, \vec{b} \cdot \vec{c} = 24$, તો નીચેનામાંથી કયો (કયા) વિકલ્પ (વિકલ્પો) સત્ય છે ? [JEE Adva. : 2015]

(A) $\frac{|\vec{c}|^2}{2} - |\vec{a}| = 12$

(B) $\frac{|\vec{c}|^2}{2} + |\vec{a}| = 30$

(C) $|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a}| = 48\sqrt{3}$

(D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -72$

ઉકેલ : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

$$\therefore \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$$

$$\therefore |\vec{b} + \vec{c}|^2 = |-\vec{a}|^2$$

$$\therefore |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a}|^2$$

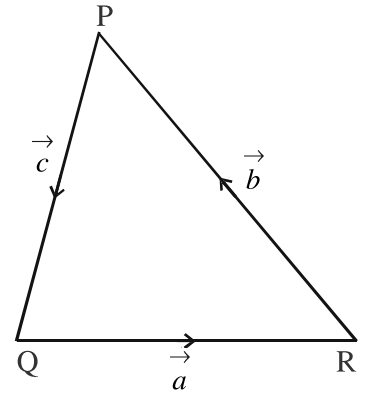
$$\therefore 48 + |\vec{c}|^2 + 2(24) = 144$$

$$\therefore |\vec{c}|^2 = 48$$

$$\therefore |\vec{c}| = 4\sqrt{3}$$

(A) $\frac{|\vec{c}|^2}{2} - |\vec{a}| = \frac{48}{2} - 12 = 12$

$\therefore$ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.



આકૃતિ 20.17

$$(B) \frac{|\vec{c}|^2}{2} + |\vec{a}| = \frac{48}{2} + 12 = 36 \neq 30$$

∴ વિકલ્પ (B) અસત્ય છે.

$$(D) \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |-\vec{c}|^2$$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{c}|^2$$

$$\therefore 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 48 - 144 - 48$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -72$$

∴ વિકલ્પ (D) સત્ય છે.

$$(C) \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$$

$$\vec{a} \text{ સાથે બહિર્ગુણન કરતાં, } \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = -\vec{a} \times \vec{a}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\text{હવે, } |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a}| = 2|\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$= 2\sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2} = 2\sqrt{144 \times 48 - (-72)^2} = 48\sqrt{3}$$

∴ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

જવાબ : (A), (C), (D)

(135) $\vec{p}, \vec{q}$ અને $\vec{r}$ એ R^3 ના વિષમતલીય સદિશો છે. $\vec{s}$ ના $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ પરના ઘટકો અનુક્રમે 4, 3, 5 છે.

જો $\vec{s}$ ના $-\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}; \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$ અને $-\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$ ની દિશાના ઘટકો અનુક્રમે x, y, z હોય, તો $2x + y + z = \dots\dots$ [JEE Adva. : 2015]

(A) 9

(B) 4

(C) 3

(D) 5

ઉકેલ : $\vec{s}$ ના $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ ની દિશાના ઘટકો 4, 3, 5 છે.

$$\vec{s} = 4\vec{p} + 3\vec{q} + 5\vec{r}$$

$$\text{હવે, ધારો કે } \vec{s} = x(-\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) + y(\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}) + z(-\vec{p} - \vec{q} + \vec{r})$$

$$\therefore 4\vec{p} + 3\vec{q} + 5\vec{r} = (-x + y - z)\vec{p} + (x - y - z)\vec{q} + (x + y + z)\vec{r}$$

$$\therefore -x + y - z = 4, x - y - z = 3 \text{ અને } x + y + z = 5$$

$$\text{ઉપરનાં સમીકરણો ઉકેલતાં } x = 4, y = \frac{9}{2}, z = -\frac{7}{2}$$

$$\therefore 2x + y + z = 9$$

જવાબ : (A)

(136) જો સદિશ $\alpha \hat{i} + \beta \hat{j}$ ની $\sqrt{3} \hat{i} + \hat{j}$ પરના પ્રક્ષેપનું માન $\sqrt{3}$ અને $\alpha = (2 + \sqrt{3} \beta)$ તો $|\alpha|$ ની શક્ય કિંમત (કિંમતો) થાય. [JEE Adva. 2015]

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) -1

ઉકેલ : સદિશ $\alpha \hat{i} + \beta \hat{j}$ ની $\sqrt{3} \hat{i} + \hat{j}$ પરના પ્રક્ષેપનું માન $= \sqrt{3}$

$$\therefore \frac{|(\alpha \hat{i} + \beta \hat{j}) \cdot (\sqrt{3} \hat{i} + \hat{j})|}{\sqrt{3+1}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore |\sqrt{3} \alpha + \beta| = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \sqrt{3} \alpha + \beta = 2\sqrt{3} \text{ અથવા } \sqrt{3} \alpha + \beta = -2\sqrt{3}$$

$$\text{હવે, } \alpha = 2 + \sqrt{3} \beta$$

$$\therefore \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}\beta) + \beta = 2\sqrt{3} \quad \text{અથવા} \quad \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}\beta) + \beta = -2\sqrt{3}$$

$$\therefore \beta = 0, \alpha = 2$$

$$\therefore |\alpha| = 2$$

$$\therefore 4\beta = -4\sqrt{3}$$

$$\beta = -\sqrt{3}, \alpha = -1$$

$$|\alpha| = 1$$

$$\therefore |\alpha| = 1 \text{ અથવા } 2$$

જવાબ : (B), (C)

(137) ઊગમબિંદુ O ને સાપેક્ષ બિંદુઓ P, Q, R ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\sqrt{3} \hat{i} + \hat{j}$, $\hat{i} + \sqrt{3} \hat{j}$ અને

$\beta \hat{i} + (1 - \beta) \hat{j}$ છે, $\vec{OP}$ અને $\vec{OQ}$ વચ્ચેના લઘુકોણના દ્વિભાજકથી બિંદુ R નું અંતર $\frac{3}{\sqrt{2}}$ હોય, તો $|\beta|$ ની શક્ય કિંમત (કિંમતો) = [JEE Adva. : 2015]

- (A) 5 (B) 4 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : $\vec{OP}$ અને $\vec{OQ}$ વચ્ચેના લઘુકોણના દ્વિભાજકનું સમીકરણ $x - y = 0$ થશે.

R નો સ્થાન સદિશ $\beta \hat{i} + (1 - \beta) \hat{j}$ છે.

R ના યામ $(\beta, 1 - \beta)$ થશે.

R નું $x - y = 0$ થી અંતર $= \frac{3}{\sqrt{2}}$

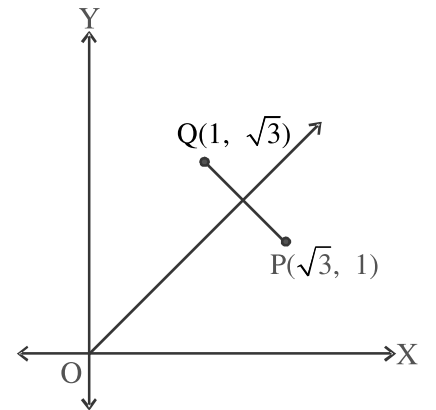
$$\therefore \frac{|\beta - (1 - \beta)|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore 2\beta - 1 = 3 \quad \text{અથવા} \quad 2\beta - 1 = -3$$

$$\therefore \beta = 2 \quad \text{અથવા} \quad \beta = -1$$

$$\therefore |\beta| = 1 \text{ અથવા } 2$$

જવાબ : (C), (D)



આકૃતિ 20.18

એક કરતાં વધુ સાચા વિકલ્પવાળા પ્રશ્નો :

(138) એકમ સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ અસમરેખ છે. $\vec{u} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b}$ અને $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ હોય તો $|\vec{v}| = \dots$

- (A) $|\vec{u}|$ (B) $|\vec{u}| + |\vec{u} \cdot \vec{a}|$ (C) $|\vec{v}| + |\vec{u} \cdot \vec{b}|$ (D) $|\vec{u}| + \vec{u} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

ઉકેલ $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

$\vec{a}$ અને $\vec{b}$ અસમરેખ હોવાથી $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \neq 0, \neq \pi$

ધારો કે $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \theta$

હવે, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \theta$

$\vec{u} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b}$

$|\vec{u}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 |\vec{b}|^2$

$= 1 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$= 1 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \quad (|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \sin \theta)$

$|\vec{v}| = |\vec{u}| \quad (\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b})$

$\therefore$ (A) સત્ય છે.

હવે, $\vec{u} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$

$\therefore |\vec{u}| + |\vec{u} \cdot \vec{a}| = |\vec{v}| + |\vec{v}|^2 \neq |\vec{v}|$

$\therefore$ (B) સત્ય નથી.

$\vec{u} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) |\vec{b}|^2 = 0$

$|\vec{v}| + |\vec{u} \cdot \vec{b}| = |\vec{u}| = |\vec{v}|$

$\therefore$ (C) સત્ય છે.

$\vec{u} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{u} \cdot \vec{a} + \vec{u} \cdot \vec{b} = |\vec{v}|^2 + 0$

$\therefore |\vec{u}| + \vec{u} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{v}| + |\vec{v}|^2$

$\therefore$ (D) સત્ય નથી.

જવાબ : (A) (C)

- (139) સદિશો $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ સાથે સમતલીય અને સદિશ $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ને લંબ સદિશ છે.
 (A) $\hat{j} - \hat{k}$ (B) $-\hat{i} + \hat{j}$ (C) $\hat{i} - \hat{j}$ (D) $-\hat{j} + \hat{k}$

ઉકેલ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ સાથે સમતલીય હોય અને

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \text{ ને લંબ સદિશ } \vec{r} = \lambda (\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})) \\ &= \lambda ((\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}) \\ &= \lambda (4\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k} - 4\hat{i} - 8\hat{j} - 4\hat{k}) \\ &= \lambda (-4\hat{j} + 4\hat{k})\end{aligned}$$

વિકલ્પો જોતાં $\lambda = \pm \frac{1}{4}$ લેતાં,

$$\vec{r} = -\hat{j} + \hat{k} \text{ અથવા } \vec{r} = \hat{j} - \hat{k}$$

જવાબ : (A), (D)

- (140) સદિશો $\vec{p} = a\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ અને $\vec{q} = \hat{i} + b\hat{j} - c\hat{k}$ સમરેખ હોય, તો $(a, b, c) = \dots\dots$

- (A) $(-1, 2, 5)$ (B) $(\frac{1}{2}, -4, -10)$ (C) $(1, -2, -5)$ (D) $(-\frac{1}{2}, 4, 10)$

ઉકેલ $\vec{p}$ અને $\vec{q}$ સમરેખ છે.

$$\therefore (a\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}) = m(\hat{i} + b\hat{j} - c\hat{k})$$

બંને તરફ સહગુણકો સરખાવતાં

$$a = m, -2 = mb, 5 = -mc$$

$$m = 1 \text{ લેતાં } a = 1, b = -2, c = -5$$

તેથી (C) સત્ય છે.

$$m = \frac{1}{2} \text{ લેતાં, } a = \frac{1}{2}, b = -4, c = -10$$

તેથી (B) સત્ય છે.

$$m = -1 \text{ લેતાં, } a = -1, b = 2, c = 5$$

તેથી (A) સત્ય છે.

$$m = -\frac{1}{2} \text{ લેતાં } a = -\frac{1}{2}, b = 4, c = 10$$

તેથી (D) સત્ય છે.

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

બીજી રીત :

$$\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{2}{5}, ab = -2, ac = -5, a = 1, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} \text{ માટે તમામ શરતો સંતોષાય છે}$$

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

- (141) નીચે આપેલી અભિવ્યક્તિઓમાંથી અર્થવિહીન છે.

- (A) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ (B) $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$ (C) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ (D) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

ઉકેલ $\vec{b} \cdot \vec{c}$ એ અચળ વાસ્તવિક સંખ્યા છે આથી $\vec{b} \cdot \vec{c}$ નું કોઈ પણ સદિશ સાથે અંતઃગુણન અથવા બહિર્ગુણન શક્ય નથી.

વિકલ્પ (B) અને (C) શક્ય નથી.

$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ એ $\vec{c}$ નો અદિશ વડે ગુણાકાર છે તેથી (D) શક્ય છે અને $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ એ સદિશ ત્રિગુણન છે તેથી (A) પણ શક્ય છે.

જવાબ : (B), (C)

(142) જો $\vec{p}, \vec{q}$ અને $\vec{r}$ વિષમતલીય સદિશો હોય અને $\vec{x} = \frac{\vec{q} \times \vec{r}}{\begin{bmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \end{bmatrix}}$, $\vec{y} = \frac{\vec{r} \times \vec{p}}{\begin{bmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \end{bmatrix}}$ અને $\vec{z} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\begin{bmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \end{bmatrix}}$

હોય, તો

(A) $\vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{y} \cdot \vec{q} + \vec{z} \cdot \vec{r} = 3$

(B) $\vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{y} \cdot \vec{q} + \vec{z} \cdot \vec{r} = 0$

(C) $\vec{p} \times \vec{x} + \vec{q} \times \vec{y} + \vec{r} \times \vec{z} = \vec{0}$

(D) $\vec{p} \times \vec{x} + \vec{q} \times \vec{y} + \vec{r} \times \vec{z} = \vec{p} \times (\vec{q} \times \vec{r})$

ઉકેલ $\vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{y} \cdot \vec{q} + \vec{z} \cdot \vec{r} = \frac{1}{\begin{bmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \end{bmatrix}} [(\vec{q} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} + (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{q} + (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}]$

$$= \frac{1}{\begin{bmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \end{bmatrix}} [[\vec{q} \vec{r} \vec{p}] + [\vec{r} \vec{p} \vec{q}] + [\vec{p} \vec{q} \vec{r}]] = 3$$

$\therefore$ (A) શક્ય છે, (B) શક્ય નથી.

હવે $\vec{p} \times \vec{x} + \vec{q} \times \vec{y} + \vec{r} \times \vec{z} = \frac{1}{\begin{bmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \end{bmatrix}} [\vec{p} \times (\vec{q} \times \vec{r}) + \vec{q} \times (\vec{r} \times \vec{p}) + \vec{r} \times (\vec{p} \times \vec{q})]$

$$= \frac{1}{\begin{bmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \end{bmatrix}} [(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{q} - (\vec{p} \cdot \vec{q})\vec{r} + (\vec{q} \cdot \vec{p})\vec{r} - (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p} + (\vec{r} \cdot \vec{q})\vec{p} - (\vec{r} \cdot \vec{p})\vec{q}] = \vec{0}$$

$\therefore$ (C) શક્ય છે, (D) શક્ય નથી.

જવાબ : (A), (C)

નોંધ : જો $\vec{r} = (\vec{p} \times \vec{q})$ તો ?

(143) સદિશો $(x^2 - 6)\hat{i} + (x - 2y)\hat{j} + (y^2 - 5)\hat{k}$ અને $\hat{i} + 2\hat{k}$ એકબીજાને સમાંતર હોય, તો $(x, y) = \dots\dots$

(A) $(-2, 1)$

(B) $(2, 1)$

(C) $(-2, -1)$

(D) $(2, -1)$

ઉકેલ સદિશો $(x^2 - 6)\hat{i} + (x - 2y)\hat{j} + (y^2 - 5)\hat{k}$ અને $\hat{i} + 2\hat{k}$ એકબીજાને સમાંતર છે.

$\therefore (x^2 - 6)\hat{i} + (x - 2y)\hat{j} + (y^2 - 5)\hat{k} = \lambda(\hat{i} + 2\hat{k})$

$\therefore x^2 - 6 = \lambda, \quad x - 2y = 0, \quad y^2 - 5 = 2\lambda$

હવે, $y^2 - 5 = 2\lambda$

$\therefore y^2 - 5 = 2(x^2 - 6)$

$\therefore y^2 = 2x^2 - 7$

$\therefore y^2 = 8y^2 - 7$

$(x = 2y \text{ લેતાં})$

$\therefore 7y^2 = 7$

$\therefore y = \pm 1. \text{ તેથી } x = \pm 2$

$(x = 2y)$

$\therefore (x, y) = (2, 1) \text{ અથવા } (-2, -1)$

જવાબ : (B), (C)

(144) સદિશો $5\hat{i} + x\hat{j} - 2\hat{k}$ અને $-y\hat{i} + \hat{j} + z\hat{k}$ સમરેખ હોય, તો $(x, y, z) = \dots\dots$

- (A) $(1, -5, -2)$ (B) $\left(\frac{-1}{2}, -10, -4\right)$ (C) $\left(\frac{-1}{2}, 10, 4\right)$ (D) $\left(2, \frac{-5}{2}, -4\right)$

ઉકેલ $5\hat{i} + x\hat{j} - 2\hat{k}$ અને $-y\hat{i} + \hat{j} + z\hat{k}$ સમરેખ છે.

$$\therefore 5\hat{i} + x\hat{j} - 2\hat{k} = \lambda (-y\hat{i} + \hat{j} + z\hat{k})$$

$$\therefore 5 = -\lambda y, \quad x = \lambda, \quad -2 = \lambda z$$

$$y = \frac{-5}{\lambda}, \quad x = \lambda \text{ અને } z = \frac{-2}{\lambda}$$

$$\lambda = 1 \text{ લેતાં } x = 1, \quad y = -5, \quad z = -2$$

$\therefore$ (A) સત્ય છે.

$$\lambda = \frac{-1}{2} \text{ લેતાં } x = \frac{-1}{2}, \quad y = 10, \quad z = 4$$

$\therefore$ (C) સત્ય છે પરંતુ (B) અસત્ય છે.

$$\lambda = 2 \text{ લેતાં } x = 2, \quad y = \frac{-5}{2}, \quad z = -1 \neq -4$$

$\therefore$ (D) સત્ય નથી.

જવાબ : (A), (C)

નોંધ : બહિર્ગુણન શૂન્ય સદિશ લઈને પણ ચકાસી શકાય.

(145) એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓના સદિશ $\vec{x} = -\vec{a} + 3\vec{b}$ અને $\vec{y} = 3\vec{a} + \vec{b}$ છે.

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ અને $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ તો વિકર્ણની લંબાઈ

- (A) $4\sqrt{7}$ (B) $4\sqrt{5}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{2}$

ઉકેલ ધારો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં

$$\vec{AB} = \vec{x} \text{ અને } \vec{AD} = \vec{y} \text{ છે.}$$

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{x} + \vec{y}|^2$$

$$= |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y}$$

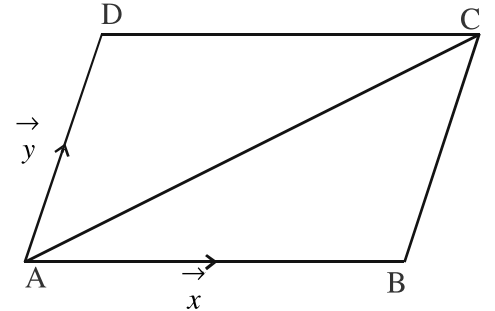
$$= |-\vec{a} + 3\vec{b}|^2 + |3\vec{a} + \vec{b}|^2 + 2(-\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b})$$

$$= |\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{a}|^2 + 6|\vec{b}|^2 + 16\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= 4 + 36 + 36 + 4 - 24 + 24 + 16|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 80 + 16(2)(2) \left(\frac{1}{2}\right) = 80 + 32 = 112$$

$$\therefore |\vec{AC}| = 4\sqrt{7}$$



આકૃતિ 20.19

$$\text{હવે } |\vec{BD}|^2 = |\vec{x} - \vec{y}|^2$$

$$= |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$= |-\vec{a} + 3\vec{b}|^2 + |3\vec{a} + \vec{b}|^2 - 2(-\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b})$$

$$= 80 - 32 = 48$$

$$|\vec{BD}| = 4\sqrt{3}$$

જવાબ : (A), (C)

$$(146) \text{ સદિશો } (a+8)\hat{i} + (a+7)\hat{j} + (a+6)\hat{k}; (a+5)\hat{i} + (a+4)\hat{j} + (a+3)\hat{k};$$

$$(a+2)\hat{i} + (a+1)\hat{j} + a\hat{k} \text{ સમતલીય હોય, તો } a \dots\dots$$

$$(A) > 0$$

$$(B) < 0$$

$$(C) \notin \mathbb{R}$$

$$(D) \in \mathbb{R}$$

ઉકેલ આપેલ સદિશો સમતલીય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} a+8 & a+7 & a+6 \\ a+5 & a+4 & a+3 \\ a+2 & a+1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ a+2 & a+1 & a \end{vmatrix} = 0$$

($R_1 \rightarrow R_1 - R_2$ અને $R_2 \rightarrow R_2 - R_3$ લેતાં)

$\therefore$ પ્રત્યેક $a \in \mathbb{R}$ માટે સત્ય છે.

જવાબ : (A), (B), (D)

$$(147) \vec{x}, \vec{y} \text{ અને } \vec{z} \text{ એવા વિષમતલીય સદિશો છે કે જેથી } \vec{a} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}, \vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}, \vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$$

$$\text{અને } \vec{d} = 4\vec{x} - 3\vec{y} + 5\vec{z}. \text{ જો } \vec{d} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} \text{ હોય, તો } \dots\dots$$

$$(A) p = 1$$

$$(B) p + q = \frac{3}{2}$$

$$(C) -p + q + r = 3$$

$$(D) q + r = 3$$

$$\text{ઉકેલ } \vec{d} = 4\vec{x} - 3\vec{y} + 5\vec{z}$$

$$\therefore p(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) + q(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}) + r(\vec{x} - \vec{y} + \vec{z}) = 4\vec{x} - 3\vec{y} + 5\vec{z}$$

$$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ વિષમતલીય હોવાથી,}$$

$$p + q + r = 4 \quad (1)$$

$$p + q - r = -3 \quad (2)$$

$$p - q + r = 5 \quad (3)$$

સમીકરણ (1), (2) અને (3) ઉકેલતાં,

$$p = 1, q = \frac{-1}{2}, r = \frac{7}{2}. \text{ આથી, (A) સત્ય છે.}$$

$$p + q = \frac{1}{2}. \text{ આથી, (B) અસત્ય છે.}$$

$$-p + q + r = 2. \text{ આથી, (C) અસત્ય છે.}$$

$$q + r = 3. \text{ આથી, (D) સત્ય છે.}$$

જવાબ : (A), (D)

(148) $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ વિષમતલીય એકમ સદિશો છે તથા $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ અસમરેખ છે.

જો $\sqrt{2}(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ હોય, તો

(A) $\vec{a}$ અને $\vec{c}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{3\pi}{4}$

(B) $\vec{a}$ અને $\vec{c}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{4}$

(C) $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{3\pi}{4}$

(D) $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{4}$

ઉકેલ $\sqrt{2}(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{b}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ અને } (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad (\vec{a} \text{ અને } \vec{b} \text{ અસમરેખ છે.)}$$

$$\therefore (\vec{a} \wedge \vec{c}) = \frac{\pi}{4} \quad (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \frac{3\pi}{4}$$

(B) સત્ય છે (C) સત્ય છે.

જવાબ : (B), (C)

(149) સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ માટે જો $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$, તો

(A) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ સમતલીય છે.

(B) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ વિષમતલીય છે.

(C) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ સુરેખ સ્વાયત્ત છે.

(D) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ સુરેખ અવલંબી છે.

ઉકેલ $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$ હોવાથી $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ સમતલીય છે અને તેથી $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ સુરેખ અવલંબી છે.

જવાબ : (A), (D)

(150) સદિશો $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ને લંબ હોય તથા જેનું માન 3 હોય, તેવો સદિશ

(A) $\sqrt{3}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (B) $-\sqrt{3}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (C) $\sqrt{3}(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ (D) $-\sqrt{3}(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

ઉકેલ $\vec{x} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{y} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ બંને સાથે ક્રાટખૂણો બનાવતો સદિશ એટલે કે $\vec{x}$ અને $\vec{y}$

બંનેને લંબ સદિશ $\pm \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$ થાય.

$$\text{હવે, } \vec{x} \times \vec{y} = 5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{x} \times \vec{y}| = 5\sqrt{3}$$

$$\therefore \vec{x} \text{ અને } \vec{y} \text{ બંનેને લંબ એકમ સદિશ} = \pm \frac{(\vec{x} \times \vec{y})}{|\vec{x} \times \vec{y}|}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$\vec{x} \text{ અને } \vec{y} \text{ સાથે ક્રોડપ્રદૂર્ણ બનાવતો 3 માનવાળું સદિશ} = \pm 3 \frac{(\vec{x} \times \vec{y})}{|\vec{x} \times \vec{y}|}$$

$$= \pm \sqrt{3} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

જવાબ : (A), (B)

(151) વિષમતલીય સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ માટે $(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) = \dots$

(A) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{b})$

(B) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{c})$

(C) $(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{c} - \vec{b})$

(D) $\frac{1}{2}[(\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} - \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} - \vec{b}))]$

ઉકેલ $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$
 $\therefore$ (A) સત્ય નથી.

(નોંધ : $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$ શૂન્ય સદિશ નથી. ખાતરી કરો.)

હવે, $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{c}) = -\vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}$
 $\therefore$ (B) સત્ય છે.

$(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} = -(\vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c})$
 $\therefore$ (C) સત્ય નથી.

વળી, $\frac{1}{2}[(\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} - \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} - \vec{b}))]$

$$= \frac{1}{2}[\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{b}]$$

$$= \frac{1}{2}[\vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c}]$$

$$= \frac{1}{2}(2)(\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a})$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$$

$\therefore$ (D) સત્ય છે.

જવાબ : (B), (D)

(152) ભિન્ન અસમરેખ સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ અને $\vec{d}$ માટે $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ અને $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$ હોય, તો

(A) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$ (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{d} \neq \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(C) $(\vec{a} - \vec{d}) \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ (D) $(\vec{a} + \vec{d}) \parallel (\vec{b} - \vec{c})$

ઉકેલ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ અને $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$

$$\therefore (\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{0} \text{ અને } (\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \times \vec{d}) = \vec{0}$$

$$\therefore (\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \times \vec{d})$$

$$\therefore (\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{d}) - (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{d} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) - \vec{d} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$$

$$\therefore (\vec{a} - \vec{d}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$$

$$\therefore (\vec{a} - \vec{d}) \parallel (\vec{b} - \vec{c})$$

$\therefore$ (C) સત્ય છે, (D) સત્ય નથી.

હવે, $(\vec{a} - \vec{d})$ અને $(\vec{b} - \vec{c})$ એકબીજાને સમાંતર હોવાથી તેઓ પરસ્પર લંબ નથી.

$$\therefore (\vec{a} - \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \neq 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{d} \cdot \vec{b} + \vec{d} \cdot \vec{c} \neq 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{d} \neq \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$$

$\therefore$ (A) અસત્ય છે, (B) સત્ય છે.

જવાબ : (B), (C)

(153) શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ માટે $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, તો

(A) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 0$

(B) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

(C) $\vec{a}$ અને $\vec{b} \times \vec{c}$ સમરેખ છે.

(D) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ સમતલીય છે.

ઉકેલ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ સદિશ છે, જ્યારે 0 અદિશ છે. તેથી (A) અસત્ય છે.

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$\vec{c}$ સાથે અંતઃગુણન કરતાં

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = \vec{0} \cdot \vec{c}$$

$$\therefore [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] + [\vec{b} \vec{c} \vec{c}] + [\vec{c} \vec{a} \vec{c}] = 0$$

$$\therefore [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$$

$\therefore (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ તથા $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સમતલીય છે.

$\therefore$ (B) અને (D) સત્ય છે.

(1)

$\vec{b} \times \vec{c}$ એ $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ બંનેને લંબ છે તથા (D) પરથી $\vec{b} \times \vec{c}$ એ $\vec{a}$ ને પણ લંબ છે.

$\therefore$ (C) અસત્ય છે.

જવાબ : (B), (D)

નોંધ : $\vec{b} \times \vec{c} = \lambda \vec{a}$ તો $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{a} = \lambda |\vec{a}|^2 = 0$ કારણ કે $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ છે.

પરંતુ $\vec{a} \neq \vec{0}$. આથી, $\lambda = 0$. આથી, $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$, જે શક્ય નથી.

(154) સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} + x\hat{j} + x^2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = -3\hat{i} + (3x+11)\hat{j} + (x-9)\hat{k}$ માટે $(\vec{a}, \vec{b})$

લઘુકોણ અને $(\vec{a}, \vec{c})$ ગુરુકોણ હોય, તો $x \in \dots\dots$

(A) $(-\infty, 1)$

(B) $(2, 3)$

(C) $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$

(D) $(-\infty, 2)$

ઉકેલ $(\vec{a}, \vec{b})$ લઘુકોણ છે અને $(\vec{a}, \vec{c})$ ગુરુકોણ છે.

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

$$\therefore x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$\therefore (x-2)(x-1) > 0$$

$$\therefore x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} < 0$$

$$\therefore -6 + 3x^2 + 11x + x^3 - 9x^2 < 0$$

$$\therefore x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0$$

$$\therefore (x-1)(x^2 - 5x + 6) < 0$$

$$\therefore (x-1)(x-2)(x-3) < 0$$

$$\therefore x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$$

જવાબ : (A), (B), (C)

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાન હોય છે :

વિધાન : 1. નિષ્કર્ષ વિધાન : 2. કારક વિધાન

આ પ્રકારના પ્રશ્નોના ચાર વિકલ્પો નીચે પ્રમાણે હોય છે.

(A) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે અને વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

(155) વિધાન 1 : જો $(p+a)\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$, $a\hat{i} + (q+b)\hat{j} + c\hat{k}$ અને $a\hat{i} + b\hat{j} + (r+c)\hat{k}$ સમતલીય

સદિશો હોય તથા $pqr \neq 0$ તો $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = -1$

વિધાન 2 : સદિશો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સમતલીય હોય, તો $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

ઉકેલ $\vec{x} = (p+a)\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$, $\vec{y} = a\hat{i} + (q+b)\hat{j} + c\hat{k}$, $\vec{z} = a\hat{i} + b\hat{j} + (r+c)\hat{k}$ સમતલીય

હોવાથી $[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} p+a & b & c \\ a & q+b & c \\ a & b & r+c \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} p & -q & 0 \\ 0 & q & -r \\ a & b & r+c \end{vmatrix} = 0 \quad (R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \text{ અને } R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \text{ લેતી,})$$

$$\therefore p(qr + qc + br) + q(ar) = 0$$

$$\therefore pqr + pqc + prb + qra = 0$$

$$\frac{c}{r} + \frac{b}{q} + \frac{a}{p} = -1 \quad (pqr \neq 0 \text{ વડે ભાગતી})$$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ સદિશો સમતલીય હોય તો } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \text{ એટલે કે } [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$$

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ : (A)**

(156) વિધાન 1 : $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{k}$ છે. $\vec{c}$ એવો સદિશ છે કે જેથી $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ અને

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 10 \text{ તો } \vec{c} \text{ ની દિશાનો એકમ સદિશ } \frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) \text{ છે.}$$

વિધાન 2 : R^3 ના કોઈ પણ સદિશને $\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ ના સુરેખ સંયોજન તરીકે દર્શાવી શકાય.

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{c} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\text{હવે } \vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$$

$$\therefore (z - y)\hat{i} + (x - z)\hat{j} + (y - x)\hat{k} = 2\hat{i} - 2\hat{k}$$

$$\therefore z - y = 2, \quad x - z = 0, \quad y - x = -2$$

$$\text{વળી } \vec{a} \cdot \vec{c} = 10$$

$$\therefore x + y + z = 10$$

$$x = z \text{ અને } y = z - 2 \text{ લેતી, } z + z - 2 + z = 10$$

$$\therefore z = 4 = x \text{ અને } y = 2$$

$$\therefore \vec{c} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{16+4+16} = 6$$

$$\therefore \vec{c} \text{ ની દિશાનો એકમ સદિશ } = \frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

આમ, વિધાન 1 સત્ય છે. વિધાન 2 પણ સત્ય છે. વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

જવાબ : (B)

(157) $\vec{PQ}$, $\vec{QR}$, $\vec{RS}$, $\vec{ST}$, $\vec{TU}$ અને $\vec{UP}$ એ નિયમિત ષટ્કોણની બાજુઓ દર્શાવે છે.

$$\text{વિધાન 1 : } \vec{PQ} \times (\vec{RS} + \vec{ST}) \neq \vec{0}$$

$$\text{વિધાન 2 : } \vec{PQ} \times \vec{RS} = \vec{0} \text{ અને } \vec{PQ} \times \vec{ST} \neq \vec{0}$$

ઉકેલ : $\vec{PQ} \times (\vec{RS} + \vec{ST}) \neq \vec{0}$

$\therefore \vec{PQ} \times \vec{RT} \neq \vec{0}$

$\therefore \vec{PQ}$ અને $\vec{RT}$ એકબીજાને સમાંતર સદિશો નથી તે સત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

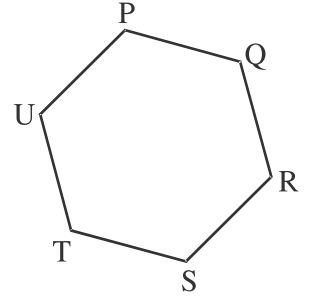
તથા $\vec{PQ} \times \vec{RS} = \vec{0}$

તેથી $\vec{PQ} \parallel \vec{RS}$ જે શક્ય નથી.

અને $\vec{PQ} \times \vec{ST} \neq \vec{0}$ તેથી $\vec{PQ}$ અને $\vec{ST}$ સમાંતર સદિશો નથી પરંતુ $\vec{PQ} \parallel \vec{ST}$ છે.

$\therefore$ વિધાન 2 અસત્ય છે.

જવાબ : (C)



આકૃતિ 20.20

(158) વિધાન 1 : જો $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = -3\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ હોય, તો $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

વિધાન 2 : શૂન્યેતર અસમરેખ સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$

ઉકેલ : $\vec{a} \times \vec{b} = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \times (-3\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$
 $= -3(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \times (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = \vec{0}$

વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 પણ સત્ય છે. પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. જવાબ : (B)

(159) વિધાન 1 : $\vec{a} = 3\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{b} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ છે. જો $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ એવો સદિશ હોય કે જેથી $\vec{b}_1$ એ $\vec{a}$ ને સમાંતર અને $\vec{b}_2$ એ $\vec{a}$ ને લંબ હોય, તો $\vec{b}_2 = -3\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

વિધાન 2 : $\vec{b}_1$ અને $\vec{b}_2$ શૂન્યેતર અસમરેખ સદિશો હોય, તો $\vec{b}$ ને $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ ના સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય, જ્યાં $\vec{b}_1$ એ $\vec{a}$ ને સમાંતર જ્યારે $\vec{b}_2 \perp \vec{a}$ થાય.

ઉકેલ : $\vec{b}_1$ એ $\vec{a}$ ને સમાંતર છે.

$\therefore \vec{b}_1 = m(3\hat{j} - \hat{k}) = 3m\hat{j} - m\hat{k}$

હવે, $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$

$\therefore \vec{b}_2 = \vec{b} - \vec{b}_1$
 $= -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} - 3m\hat{j} + m\hat{k}$
 $= -3\hat{i} + (2 - 3m)\hat{j} + (m + 1)\hat{k}$

$\vec{b}_2 \perp \vec{a}$. આથી, $\vec{b}_2 \cdot \vec{a} = 0$

$\therefore (2 - 3m)(3) + (m + 1)(-1) = 0$

$$\therefore 6 - 9m - m - 1 = 0$$

$$\therefore 5 = 10m. \text{ આથી, } m = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \vec{b}_1 = \frac{3}{2} \hat{j} - \frac{1}{2} \hat{k}$$

$$\text{અને } \vec{b}_2 = -3\hat{i} + \frac{\hat{j}}{2} + \frac{3}{2}\hat{k} \neq -3\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

$\therefore$ વિધાન 1 અસત્ય છે. વિધાન 2 સત્ય છે.

જવાબ : (D)

$$(160) \text{ વિધાન 1 : જો } |\vec{x}| = 4, |\vec{y}| = 3 \text{ અને } |\vec{x} + \vec{y}| = 5 \text{ તો } |\vec{x} - \vec{y}| = 5$$

$$\text{વિધાન 2 : } |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| \text{ જ્યાં } \vec{a} \text{ અને } \vec{b} \text{ શૂન્યેતર સદિશો છે.}$$

$$\text{ઉકેલ : } |\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$\therefore 25 = 16 + 9 + 2\vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$\therefore \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\text{હવે } |\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} = 16 + 9 - 0 = 25$$

$$\therefore |\vec{x} - \vec{y}| = 5$$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| \text{ ત્યારે જ સત્ય થાય જો } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$\therefore$ વિધાન 2 અસત્ય છે.

જવાબ : (C)

$$(161) \text{ વિધાન 1 : } \vec{x} \cdot \vec{a} = 0, \vec{x} \cdot \vec{b} = 0, \vec{x} \cdot \vec{c} = 0, (\vec{x} \neq \vec{0}) \text{ તો } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ સમતલીય છે તથા}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\text{વિધાન 2 : જો } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ સમતલીય હોય તો } [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$$

$$\text{ઉકેલ : } \vec{x} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{a}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{b}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{c}$$

આમ, $\vec{x}$ એ $\vec{a}, \vec{b}$ અને $\vec{c}$ ને લંબસદિશ છે. $\vec{x} \neq \vec{0}$

$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સમતલીય છે.

હવે, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સમતલીય છે. આથી, $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$ જ્યાં α, β, γ પૈકી ઓછામાં ઓછો એક શૂન્યેતર છે.

$\alpha = \beta = \gamma = 1$ લેતાં,

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સમતલીય હોવાથી $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે. પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. જવાબ : (B)

(162) વિધાન 1 : જો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સમતલીય હોય, તો $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ સમતલીય છે.

વિધાન 2 : $[\vec{a} \times \vec{b} \ \vec{b} \times \vec{c} \ \vec{c} \times \vec{a}] = 2[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } [\vec{a} \times \vec{b} \ \vec{b} \times \vec{c} \ \vec{c} \times \vec{a}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot ((\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})) \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}) \vec{c} - ((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}) \vec{a}] \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot ([\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}] \vec{c} - [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{c}] \vec{a}) \\ &= [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} - 0 \\ &= [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ વિધાન 2 અસત્ય છે. (અહીંથી જ જવાબ (C) નક્કી થઈ ગયો !)

હવે, જો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સમતલીય હોય, તો

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$$

$$\therefore [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^2 = 0$$

$$\therefore [\vec{a} \times \vec{b} \ \vec{b} \times \vec{c} \ \vec{c} \times \vec{a}] = 0$$

$\therefore \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}$ અને $\vec{c} \times \vec{a}$ સમતલીય છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

જવાબ : (C)

(163) વિધાન 1 : જો $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ ત્રણ બિંદુઓ છે, જ્યાં $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ અને $\vec{c} = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 13\hat{k}$ તો OABC ચતુષ્લક છે, જ્યાં O ઊગમબિંદુ છે.

વિધાન 2 : જો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ અસમતલીય હોય અને તેઓ અનુક્રમે બિંદુઓ A, B, C ના સ્થાન સદિશ હોય, તો OABC ચતુષ્લક થશે જ્યાં O ઊગમબિંદુ દર્શાવે છે.

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } [\vec{OA} \ \vec{OB} \ \vec{OC}] &= [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 13 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (C_3 \rightarrow C_3 - C_1 - C_2)$$

તેથી OABC ચતુષ્ફલક નથી.

∴ વિધાન 1 અસત્ય છે.

હવે, જો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ અસમતલીય હોય, તો $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] \neq 0$

∴ OABC ચતુષ્ફલક દર્શાવે છે.

∴ વિધાન 2 સત્ય છે.

જવાબ : (D)

(164) વિધાન 1 : $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$

વિધાન 2 : જો $\vec{a} = \vec{b}$ તો $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$

ઉકેલ : જો $\vec{a} = \vec{b}$ તો $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ પરંતુ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ તો $\vec{a} = \vec{b}$ સત્ય નથી.

કારણ કે $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ તો $\vec{a} = -\vec{b}$ પણ શક્ય છે.

તેથી વિધાન 1 અસત્ય છે.

ઉદાહરણ તરીકે $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (-4, 3)$ તો $\vec{a} \neq \vec{b}$, પરંતુ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

હવે, $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}|^2$

તથા $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2$

∴ $\vec{a} = \vec{b}$ તો $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$

∴ વિધાન 2 સત્ય છે.

જવાબ : (D)

(165) વિધાન 1 : સમાંતર ફલકની ધારો $\hat{j} + x\hat{k}$, $\hat{i} + x\hat{j} + \hat{k}$ અને $x\hat{i} + \hat{k}$ હોય, તો $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, ત્યારે સમાંતર ફલકનું ઘનફળ મહત્તમ થાય. $x \in [0, 1]$

વિધાન 2 : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ત્રણ ક્રમિક ધાર હોય તેવા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $\frac{1}{6} |[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]|$ થાય.

ઉકેલ : સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $= |V|$ જ્યાં

$$V = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(1-x) + x(-x^2) = -1 + x - x^3 = -1 + x - x^3 = -1 + x(1-x^2) < 0$$

$$\therefore V = 1 - x + x^3$$

હવે $\frac{dV}{dx} = 3x^2 - 1$ તથા $\frac{d^2V}{dx^2} = 6x$

V મહત્તમ માટે $\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

અને $\left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{\left(x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)} = \frac{-6}{\sqrt{3}} < 0$

∴ $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ માટે ઘનફળ મહત્તમ છે.

∴ વિધાન 1 સત્ય છે.

હવે $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ધારવાળા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $[[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]]$ છે.

∴ વિધાન 2 અસત્ય છે.

જવાબ : (C)

(166) વિધાન 1 : $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ બે એકમ સદિશો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય અને તેમની વચ્ચેના ખૂણાનો દ્વિભાજક

$$\vec{a} \text{ એ એકમ સદિશ હોય, તો } \vec{a} = \frac{\vec{x} + \vec{y}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

વિધાન 2 : જો સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ABC માં $AB = AC = 1$ તો $\angle A$ નો દ્વિભાજક $\vec{AE} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$ થાય.

ઉકેલ : $\triangle ABC$ સમદ્વિભુજ છે તેથી A માંથી દોરેલ મધ્યગા તથા $\angle A$ નો દ્વિભાજક બંને સમાન થશે.

$$\text{મધ્યગા } \vec{AD} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}.$$

$$\text{તેથી } \angle A \text{ નો દ્વિભાજક } \vec{AE} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$$

∴ વિધાન 2 સત્ય છે.

હવે $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ ને સમદ્વિભાજક ત્રિકોણની સમાન બાજુઓ લઈએ તો મધ્યગા

$$\vec{AD} = \frac{\vec{x} + \vec{y}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{AD}|^2 &= \frac{1}{4} [|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta] \\ &= \frac{1}{4} [1 + 1 + 2\cos\theta] = \frac{1}{2} (1 + \cos\theta) = \frac{1}{2} \times 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{AD}| = \cos \frac{\theta}{2} \quad \left(0 < \theta < \pi \text{ હોવાથી } \cos \frac{\theta}{2} > 0 \right)$$

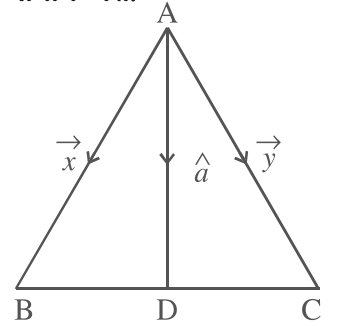
હવે મધ્યગા $\vec{AD}$ એ જ કોણ દ્વિભાજક $\vec{a}$ થશે.

કોણ દ્વિભાજક $\vec{a}$ એ એકમ સદિશ છે.

$$\therefore \vec{a} = \frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|} = \frac{\vec{x} + \vec{y}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

∴ વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)



આકૃતિ 20.21

જોડકાં જોડવાના દાખલા

(167) વિભાગ I ના પ્રશ્નોને વિભાગ II ના યોગ્ય જવાબ સાથે જોડકાં બનાવો :

વિભાગ I		વિભાગ II	
(1)	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ એ ΔABC ની બાજુઓ અનુક્રમે $\vec{BC}, \vec{CA}$ અને $\vec{AB}$ દર્શાવે તો	(p)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$
(2)	નિયમિત ચતુષ્લક્ષની ત્રણ ધારો $\vec{a}, \vec{b}$ અને $\vec{c}$ હોય, તો	(q)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$
(3)	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ એકમ સદિશો હોય અને $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ હોય, તો	(r)	$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{3}{2}$
(4)	જો $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ અને $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$ હોય, તો	(s)	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

(A) (1) $\rightarrow$ (p), (2) $\rightarrow$ (r), (3) $\rightarrow$ (q), (4) $\rightarrow$ (s)

(B) (1) $\rightarrow$ (r), (2) $\rightarrow$ (p), (3) $\rightarrow$ (q), (4) $\rightarrow$ (s)

(C) (1) $\rightarrow$ (s), (2) $\rightarrow$ (q), (3) $\rightarrow$ (r), (4) $\rightarrow$ (p)

(D) (1) $\rightarrow$ (s), (2) $\rightarrow$ (r), (3) $\rightarrow$ (p), (4) $\rightarrow$ (q)

ઉકેલ : (1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ એ ΔABC ની બાજુઓ છે.

$$\therefore \Delta ABC \text{નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c}| = \frac{1}{2} |\vec{c} \times \vec{a}|$$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c} \times \vec{a}|$ તથા $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}$ અને $\vec{c} \times \vec{a}$ ની દિશા સમાન છે.
(દિશા ત્રિકોણના સમતલને લંબ)

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

$\therefore$ (1) $\rightarrow$ (s)

(2) નિયમિત ચતુષ્લક્ષ હોવાથી $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$

$\therefore \Delta ABC$ સમભુજ છે.

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}| |\vec{a}| \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$$

$\therefore$ (2) $\rightarrow$ (q)

(ખરેખર તો (1) $\rightarrow$ (s), (2) $\rightarrow$ (q) વાળો વિકલ્પ (C) જ છે. આથી જવાબ (C))

$$(3) |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$\therefore 0 = 3 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{-3}{2}$$

$$\therefore (3) \rightarrow (r)$$

$$(4) \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{a} \text{ અને } \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a} \text{ અને } \vec{c} \perp \vec{a}$$

$$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ પરસ્પર લંબ સદિશો છે.}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\therefore (4) \rightarrow (p)$$

જવાબ : (C)

(168) જો $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{d} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ હોય, તો વિભાગ I ના મુદ્દાઓને વિભાગ II ના યોગ્ય મુદ્દા સાથે જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II	
(P) $\vec{b} \cdot \vec{c}$	(1)	3
(Q) $[\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{d}]$	(2)	$\vec{a} \cdot \vec{b}$
(R) $\vec{c} \cdot \vec{d}$	(3)	$\vec{a} \cdot \vec{c}$
(S) $\vec{c} \times \vec{d}$	(4)	4
	(5)	$2\hat{j} - 2\hat{k}$
	(6)	$2\hat{j} + 2\hat{k}$

$$(A) (P) \rightarrow (1), (Q) \rightarrow (4), (R) \rightarrow (2), (S) \rightarrow (5)$$

$$(B) (P) \rightarrow (3), (Q) \rightarrow (4), (R) \rightarrow (2), (S) \rightarrow (6)$$

$$(C) (P) \rightarrow (3), (Q) \rightarrow (4), (R) \rightarrow (1), (S) \rightarrow (5)$$

$$(D) (P) \rightarrow (3), (Q) \rightarrow (1), (R) \rightarrow (2), (S) \rightarrow (6)$$

$$\text{ઉકેલ : } \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 - 1 + 1 = 1 \text{ અને } \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 + 1 - 1 = 1 = \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\therefore (P) \rightarrow (3)$$

$$(Q) [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{d}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(1 - 1) - 1(-1 - 1) + 1(1 + 1) = 0 + 2 + 2 = 4$$

$$\therefore (Q) \rightarrow (4)$$

$$(R) \vec{c} \cdot \vec{d} = 1 - 1 - 1 = -1 \text{ અને } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$\therefore \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore (R) \rightarrow (2)$$

(અહીં જવાબ (B) નક્કી થઈ ગયો.)

$$(S) \quad \vec{c} \times \vec{d} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

$$= 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\therefore (S) \rightarrow (6)$$

જવાબ : (B)

ટૂંકી રીત : સૌપ્રથમ (S) $\rightarrow$ (6)

$$(Q) \rightarrow (4)$$

જવાબ : (B)

(169) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ માટે વિભાગ (I) અને વિભાગ (II) માંથી યોગ્ય જોડકાં બનાવો.

વિભાગ I		વિભાગ II	
(1)	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$	(P)	$\vec{a} \perp \vec{b}$
(2)	$\vec{a}, \vec{b}$ અને $\vec{a} \times \vec{b}$ એકમ સદિશ હોય તો	(Q)	$ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} $
(3)	$[\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}]$	(R)	$\vec{a}, \vec{b}$ એકમ સદિશો છે.
(4)	$\vec{a}, \vec{b}$ એક જ દિશાના સદિશો હોય તો	(S)	$[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$
		(T)	$[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2$
		(U)	$\vec{a}$ અને $\vec{c} - \vec{b}$ સમરેખ છે.
		(V)	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સમરેખ છે.

$$(A) (1) \rightarrow (S), (2) \rightarrow (Q), (3) \rightarrow (T), (4) \rightarrow (R)$$

$$(B) (1) \rightarrow (U), (2) \rightarrow (R), (3) \rightarrow (S), (4) \rightarrow (P)$$

$$(C) (1) \rightarrow (U), (2) \rightarrow (P), (3) \rightarrow (V), (4) \rightarrow (Q)$$

$$(D) (1) \rightarrow (U), (2) \rightarrow (P), (3) \rightarrow (T), (4) \rightarrow (Q)$$

$$\text{ઉકેલ : (1) } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \text{ અને } \vec{b} - \vec{c} \text{ સમરેખ છે.}$$

$$\therefore (1) \rightarrow (U)$$

$$(2) |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$\therefore 1 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = 1$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\therefore \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\therefore (2) \rightarrow (P)$$

$$(3) [\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2$$

∴ (3) → (T)

(અહીં જવાબ (D) નક્કી થઈ ગયો.)

(4) $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ એક જ દિશાના સદિશ છે.

$$\therefore \vec{a} = k\vec{b}, k > 0$$

$$\text{હવે, } |\vec{a} + \vec{b}| = |k\vec{b} + \vec{b}|$$

$$= |(k+1)|\vec{b}|$$

$$= k|\vec{b}| + |\vec{b}| \quad (k > 0)$$

$$= |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (k > 1 \text{ લેતાં})$$

∴ (4) → (Q)

નોંધ : પ્રથમ (2) અને પછી (3) ગણતાં જ જવાબ (D) નક્કી થઈ જાય.

જવાબ : (D)

માહિતી આધારિત પ્રશ્નો :

(170) ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ $A(2, 0, 2)$, $B(1, 1, -1)$ અને $C(4, -2, 1)$ છે. બિંદુ D એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી 1:2 અને E એ $\overline{AC}$ નું C તરફથી 1:2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. અવકાશમાં બિંદુ F આવેલું છે. $\overleftrightarrow{CD}$ અને $\overleftrightarrow{BE}$ નું છેદબિંદુ P છે. F નું ΔABC ના સમતલથી અંતર $3\sqrt{2}$ એકમ છે.

ઉપરની માહિતી પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) P નો સ્થાન સદિશ

$$(A) 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad (B) -3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad (C) 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \quad (D) -3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

(2) ચતુષ્ફલક $ABCF$ નું ઘનફળ

$$(A) 7 \text{ ઘન એકમ} \quad (B) \frac{7}{5} \text{ ઘન એકમ} \quad (C) \frac{7}{3} \text{ ઘન એકમ} \quad (D) \frac{3}{5} \text{ ઘન એકમ}$$

ઉકેલ : (1) D , $\overline{AB}$ નું A તરફથી 1 : 2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$$\therefore D\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \text{ નું સમીકરણ } \vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}), \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{અવકાશમાં રેખાનું સમીકરણ})$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + \lambda\left(\left(\frac{5}{3}-4\right)\hat{i} + \left(\frac{1}{3}+2\right)\hat{j} + (1-1)\hat{k}\right) \\ &= 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + \frac{\lambda}{3}(-7\hat{i} + 7\hat{j}), \end{aligned}$$

E , $\overline{AC}$ નું C તરફથી 1 : 2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$$\therefore E\left(\frac{10}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{BE} \text{ નું સમીકરણ } \vec{r} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu\left(\left(\frac{10}{3}-1\right)\hat{i} + \left(\frac{-4}{3}-1\right)\hat{j} + \left(\frac{4}{3}+1\right)\hat{k}\right), \mu \in \mathbb{R}$$

$$= \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \frac{\mu}{3}(7\hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}),$$

$\overleftrightarrow{CD}$ અને $\overleftrightarrow{BE}$ નું છેદબિંદુ મેળવવા માટે ધારો કે,

$\overleftrightarrow{CD}$ પરનું બિંદુ $\left(4 - \frac{7\lambda}{3}, -2 + \frac{7\lambda}{3}, 1\right)$ એ $\overleftrightarrow{BE}$ પર આવેલું છે.

$$\therefore \left(4 - \frac{7\lambda}{3}, -2 + \frac{7\lambda}{3}, 1\right) = \left(1 + \frac{7\mu}{3}, 1 - \frac{7\mu}{3}, -1 + \frac{7\mu}{3}\right)$$

$$\therefore 1 = -1 + \frac{7\mu}{3} \quad \text{તથા} \quad 4 - \frac{7\lambda}{3} = 1 + \frac{7\mu}{3}$$

$$\frac{6}{7} = \mu$$

$$\therefore 3 - \frac{7}{3} \left(\frac{6}{7}\right) = \frac{7\lambda}{3}$$

$$\therefore \frac{3}{7} = \lambda$$

$\therefore$ તેમનું છેદબિંદુ $P(3, -1, 1)$

$\therefore P$ નો સ્થાનસદિશ $3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

જવાબ : (C)

(2) ચતુષ્ફલક ABCFનું ઘનફળ = $\frac{1}{3}$ (પાયો ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $\times \Delta ABC$ ના સમતલથી Fથી ઊંચાઈ)

$$\begin{aligned} \text{હવે, } \Delta ABC \text{નું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\ &= \frac{1}{2} |(-\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) \times (2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k})| \\ &= \frac{1}{2} |-7\hat{i} - 7\hat{j}| \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ ચોરસ એકમ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ચતુષ્ફલકનું ઘનફળ} &= \frac{1}{3} \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} \right) \\ &= 7 \text{ ઘન એકમ} \end{aligned}$$

જવાબ : (A)

(171) જો $\vec{b} \neq \vec{0}$ તથા સદિશ $\vec{a}$ ને $\vec{a} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ ના રૂપે લખી શકાય છે, જ્યાં $\vec{b}_1$ એ $\vec{b}$ ને સમાંતર અને $\vec{b}_2$ એ $\vec{b}$ ને લંબ સદિશ હોય.

અહીં શિરોબિંદુઓ $\vec{b}_1 = \lambda \vec{b}$, $\lambda \neq 0$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b}_1 \cdot \vec{b} + \vec{b}_2 \cdot \vec{b} = \lambda |\vec{b}|^2 \quad \text{કારણ કે } \vec{b}_2 \perp \vec{b}$$

$$\therefore \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}, \quad (\vec{b}_1 \text{ એ } \vec{a} \text{ નો } \vec{b} \text{ પરનો પ્રક્ષેપ થશે.)}$$

$$\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} \quad \text{અથવા} \quad \text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = (\vec{a} \cdot \hat{b}) \hat{b}$$

અહીં $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ ને $\vec{a}$ નો $\vec{b}$ ની દિશામાંનો ઘટક કહે છે, એટલે કે $\text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a} \cdot \hat{b}$

જો $\vec{a} = k\vec{b}$ તો $\vec{a} = b_1$ અને $b_2 = 0$ અને જો $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ તો $\vec{a} = b_2$ અને $b_1 = 0$ થાય.

ઉપરની માહિતી પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{b} = -4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ તો $\text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a} \cdot \hat{b} = \dots\dots$

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) $-\frac{1}{6}$

(2) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{k}$ તો $\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \dots\dots$

- (A) $\frac{1}{25}(4\hat{i} + 3\hat{k})$ (B) $\frac{1}{5}(4\hat{i} + 3\hat{k})$ (C) $-\frac{1}{5}(4\hat{i} + 3\hat{k})$ (D) $-\frac{1}{25}(4\hat{i} + 3\hat{k})$

(3) $\vec{a} = 4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ તથા $\vec{a} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ તો $\vec{b}_2 = \dots\dots$

- (A) $\frac{1}{3}(10\hat{i} - \hat{j} + 11\hat{k})$ (B) $\frac{2}{3}(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$
(C) $\frac{1}{3}(10\hat{i} + \hat{j} + 11\hat{k})$ (D) $\frac{1}{3}(14\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k})$

ઉકેલ : (1) $\text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-8-2+4}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{-6}{6} = -1$

જવાબ : (B)

(2) $\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} = \left(\frac{8-3}{16+9} \right) (4\hat{i} + 3\hat{k}) = \frac{1}{5}(4\hat{i} + 3\hat{k})$

જવાબ : (B)

(3) $\vec{a} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, જ્યાં $\vec{b}_1$ એ $\vec{a}$ નો $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ છે.

$\therefore \vec{b}_1 = \text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} = \frac{4+1-3}{(1+1+1)} (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = \frac{2}{3}(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

હવે, $\vec{b}_2 = \vec{a} - \vec{b}_1$

$= 4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k} - \frac{2}{3}(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

$= \frac{10}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{11}{3}\hat{k}$

$= \frac{1}{3}(10\hat{i} + \hat{j} + 11\hat{k})$

જવાબ : (C)

(172) સમતલમાં બિંદુ અસમરેખ બિંદુઓ A(2, 1, -2), B(0, 1, 4) અને C(1, -4, 1) આવેલાં છે. N એ B માંથી $\overline{AC}$ પરનો લંબપાદ છે. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) N નો સ્થાનસદિશ

(A) $\frac{1}{7}(10\hat{i} + 13\hat{j} + 2\hat{k})$

(B) $\frac{1}{7}(10\hat{i} - 13\hat{j} - 2\hat{k})$

(C) $\frac{1}{7}(10\hat{i} - 13\hat{j} + 2\hat{k})$

(D) $\frac{1}{7}(10\hat{i} + 13\hat{j} + 2\hat{k})$

(2) ΔBNA નું ક્ષેત્રફળ =

(A) $\frac{150\sqrt{6}}{49}$

(B) $\frac{20}{7\sqrt{10}}$

(C) $\frac{20\sqrt{10}}{7}$

(D) $\frac{20\sqrt{6}}{7}$

(3) $\cos (\angle NBC) = \dots\dots$

(A) $\frac{\sqrt{10}}{7}$

(B) $\frac{2}{7}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ઉકેલ : (1) ધારો કે N એ $\overline{AC}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$$\therefore N \text{ ની યામ } \left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{-4\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda-2}{\lambda+1} \right)$$

$$\overrightarrow{BN} = \left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{-5\lambda}{\lambda+1}, \frac{-3\lambda-6}{\lambda+1} \right)$$

$$\overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\therefore \left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{-5\lambda}{\lambda+1}, \frac{-3\lambda-6}{\lambda+1} \right) \cdot (-1, -5, 3) = 0$$

$$\therefore -\lambda - 2 + 25\lambda - 9\lambda - 18 = 0$$

$$\therefore 15\lambda = 20$$

$$\therefore \lambda = \frac{4}{3}$$

$$\therefore N \text{ નો સ્થાનસદિશ } \frac{1}{7}(10\hat{i} - 13\hat{j} - 2\hat{k})$$

જવાબ : (B)

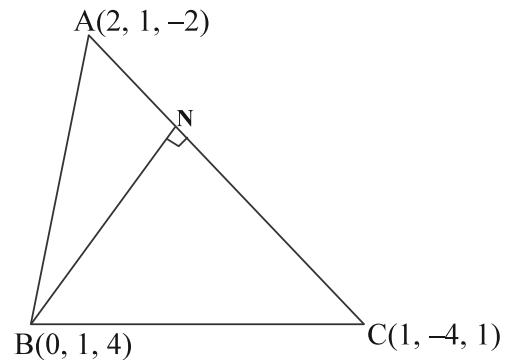
$$\text{ઉકેલ : (2) } \Delta BNA \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BN}|$$

$$= \frac{1}{2} |(-2\hat{i} + 6\hat{k}) \times \frac{1}{7}(10\hat{i} - 20\hat{j} - 30\hat{k})|$$

$$= \frac{20}{14} |(-\hat{i} + 3\hat{k}) \times (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})|$$

$$= \frac{10}{7} |(6\hat{i} + 2\hat{k})|$$

$$= \frac{20\sqrt{10}}{7} \text{ ચો એકમ}$$



આકૃતિ 20.22

જવાબ : (C)

ઉકેલ : (3) $\cos \angle NBC = \frac{\vec{BN} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BN}| |\vec{BC}|}$

$$= \frac{\frac{1}{7}(10\hat{i} - 20\hat{j} - 30\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k})}{\frac{10}{7}\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{1+25+9}} = \frac{20}{7\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

જવાબ : (D)

(173) ધારો કે $\vec{a} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = -3\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{c} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ છે. $\vec{x}$ એ $\vec{a}$ નો

$\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ તથા $\vec{y}$ એ $\vec{x}$ નો $\vec{c}$ પરનો પ્રક્ષેપ હોય, તો તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) $\vec{y} = \dots\dots$

- (A) $\frac{943}{49}(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$ (B) $\frac{943}{(49)^2}(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$
 (C) $\frac{-943}{49}(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$ (D) $\frac{-943}{(49)^2}(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$

(2) $\vec{x} \cdot \vec{b} = \dots\dots$

- (A) $\frac{-41}{7}$ (B) -41 (C) $\frac{41}{7}$ (D) 41

(3) નીચેનામાંથી કયો વિકલ્પ સત્ય છે ?

- (A) $\vec{a}$, $\vec{x}$ અને $\vec{b}$ સમતલીય છે. (B) $\vec{a}$ અને $\vec{y}$ સમરેખ છે.
 (C) $\vec{a}$, $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ સમતલીય છે. (D) $\vec{x}$ અને $\vec{c}$ સમરેખ છે.

ઉકેલ : (1) $\vec{x} = \text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} = \frac{-41}{49}(-3\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k})$

$$\vec{y} = \text{Proj}_{\vec{c}} \vec{x} = \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \right) \vec{c} = \frac{-41}{49} \left(\frac{23}{49} \right) (3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{-943}{(49)^2} (3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$$

જવાબ : (D)

(2) $\vec{x} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} (\vec{b} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = -41$

જવાબ : (B)

(3) $\vec{x}$ અને $\vec{b}$ સમરેખ હોવાથી $\vec{a}$, $\vec{x}$, $\vec{b}$ સમતલીય છે.

$\vec{a}$, $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ માં કોઈ પણ બે સમરેખ નથી તથા $[\vec{a} \ \vec{x} \ \vec{y}] \neq 0$

$[\vec{a} \ \vec{x} \ \vec{y}] =$ શૂન્યેતર અચળ

$$[\vec{a} \ \vec{x} \ \vec{y}] = \left(\frac{-41}{49} \right) \left(\frac{-943}{(49)^3} \right) 36 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore$ માત્ર વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

જવાબ : (A)

