

- શ્રેણિક : વાસ્તવિક સંખ્યાઓની કોઈપણ લંબચોરસ ગોઠવણીને શ્રેણિક કહે છે. આ સંખ્યાઓને [] અથવા () પ્રકારના કૌંસમાં મૂકવામાં આવે છે.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ એ } m \times n \text{ શ્રેણિક છે.}$$

અહીં a_{ij} એ i મી હાર અને j મા સ્તંભનો ઘટક છે.

- સમાન શ્રેણિકો : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ તથા $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ માટે $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, 2, 3 \dots m$ તથા $j = 1, 2, 3 \dots n$

- શ્રેણિકનો પ્રકાર :

(1) હાર શ્રેણિક : $1 \times n$ શ્રેણિક $[a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \dots \ a_{1n}]$ ને ‘હાર શ્રેણિક’ કહે છે.

(2) સ્તંભ શ્રેણિક : $m \times 1$ શ્રેણિક $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ ને ‘સ્તંભ શ્રેણિક’ કહે છે.

(3) ચોરસ શ્રેણિક : $n \times n$ પ્રકારના શ્રેણિકને “ચોરસ શ્રેણિક” કહે છે.

(4) વિકર્ણ શ્રેણિક : જો ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ માં $a_{ij} = 0, i \neq j$ હોય તો A ને વિકર્ણ શ્રેણિક કહે છે.

એટલે કે વિકર્ણ શ્રેણિકમાં અગ્રવિકર્ણ સિવાયના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય છે. સંકેતમાં તેને $\text{diag} [a_{11} \ a_{22} \dots \ a_{nn}]$ તરીકે લખાય છે.

(5) શૂન્ય શ્રેણિક : જે શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય તે શ્રેણિકને શૂન્ય શ્રેણિક કહે છે.

શૂન્ય શ્રેણિકને $O_{m \times n}$ અથવા O વડે પણ દર્શાવાય છે.

[O ને સરવાળાનો તટસ્થ શ્રેણિક પણ કહેવાય. $A + O = O + A = A$]

- જો A અને B બંને $m \times n$ શ્રેણિક હોય તો તેઓ સરવાળા માટે સુસંગત છે.
- વિરોધી શ્રેણિક : $-A = [-a_{ij}]$ ને $A = [a_{ij}]$ નો વિરોધી શ્રેણિક કહે છે.
- શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ શ્રેણિક હોય અને k કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો શ્રેણિક $[ka_{ij}]$ ને શ્રેણિક A નો અદિશ k વડે ગુણાકાર કહે છે.

આમ, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ માટે $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$

$$(1) A + B = B + A. \quad (2) (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(3) A + O = O + A = A. \quad (4) A + (-A) = (-A) + A = O$$

$$(5) k(A+B) = kA + kB \quad (6) (k+l)A = kA + lA$$

$$(7) lA = A \quad (8) (-1)A = -A$$

- **પરિવર્ત શ્રેણિક** : જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભોમાં ફેરવવામાં આવે અને તેથી જે શ્રેણિક મળે તેને શ્રેણિક A નો પરિવર્ત શ્રેણિક કહેવાય. તેને સંકેતમાં A^T અથવા A' વડે દર્શાવાય.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ તો } A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$$

- **સંમિત શ્રેણિક** : જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = A$ થાય, તો A ને “સંમિત શ્રેણિક” કહેવાય.
- **વિસંમિત શ્રેણિક** : જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = -A$ થાય; તો A ને “વિસંમિત શ્રેણિક” કહેવાય.

$$\text{શ્રેણિક } A^T = [a_{ji}]_{n \times n} \text{ માટે પ્રત્યેક } i \text{ અને } j \text{ માટે } a_{ij} = -a_{ji} \text{ થાય.}$$

$$\text{હવે } i = j \text{ તો } 2a_{ii} = 0 \text{ એટલે કે } a_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \text{ i.e. } a_{ii} = 0$$

આમ વિસંમિત શ્રેણિકમાં અગ્ર વિકર્ણના બધા જ ઘટકો શૂન્ય થાય છે.

$$(1) (A + B)^T = A^T + B^T \quad (2) (A^T)^T = A \quad (3) (kA)^T = kA^T$$

- **શ્રેણિકોનો ગુણાકાર** : ધારો કે $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ બે શ્રેણિકો છે. તેમનો ગુણાકાર $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$\text{આમ, } A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ અને } B = [b_{ij}]_{n \times p} \text{ હોય તો તેમનો ગુણાકાર } AB = \left[\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{kj} \right]_{m \times p} \text{ થાય.}$$

- જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ હોય; તો A અને B ગુણાકાર માટે સુસંગત છે તેમ કહેવાય.

શ્રેણિકોના ગુણાકાર માટેના ગુણધર્મો

(1) **વિભાજનના નિયમો** :

$$(i) A = [a_{ij}]_{m \times n}; B = [b_{ij}]_{n \times p} \text{ અને } C = [c_{ij}]_{n \times p} \text{ માટે, } A(B + C) = AB + AC$$

$$(ii) A = [a_{ij}]_{m \times n}; B = [b_{ij}]_{m \times n} \text{ અને } C = [c_{ij}]_{n \times p} \text{ માટે, } (A + B)C = AC + BC$$

(2) **જૂથનો નિયમ** : $A = [a_{ij}]_{m \times n}; B = [b_{ij}]_{n \times p}$ અને $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ માટે

$$A(BC) = (AB)C$$

- **એકમ શ્રેણિક** : જે ચોરસ શ્રેણિકમાં પ્રત્યેક અગ્ર વિકર્ણ ઘટક 1 હોય તથા બાકીના ઘટકો શૂન્ય હોય તેવા શ્રેણિકને એકમ શ્રેણિક કહે છે. એકમ શ્રેણિકને I વડે દર્શાવાય છે.

$$I_n = I_{n \times n} = I = [a_{ij}]_{n \times n} \text{ જ્યાં } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{જો } i = j \\ 0, & \text{જો } i \neq j \end{cases}$$

- જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને I_n એકમ શ્રેણિક હોય તો $A I_n = I_n A = A$
- **અદિશ શ્રેણિક** : જો $k \in \mathbb{R}$ હોય તો $k I_n$ ને અદિશ શ્રેણિક કહે છે.
- **ચોરસ શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક** : જો કોઈ ચોરસ શ્રેણિકના બધા જ ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી તેનો નિશ્ચાયક મેળવવામાં આવે, તો તે નિશ્ચાયકને આપેલ ચોરસ શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક કહે છે. જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો A ના નિશ્ચાયકને $|A|$ અથવા $\det A$ વડે દર્શાવાય છે.
- ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે $|AB| = |A| |B|$

● સહઅવયવજ શ્રેણિક (Adjoint of Matrix) :

ચોરસ શ્રેણિક A ના દરેક ઘટકના સ્થાને A ના સંગત ઘટકનો સહઅવયવ લખીને બનતા શ્રેણિકનો પરિવર્ત શ્રેણિક લેતાં મળતા શ્રેણિકને A નો ‘સહઅવયવજ’ શ્રેણિક કહે છે. તેને $\text{adj } A$ વડે દર્શાવાય.

A_{ij} એ $|A|$ માં ઘટક a_{ij} નો સહઅવયવ છે.

$$\text{જો } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ તો } \text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- વ્યસ્ત શ્રેણિક : જો ચોરસ શ્રેણિક A ને સંગત બીજો ચોરસ શ્રેણિક B એવો મળે કે જેથી $AB = I = BA$ થાય, (I એકમ શ્રેણિક છે.) તો B ને A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહે છે. A ના વ્યસ્ત શ્રેણિકને A^{-1} વડે દર્શાવાય છે.
- જો A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય, તો તે અનન્ય છે.
- ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A \cdot \text{adj } A = \text{adj } A \cdot A = |A| I$
- સામાન્ય શ્રેણિક : ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ હોય; તો તે ચોરસ શ્રેણિકને સામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.
- અસામાન્ય શ્રેણિક : જો ચોરસ શ્રેણિક સામાન્ય ન હોય, તો તેને અસામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.
- ચોરસ શ્રેણિક A સામાન્ય હોય, તો અને તો જ $|A| \neq 0$

$$A \text{ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A \text{ (જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો)}$$

અગત્યનાં પરિણામો :

- સામાન્ય શ્રેણિક A ના વ્યસ્તના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય અને A ના નિશ્ચાયકની વ્યસ્ત સંખ્યા સમાન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે એટલે કે $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
- જો A અને B સામાન્ય શ્રેણિકો હોય તો AB સામાન્ય શ્રેણિક છે તથા $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $m \times n$ શ્રેણિક A અને B માટે $(AB)^T = B^T A^T$
- A સામાન્ય શ્રેણિક હોય તો અને તો જ A^T સામાન્ય શ્રેણિક છે. માટે $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\text{adj } A^T = (\text{adj } A)^T$
- વ્યસ્ત શ્રેણિકનો ઉપયોગ કરી સુરેખ સમીકરણ સંહિતનો અનન્ય ઉકેલ.

ધારો કે $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
 $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
 $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ એ x, y, z માં ત્રણ સુરેખ સમીકરણની સંહિત છે.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ અને } D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \text{ લેતાં,}$$

સમીકરણ સંહિતને $AX = D$ પ્રમાણે લખી શકાય.

જો A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

$$X = A^{-1}D = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \text{ તેથી } x = p_1, y = p_2, z = p_3$$

આપેલ સંહિતાનો અનન્ય ઉકેલ છે.

નોંધ : આ પદ્ધતિ બે ચલના બે સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ માટે પણ સત્ય છે.

બહુ વિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ અને $A^2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ તો

(A) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = a^2 - b^2$ (B) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = 2ab$ (C) $\alpha = 2ab, \beta = a^2 + b^2$ (D) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = ab$

ઉકેલ : $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \alpha = a^2 + b^2, \beta = 2ab$$

જવાબ : (B)

(2) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ તો નીચેના પૈકી કયું સત્ય છે ?

(AIEEE : 2004)

(A) A શૂન્ય શ્રેણિક છે

(B) A^{-1} નું અસ્તિત્વ નથી

(C) $A = (-1)I$

(D) $A^2 = I$

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

જવાબ : (D)

(3) ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $10B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, જો B એ A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય તો $\alpha = \dots$

(AIEEE : 2005)

(A) -2

(B) 5

(C) 2

(D) -1

ઉકેલ : અહીં $B = A^{-1}$ આપેલ છે.

$$\therefore AB = I$$

$$10(AB) = 10I$$

$$\therefore A(10B) = 10I$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4+5+1 & 2+0-2 & 2-\alpha+3 \\ 8-5-3 & 4+0+6 & 4+\alpha-9 \\ 4-5+1 & 2+0-2 & 2+\alpha+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ અર્થાત્ } \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5-\alpha \\ 0 & 10 & \alpha-5 \\ 0 & 0 & \alpha+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \alpha + 5 = 10$$

$$\therefore \alpha = 5 \quad (\alpha = 5 \text{ તો } 5 - \alpha = \alpha - 5 = 0)$$

જવાબ : (B)

(4) જો $A^2 - A + I = O$ તો A નો વ્યસ્ત છે.

(A) $A + I$

(B) A

(C) $A - I$

(D) $I - A$

(AIEEE : 2005)

ઉકેલ : $I = A - A^2$

$$IA^{-1} = (A - A \cdot A) A^{-1}$$

$$\therefore A^{-1} = AA^{-1} - (A \cdot A)A^{-1}$$

$$= I - A(AA)^{-1}$$

$$= I - A$$

જવાબ : (D)

(5) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ તો ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી નીચેના પૈકી કયું સત્ય છે ? ($n \geq 1$)

(AIEEE : 2005)

(A) $A^n = nA - (n-1)I$

(B) $A^n = 2^{n-1}A - (n-1)I$

(C) $A^n = nA + (n-1)I$

(D) $A^n = 2^{n-1}A + (n-1)I$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ધારો કે } A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{n-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{હવે } nA - (n-1)I = \begin{bmatrix} n & 0 \\ n & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} = A^n$$

જવાબ : (A)

- (6) જો A અને B એ $n \times n$ એવા ચોરસ શ્રેણિકો હોય, કે જેથી $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, તો નીચેના પૈકી કયું હંમેશાં સત્ય છે ? (AIEEE : 2006)

(A) $A = B$ (B) $AB = BA$ (C) A અથવા B એકમ શ્રેણિક છે. (D) A અથવા B શૂન્ય શ્રેણિક છે.

ઉકેલ : $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$$\therefore A^2 - B^2 = AA + AB - BA - BB$$

$$\therefore A^2 - B^2 = A^2 + AB - BA - B^2$$

$$\therefore O = AB - BA$$

$$BA = AB$$

જવાબ : (B)

- (7) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{N}$ તો

(AIEEE : 2006)

(A) $AB = BA$ થાય, તેવો B મળે નહિ (B) અસિમિત સંખ્યામાં B મળે કે જેથી $AB = BA$

(C) એક B મળે કે જેથી $AB = BA$

(D) એક કરતાં વધુ પરંતુ સિમિત સંખ્યામાં B મળે કે જેથી $AB = BA$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 3a & 4b \end{bmatrix} \text{ અને } BA = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 3b & 4b \end{bmatrix}$$

$\therefore$ જો $a = b$ તો $AB = BA$

હવે $a, b \in \mathbb{N}$ હોવાથી આવા અસિમિત શ્રેણિક B મળે કે જેથી $AB = BA$ થાય.

જવાબ : (B)

- (8) જો $A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 5 \\ 5 & -\alpha \end{bmatrix}$ અને $|A^{10}| = 1024$ હોય તો $\alpha = \dots\dots$

(AIEEE : 2007)

(A) -3

(B) 3

(C) 2

(D) -2

ઉકેલ : $|A^{10}| = 1024$

$$\therefore |A|^{10} = 2^{10}$$

$$\therefore |A| = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 5 \\ 5 & -\alpha \end{bmatrix} \quad \text{આથી } |A| = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 5 \\ 5 & -\alpha \end{vmatrix}$$

$$\therefore -\alpha^3 - 25 = +2$$

$$\therefore -\alpha^3 = 27. \quad \text{આથી } \alpha = -3$$

જવાબ : (A)

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાનો હોય છે. તેમના માટે નીચેના વિકલ્પો હોય છે.

(A) વિધાન I સત્ય છે; વિધાન II એ સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી આપે છે.

(B) વિધાન I સત્ય છે તથા વિધાન II સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી નથી.

(C) વિધાન I સત્ય છે તથા વિધાન II અસત્ય છે.

(D) વિધાન I અસત્ય છે તથા વિધાન II સત્ય છે.

- (9) ધારો કે A એ 2×2 શ્રેણિક છે, I એ 2×2 એકમ શ્રેણિક છે. શ્રેણિકના વિકર્ણના ઘટકોના સરવાળાને $\text{tr}(A)$ વડે દર્શાવીએ તથા $A^2 = I$

વિધાન : I જો $A \neq I$ અને $A \neq -I$ તો $|A| = -1$

વિધાન : II જો $A \neq I$ અને $A \neq -I$ તો $\text{tr}(A) \neq 0$

(AIEEE : 2008)

ઉકેલ : જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

હવે $A^2 = I$

$$\therefore a^2 + bc = 1; \quad b(a + d) = 0$$

$$\therefore bc + d^2 = 1 \quad c(a + d) = 0$$

$$a^2 + bc = bc + d^2 \Rightarrow a = -d \text{ અથવા } a = d$$

જો $a + d \neq 0$ તો $b = c = 0$

$$\therefore a^2 = 1 = d^2. \text{ આથી } a = d = 1 \text{ કારણ કે } a + d \neq 0$$

પરંતુ $A \neq I$. આથી $a + d = 0$

$$\therefore a = -d = 1 \text{ તથા } a^2 = d^2$$

$$\therefore a = 1, d = -1 \text{ અથવા } a = -1, d = 1$$

$$|A| = ad - bc = -a^2 - bc = -1$$

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે.

જવાબ : (C)

(10) ધારો કે A એ 2×2 શ્રેણિક છે.

વિધાન : I $\text{adj}(\text{adj } A) = A$

વિધાન : II $|\text{adj } A| = |A|$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

અહીં $n = 2$ લેતાં $|\text{adj } A| = |A|$

વિધાન II સત્ય છે.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ લેતાં } \text{adj } A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{adj}(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે.

$\therefore$ પરંતુ વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી નથી.

જવાબ : (B)

(11) ધારો કે A એ શૂન્યેતર ઘટકોવાળો 2×2 શ્રેણિક છે. અને $A^2 = I$; I એ 2×2 એકમ શ્રેણિક છે.

ધારો કે $\text{tr}(A) = A$ ના વિકર્ણના ઘટકોનો સરવાળો અને $|A| = \det A$

વિધાન : I $\text{tr}(A) = 0$

વિધાન : II $|A| = -1$

(AIEEE : 2010)

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $a, b, c, d \neq 0$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

પરંતુ $A^2 = I$ હોવાથી.

$$a^2 + bc = 1 \quad b(a + d) = 0$$

$$bc + d^2 = 1 \quad c(a + d) = 0$$

$b \neq 0, c \neq 0$ હોવાથી. $a + d = 0$

$\text{tr}(A) = a + d = 0$. આથી વિધાન II સત્ય છે.

$$a = -d \quad (1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -a^2 - bc$$

$$|A| = -1$$

વિધાન I સત્ય છે.

વિધાન I સત્ય છે અને વિધાન II સત્ય છે અને વિધાન II થી વિધાન I ની સમજૂતિ મળે છે. જવાબ : (A)

(12) ધારો કે A અને B એ 3×3 સંમિત શ્રેણિકો છે.

વિધાન : I A (BA) અને (AB)A સંમિત શ્રેણિકો છે.

વિધાન : II જો A નો B સાથે શ્રેણિકોનો ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરે તો AB સંમિત છે. (AIEEE : 2011)

ઉકેલ : A અને B સંમિત શ્રેણિક હોવાથી, $A^T = A, B^T = B$

$$\begin{aligned} [A (BA)]^T &= (BA)^T \cdot A^T \\ &= (A^T B^T) A^T \\ &= (AB) A = A (BA) \end{aligned}$$

તે જ રીતે $[(AB) A]^T = (AB) A$

$\therefore A (BA)$ અને $(AB) A$ સંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે.

જો $AB = BA$ તો $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ આથી AB સંમિત શ્રેણિક છે.

વિધાન II સત્ય છે.

પરંતુ વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી નથી.

જવાબ : (B)

(13) વિધાન : I 3×3 વિસંમિત શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક શૂન્ય છે.

વિધાન : II કોઈપણ શ્રેણિક A માટે $|A| = |A^T|$ અને $|-A| = -|A|$

ઉકેલ :

વિધાન I સત્ય છે.

$\det A = \det (A^T)$ સત્ય છે.

$\det (-A) = -\det (A)$ એ 3×3 શ્રેણિક માટે સત્ય છે.

પરંતુ કોઈપણ શ્રેણિક માટે સત્ય નથી.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & -A &= \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \\ \det A &= ad - bc & \det (-A) &= \begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\det (-A) = ad - bc \neq -\det A$$

વિધાન II અસત્ય છે.

જવાબ : (C)

(14) 3×3 વાસ્તવિક ચોરસ શ્રેણિકના ગણ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R નીચે મુજબ લો;

$R : \{(A, B) \mid A = P^{-1}BP \text{ જ્યાં } P \text{ કોઈક સામાન્ય શ્રેણિક છે.}\}$

વિધાન : I R સામ્ય સંબંધ છે.

વિધાન : II કોઈ પણ બે 3×3 શ્રેણિકો M, N માટે જેનાં વ્યસ્ત વિધેયો મળે, $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

ઉકેલ : (1) $A = P^{-1}BP$ સ્વવાચક છે કારણ કે $A = I A = A^{-1}A A$

(2) જો $A = P^{-1}BP$ તો $B = PAP^{-1}$

$$B = (P^{-1})^{-1}A(P^{-1}) \quad (\text{સંમિતતા})$$

(3) $A = P^{-1}BP, B = A^{-1}CA$

$$A = (P^{-1}BP) = P^{-1}(A^{-1}CA)P = (AP)^{-1}C(AP) \quad (\text{પરંપરિતતા})$$

વિધાન I સત્ય છે. વિધાન II સત્ય જ છે.

પરંતુ વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી નથી.

જવાબ : (B)

(15) જો $P = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ એ 3×3 શ્રેણિક A નો સહઅવયવ શ્રેણિક હોય અને $|A| = 4$ તો $\alpha = \dots$

(A) 0

(B) 5

(C) 4

(JEE Main : 2013)

(D) 11

ઉકેલ : $P = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ આથી $|P| = -\alpha(4-6) + 3(4-6) = \alpha \times -6$

$\text{adj } A = P$

$\therefore |\text{adj } A| = |P|$

$\therefore |A|^2 = 2\alpha - 6$

$\therefore 16 = 2\alpha - 6$ આથી $\alpha = 11$

જવાબ : (D)

(16) જો $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ તો $A^{-1} = \dots$

$$(A) \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : $|A| = \begin{vmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \neq 0$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

જવાબ : (B)

(17) જો $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{3}$ તો $A = [a_{ij}]_{2 \times 2} = \dots$

$$(A) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : $a_{11} = \frac{(1-2)^2}{3} = \frac{1}{3}, \quad a_{21} = \frac{(2-2)^2}{3} = 0$

$a_{12} = \frac{(1-4)^2}{3} = 3, \quad a_{22} = \frac{(2-4)^2}{3} = \frac{4}{3}$

આથી $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

જવાબ : (A)

(18) સમીકરણો $x - 2y - 4 = 0$ અને $3x - 5y + 7 = 0$ નો ઉકેલ $x = \dots\dots$ અને $y = \dots\dots$

(A) 34, 19

(B) -34, 19

(C) 34, -19

(D) -34, -19

ઉકેલ : $x - 2y = 4$ અને $3x - 5y = -7$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ એટલે કે $AX = D$

$|A| = -5 + 6 = 1 \neq 0$ આથી A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે. તેથી સંહિતાનો અનન્ય ઉકેલ મળે.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A, \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore X = A^{-1}D = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 \\ -19 \end{bmatrix}$

$\therefore x = -34, y = -19$

જવાબ : (D)

(19) x ની કયા મૂલ્ય માટે $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{bmatrix}$ એકમ શ્રેણિક થાય ?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} -2x+0+7x & 28x+0-28x & 14x+0-14x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x+0+x & 14x-2-4x & 7x+0-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 5x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10x-2 & 5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore 5x = 1$ તથા $10x - 2 = 0$

$\therefore x = \frac{1}{5}$

જવાબ : (A)

(20) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ અને $A^{-1} = mA + nI$ ને $m = \dots\dots$ અને $n = \dots\dots$

(A) $\frac{-1}{11}, \frac{2}{11}$

(B) $\frac{2}{11}, \frac{-1}{11}$

(C) $\frac{2}{11}, \frac{-1}{11}$

(D) $\frac{2}{11}, \frac{1}{11}$

ઉકેલ : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 10 = 11 \neq 0$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n & 2m \\ -5m & m+n \end{bmatrix}$$

$$\therefore m+n = \frac{1}{11}, \quad 2m = \frac{-2}{11}, \quad -5m = \frac{5}{11}$$

$$m = -\frac{1}{11} \quad n = \frac{2}{11}$$

જવાબ : (A)

(21) જો w એ 1 ની અવાસ્તવિક ઘનમૂળ હોય અને $A = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}$ ને $A^{37} = \dots\dots$

(A) 0

(B) $-A$

(C) A

(D) A^2

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \Rightarrow A^{37} = \begin{bmatrix} w^{37} & 0 \\ 0 & w^{37} \end{bmatrix}$

હવે $w^{37} = (w^3)^{12} \cdot w = (1)^{12} w = w$

$$\therefore A^{37} = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} = A$$

જવાબ : (C)

(22) જો $A = \begin{bmatrix} 5 & 5\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 3\alpha \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ તથા $|A^2| = 25$ હોય, ને $|\alpha| = \dots\dots$

(AIEEE 2007)

(A) 5^2

(B) 1

(C) $\frac{1}{5}$

(D) 5

ઉકેલ : $|A^2| = 25$

$$\therefore |A|^2 = 25, \quad \text{અર્થાત્ } |A| = \pm 5$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 5 & 5\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 3\alpha \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \pm 5$$

$$\therefore 25\alpha = \pm 5$$

$$\therefore \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

$$\text{અર્થાત્ } |\alpha| = \frac{1}{5}$$

જવાબ : (C)

(23) જો $\begin{bmatrix} 1 & -\cot\theta \\ \cot\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta \\ -\cot\theta & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ તો $a = \dots\dots$ અને $b = \dots\dots$; $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(A) 1, 1 (B) $-\cos 2\theta, \sin 2\theta$ (C) $-\cos 2\theta, -\sin 2\theta$ (D) $\cos 2\theta, -\sin 2\theta$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta \\ -\cot\theta & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

$$A^{-1} = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta} \begin{bmatrix} 1 & -\cot\theta \\ \cot\theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\cot\theta \\ \cot\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta \\ -\cot\theta & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta} \begin{bmatrix} 1 & -\cot\theta \\ \cot\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\cot\theta \\ \cot\theta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta} \begin{bmatrix} 1 - \cot^2\theta & -2\cot\theta \\ 2\cot\theta & 1 - \cot^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \sin^2\theta - \cos^2\theta & -2\sin\theta \cos\theta \\ 2\cos\theta \sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore a = -\cos 2\theta, b = \sin 2\theta$$

જવાબ : (B)

(24) જો 3×3 શ્રેણિક A માટે $|A| = 3$ તો $|\operatorname{adj} A| = \dots\dots$

(A) 27 (B) 9 (C) -3 (D) 3

ઉકેલ : $|A \operatorname{adj} A| = |A|^n$

અહીં A એ 3×3 શ્રેણિક છે. $n = 3$ હોવાથી $|A \operatorname{adj} A| = |A|^3$

$$|A| |\operatorname{adj} A| = 3^3$$

$$|\operatorname{adj} A| = 3^2 = 9$$

અથવા $|\operatorname{adj} A| = |A|^2 = 9$ (3×3 શ્રેણિક માટે)

જવાબ : (B)

(25) $P = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ તો $P^{-1} = \dots\dots$

(A) P^T (B) P (C) $-P^T$ (D) $-P$

ઉકેલ : $|P| = \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \text{ તથા } P^T = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{-1} = P^T$$

જવાબ : (A)

(26) જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix}$ એ $AA^T = 9I$ નું સમાધાન કરે છે, તો કમયુક્ત $(a, b) = \dots\dots$

(JEE Main : 2015)

(A) (2, -1)

(B) (-2, 1)

(C) (2, 1)

(D) (-2, -1)

ઉકેલ : $AA^T = 9I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 9 & 0 & a+4+2b \\ 0 & 9 & 2a+2-2b \\ a+4+2b & 2a+2-2b & a^2+4+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a + 4 + 2b = 0 \Rightarrow a + 2b = -4 \quad (1)$$

$$2a + 2 - 2b = 0 \Rightarrow 2a - 2b = -2 \quad (2)$$

આથી $3a = -6$. ($a^2 + 4 + b^2 = 9$ છે જ.) આથી $a = -2$ અને $b = -1$

$(a, b) = (-2, -1)$

જવાબ : (D)

(27) 3×3 શ્રેણિકો M અને N માટે નીચેનામાંથી કયાં વિધાન સત્ય નથી ?

(JEE adva : 2013)

(A) M અને N એ સંમિત અથવા વિસંમિત શ્રેણિકો હોય, તો અનુક્રમે $N^T M N$ એ સંમિત અથવા વિસંમિત શ્રેણિક છે.

(B) $MN - NM$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે, જ્યાં M અને N સંમિત શ્રેણિક છે.

(C) જો M અને N એ સંમિત શ્રેણિકો હોય, તો MN એ સંમિત શ્રેણિક છે.

(D) $(adj M)(adj N) = adj(MN)$ જ્યાં M અને N સામાન્ય શ્રેણિકો છે.

ઉકેલ : (A) જો M સંમિત શ્રેણિક હોય, તો $M^T = M$

$$(N^T M N)^T = N^T M^T (N^T)^T = N^T M N$$

$\therefore N^T M N$ સંમિત શ્રેણિક છે.

જો M વિસંમિત શ્રેણિક હોય તો $M = -M^T$

$$(N^T M N)^T = N^T M^T (N^T)^T$$

$$= N^T (-M) N$$

$$= -N^T M N$$

$$(M^T = -M)$$

$\therefore N^T M N$ વિસંમિત શ્રેણિક છે. આથી વિધાન (A) સત્ય છે.

(B) અહીં M અને N સંમિત શ્રેણિક છે. આથી $M = M^T$ અને $N = N^T$

$$(MN - NM)^T = N^T M^T - M^T N^T = NM - MN = -(MN - NM)$$

$\therefore MN - NM$ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore$ વિધાન B સત્ય છે.

(C) M અને N સંમિત શ્રેણિક છે.

$(MN)^T = N^T M^T = NM \neq MN$ અર્થાત્ (C) અસત્ય છે.

(D) $(adj M)(adj N) = adj(NM) \neq adj(MN)$ થાય.

જેથી (D) અસત્ય છે.

જવાબ : (C), (D)

$$(28) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ તથા સ્તંભ શ્રેણીકો } u_1 \text{ અને } u_2 \text{ માટે } Au_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ અને } Au_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ તો } u_1 + u_2 = \dots$$

$$(A) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ઉકેલ : } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, Au_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (u_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ લેતાં,})$$

$$Au_1 = \begin{bmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a+2b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a = 1, 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2 \text{ તથા } 3a + 2b + c = 0 \Rightarrow c = 1 \quad \text{અર્થાત્ } u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{તે જ રીતે } Au_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (u_2 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \text{ લેતાં,})$$

$$\begin{bmatrix} p \\ 2p+q \\ 3p+2q+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore p = 0, 2p + q = 1, 3p + 2q + r = 0. \quad \text{અર્થાત્ } p = 0, q = 1, r = -2$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{અર્થાત્ } u_1 + u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

જવાબ : (A)

$$(29) \quad \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ થાય તેવો } 2 \times 2 \text{ શ્રેણિક } X = \dots$$

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : ધારો કે $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5a-7c & 5b-7d \\ -2a+3c & -2b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5a - 7c = -16$$

$$5b - 7d = -6$$

$$-2a + 3c = 7$$

$$-2b + 3d = 2$$

ઉકેલતાં $a = 1, c = 3$ તથા $b = -4$ અને $d = -2$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

જવાબ : (A)

→ બીજી રીત : $X = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(30) જો $[1 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$ તો $x = \dots\dots$

(A) 2, 14

(B) -2, 14

(C) -2, -14

(D) 2, 14

ઉકેલ : $[1 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$

$$\therefore [1 + 2x + 15 \quad 3 + 5x + 3 \quad 2 + x + 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore [16 + 2x \quad 6 + 5x \quad 4 + x] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore [16 + 2x + 12 + 10x + 4x + x^2] = 0$$

$$\therefore x^2 + 16x + 28 = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ અથવા } x = -14$$

જવાબ : (C)

(31) ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ અને U_1, U_2, U_3 એ એવા સ્તંભ શ્રેણિકો છે કે જેથી $AU_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; AU_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix};$

$AU_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ જો U એ 3×3 શ્રેણિક હોય કે જેના સ્તંભ અનુક્રમે U_1, U_2, U_3 છે તો $|U| = \dots\dots$

(A) 2

(B) $\frac{3}{2}$

(C) -3

(D) 3

$$\text{ઉકેલ : ધારો કે } U_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{આથી } AU_1 = \begin{bmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a+2b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a=1, 2a+b=0, 3a+2b+c=0$$

$$\therefore a=1, b=-2, c=1$$

$$\therefore U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ધારો કે } U_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{આથી } AU_2 = \begin{bmatrix} x \\ 2x+y \\ 3x+2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x=2, 2x+y=3, 3x+2y+z=0$$

$$\therefore x=2, y=-1, z=-4$$

$$\therefore U_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ધારો કે } U_3 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad AU_3 = \begin{bmatrix} p \\ 2p+q \\ 3p+2q+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore p=2, 2p+q=3, 3p+2q+r=1$$

$$\therefore p=2, q=-1, r=-3$$

$$\therefore U_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore U = [U_1 \ U_2 \ U_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |U| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1[3-4] - 2[6+1] + 2[8+1] = -1 - 14 + 18 = 3$$

જવાબ : (D)

$$\text{બીજી રીત : } AU = B \text{ જ્યાં } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore U = A^{-1}B. \quad \text{આથી } |U| = |A^{-1}| |B| = 1.3 = 3$$

$$(32) \quad \text{જો શ્રેણી } A_r = \begin{bmatrix} r & r-1 \\ r-1 & r \end{bmatrix}, r = 1, 2, 3, \dots \text{ તો } |A_1| + |A_2| + \dots + |A_{101}| = \dots$$

(A) 101

(B) $(101)^2$

(C) 100

(D) $(100)^2$

$$\text{ઉદા : } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_1| = 1, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_2| = 3, A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_3| = 5 \dots$$

$$|A_1| + |A_2| + \dots + |A_{101}| = 1 + 3 + 5 + \dots + 201 = (101)^2$$

જવાબ : (B)

$$(33) \quad \text{જો } A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ તો } A^3 = \dots$$

(A) 27 A

(B) 81 A

(C) 243 A

(D) 729 A

$$\text{ઉદા : } A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 27 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 27 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 81 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 81 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 81 A$$

જવાબ : (B)

$$(34) \quad \text{જો } A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \text{ તો } A^{10} = \dots$$

(A) 512 I

(B) 256 I

(C) 1024 I

(D) 128 A

$$\text{ઉદા : } A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2I$$

$$A^2 = (2I)(2I) = 4I^2 = 4I$$

$$A^3 = (2I)(2I)(2I) = 8I^3 = 8I$$

$$A^{10} = 2^{10} I = 1024 I$$

જવાબ : (C)

(35) જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ તો $B^{-1}AB = \dots$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

તથા $|B| = 4 + 1 = 5$

અથવા $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj } B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

હવે $B^{-1}AB = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$
 $= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

જવાબ : (A)

(36) જો $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $A^2 - mA + nI = 0$ તો,

(A) $m = -9, n = -14$

(B) $m = -9, n = 14$

(C) $m = 9, n = 14$

(D) $m = 9, n = -14$

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix}$

$A^2 - mA + nI = 0$. અથવા $A^2 = mA - nI$

$\therefore \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 4m - n & 3m \\ 2m & 5m - n \end{bmatrix}$

$\therefore 4m - n = 22$ અને $3m = 27$ પરથી $m = 9, n = 14$, તે $2m = 18, 5m - n = 31$ નું સમાધાન પણ કરે છે.

જવાબ : (C)

નોંધ : યદ્યપિ તો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ તો $A^2 - (a + d)A + |A|I = 0$

$\therefore m = a + d = 9 \quad n = |A| = 14$

(37) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ તો $A^n = \dots$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & m^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & mn \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} n & n \\ 0 & n \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} n & mn \\ 0 & n \end{bmatrix}$

$$\text{ઉકેલ : } A^2 = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{તે જ રીતે } A^n = \begin{bmatrix} 1 & mn \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

જવાબ : (B)

$$(38) \quad \text{જો } A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ તો } (B^{-1}A^{-1})^{-1} = \dots\dots$$

$$(A) \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(D) \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ઉકેલ : } (B^{-1}A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} (B^{-1})^{-1} = AB = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

જવાબ : (C)

$$(39) \quad A = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \text{ તો } AA^T = \dots\dots$$

(A) I

(B) A

(C) A^T

(D) એક પણ નહિ

$$\text{ઉકેલ : } AA^T = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

($AA^T = I$ અથવા $A^T = A^{-1}$ તો A ને લંબશ્રેણિક કહે છે.)

જવાબ : (A)

$$(40) \quad \text{સુરેખ સમીકરણ સંહિતિ } x + 3y + 4z = 8, \quad 2x + y + 2z = 5, \quad 5x + y + z = 7, \text{ નો અનન્ય ઉકેલ } \dots\dots$$

$$(A) x = 1, y = 1, z = 1 \quad (B) x = 1, y = 2, z = 1 \quad (C) x = -1, y = 1, z = 1 \quad (D) x = 1, y = 1, z = -1$$

$$\text{ઉકેલ : } x + 3y + 4z = 8$$

$$2x + y + 2z = 5$$

$$5x + y + z = 7$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = D$$

$$\text{જ્યાં } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-2) - 3(2-10) + 4(2-5) = -1 + 24 - 12 = 11 \neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

$$A_{11} = -1, A_{12} = 8, A_{13} = -3, A_{21} = 1, A_{22} = -19, A_{23} = 14, A_{31} = 2, A_{32} = 6, A_{33} = -5$$

$$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & -19 & 6 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{11} \text{adj } A$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & -19 & 6 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -8 & +5 & +14 \\ 64 & -95 & +42 \\ -24 & +70 & -35 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = 1, y = 1, z = 1$$

જવાબ : (A)

નોંધ : દેખીતું જ (1, 1, 1) ઉકેલ છે. તે પ્રત્યક્ષ ચકાસણીથી મળે.

$$(41) \quad \text{જો } A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \text{ તથા } A + A' = I \text{ હોય, તો } \alpha = \dots\dots 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$(A) \frac{\pi}{3}$$

$$(B) \frac{\pi}{6}$$

$$(C) \frac{\pi}{2}$$

$$(D) 0$$

$$\text{ઉકેલ : } A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\text{હવે } A + A' = I$$

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{આથી } \begin{bmatrix} 2\sin \alpha & 0 \\ 0 & 2\sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2 \sin \alpha = 1$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{1}{2}. \quad \text{આથી } \alpha = \frac{\pi}{6} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

જવાબ : (B)

$$(42) \quad \text{જો ચોરસ શ્રેણિક } A \text{ અને } B \text{ માટે } AB = A \text{ અને } BA = B \text{ તો } B^2 = \dots\dots$$

$$(A) B$$

$$(B) 0$$

$$(C) I$$

$$(D) A$$

$$\text{ઉકેલ : } B^2 = B \cdot B$$

$$= (BA) B$$

$$= B (AB)$$

$$= BA$$

$$\therefore B^2 = B$$

$$(B = BA)$$

$$(\text{જૂથનો નિયમ})$$

$$(AB = A)$$

$$(BA = B)$$

જવાબ : (A)

$$(43) \quad 2X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ તલ } X = \dots\dots$$

$$(A) \ 2 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (B) \ 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ઉઝા} : \quad 2X = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

જવાબ : (D)

$$(44) \quad \text{જલ } A = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta \\ -\cot\theta & 1 \end{bmatrix} \text{ ંલે } (A^{-1})^2 = f(\theta) \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \text{ તલ } f(\theta) = \dots\dots$$

$$(A) \sin^2 \theta \quad (B) \cos^2 \theta \quad (C) \cos \theta \quad (D) \sin \theta$$

$$\text{ઉઝા} : \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & \cot\theta \\ -\cot\theta & 1 \end{vmatrix} = 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \theta} \begin{bmatrix} 1 & -\cot\theta \\ \cot\theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \sin^4 \theta \begin{bmatrix} 1 & -\cot\theta \\ \cot\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\cot\theta \\ \cot\theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sin^4 \theta \begin{bmatrix} 1 - \cot^2 \theta & -2\cot\theta \\ 2\cot\theta & -\cot^2 \theta + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sin^2 \theta \begin{bmatrix} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta & -2\sin\theta \cos\theta \\ 2\sin\theta \cos\theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$= \sin^2 \theta \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore f(\theta) = \sin^2 \theta$$

જવાબ : (A)

$$(45) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ંલે } A^2 - 5A = kI \text{ તલ } k = \dots\dots$$

$$(A) \ 8 \quad (B) \ 7 \quad (C) \ 5 \quad (D) \ 6$$

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$

$$A^2 - 5A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ -15 & -20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 5I$$

$$\therefore k = 5$$

જવાબ : (C)

નોંધ : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ માટે $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = 0$, અર્થાત્ $A^2 - 5A - 5I = 0$

(46) જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ અને $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ તો $AB + XY = \dots\dots$

(A) [20]

(B) [-20]

(C) 20

(D) -20

ઉકેલ : $AB + XY = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$= [6 - 6 + 4] + [0 + 4 + 12] = [4] + [16] = [20]$$

જવાબ : (A)

(47) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \dots\dots$ જેથી $AB = BA$. જ્યાં $B \neq I$

(A) $\begin{bmatrix} x & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & y \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} x & x \\ 1 & x \end{bmatrix}$

ઉકેલ : ધારો કે $B = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix}$

અર્થાત્ $AB = BA$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+p & y+q \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+y \\ p & p+q \end{bmatrix}$$

$$x+p = x \quad y+q = x+y \quad q = p+q$$

$$\therefore p = 0 \quad q = x$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

જવાબ : (B)

(48) જો $A = \text{diag} [3 \ 2 \ 1]$, તો A^{-1} ના ઘટકોનો સરવાળો છે.

- (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{11}{6}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 6

ઉકેલ : $A = \text{diag} [3 \ 2 \ 1]$

$$A^{-1} = \text{diag} \left[\frac{1}{3} \ \frac{1}{2} \ 1 \right]$$

$\therefore A^{-1}$ ના ઘટકોનો સરવાળો $= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3+2+6}{6} = \frac{11}{6}$ જવાબ : (B)

(49) જો સમીકરણ $\lambda x + 2y - 2z = 1$, $4x + 2\lambda y - z = 2$ અને $6x + 6y + \lambda z = 3$, નો અનન્ય ઉકેલ મળે તો,

- (A) $\lambda \neq -2$ (B) $\lambda \neq 3$ (C) $\lambda \neq 2$ (D) $\lambda \neq 1$

ઉકેલ : $\lambda x + 2y - 2z = 1$

$$4x + 2\lambda y - z = 2$$

$$6x + 6y + \lambda z = 3$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 4 & 2\lambda & -1 \\ 6 & 6 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 4 & 2\lambda & -1 \\ 6 & 6 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{હોય, તો } A^{-1} \text{ મળે તથા અનન્ય ઉકેલ મળે.}$$

$$\square \lambda (2\lambda^2 + 6) - 2 (4\lambda + 6) - 2 (24 - 12\lambda) \neq 0$$

$$\therefore \square 2\lambda^3 + 22\lambda - 60 \neq 0$$

$$\therefore \square \lambda^3 + 11\lambda - 30 \neq 0$$

$$\therefore \square (\lambda - 2) (\lambda^2 + 2\lambda + 15) \neq 0$$

વાસ્તવિક બીજ માટે $\lambda \neq 2$

જવાબ : (C)

(50) જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix}$ એ સ્વયંધાતી શ્રેણિક હોય, તો $x = \dots\dots$

- (A) -1 (B) -5 (C) -4 (D) -3

$$\text{ઉકેલ : } A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -16-4x \\ -1 & 3 & 16+4x \\ 4+x & -8-2x & -12+x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix} = A$$

$$4 + x = 1 \quad 16 + 4x = 4, \quad -12 + x^2 = x$$

$\therefore x = -3$ માટે તમામ સમીકરણો સત્ય છે.

જવાબ : (D)

$$(51) \quad \text{જો } A = \begin{bmatrix} 3a & b & c \\ b & 3c & a \\ c & a & 3b \end{bmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R}, abc = 1, AA^T = 64 I \text{ અને } |A| > 0 \text{ તો } (a^3 + b^3 + c^3)^3 = \dots$$

(A) 343

(B) 729

(C) 256

(D) 512

ઉકેલ : અહીં $A^T = A$ થાય.

$$A^2 = 64 I$$

$$|A|^2 = 64 \Rightarrow |A| = 8$$

($|A| < 0$)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3a & b & c \\ b & 3c & a \\ c & a & 3b \end{vmatrix}$$

$$= 3a [9bc - a^2] - b [3b^2 - ca] + c [ab - 3c^2]$$

$$\therefore |A| = 8 \Rightarrow 29abc - 3(a^3 + b^3 + c^3) = 8$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 7$$

($abc = 1$ મૂકતાં,)

$$\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^3 = 343$$

જવાબ : (A)

$$(52) \quad \text{જો } A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ તો } adj A = \dots$$

(A) A

(B) A^T

(C) 3A

(D) $3A^T$

$$\text{ઉકેલ : } adj A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 3A^T$$

જવાબ : (D)

(53) જો a, b, c શૂન્યેતર ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો x, y, z ની સમીકરણ સંહિતિ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ ને } \dots$$

(A) અનન્ય ઉકેલ છે.

(B) ઉકેલ નથી.

(C) એકથી વધુ સાન્ત ઉકેલો છે.

(D) અનંત ઉકેલો છે.

$$\text{ઉકેલ : } \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & -\frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} & -\frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & -\frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} & -\frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad C_1 (a^2), C_2 (b^2), C_3 (c^2)$$

$$= -\frac{4}{a^2 b^2 c^2} \neq 0$$

∴ સમીકરણનો અનન્ય ઉકેલ મળે.

જવાબ : (A)

(54) 3×3 શ્રેણિક A એ સમીકરણ $A^2 - 5A + 7I = 0$ નું સમાધાન કરે છે. જો $A^5 = aA + bI$ તો $2a - 3b$ નું મૂલ્ય છે.

(A) 3135

(B) 1453

(C) 1435

(D) 4135

ઉકેલ : $A^3 = A \cdot A^2 = A[5A - 7I] = 5A^2 - 7A = 5[5A - 7I] - 7A = 18A - 35I$ ($A^2 = 5A - 7I$)

$$A^4 = A \cdot A^3 = A[18A - 35I] = 18A^2 - 35A$$

$$A^4 = 18[5A - 7I] - 35A = 55A - 126I$$

$$A^5 = A \cdot A^4 = A[55A - 126I] = 55A^2 - 126A = 55[5A - 7I] - 126A$$

$$\therefore A^5 = 149A - 385I = aA + bI$$

$$\therefore a = 149, b = -385$$

$$2a - 3b = 2(149) - 3(-385) = 298 + 1155 = 1453$$

જવાબ : (B)

(55) જો $[x]$ એ x નું મહત્તમ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય દર્શાવે તો નીચેના શ્રેણિકના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય છે.

$$\begin{bmatrix} [e] & [\pi] & [\pi^2 - 6] \\ [\pi] & [\pi^2 - 6] & [e] \\ [\pi^2 - 6] & [e] & [\pi] \end{bmatrix}$$

(A) 8

(B) 0

(C) 1

(D) -8

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$2 < e < 3 \Rightarrow [e] = 2$$

$$3 < \pi < 4 \Rightarrow [\pi] = 3$$

$$3 < \pi^2 - 6 < 4 \Rightarrow [\pi^2 - 6] = 3$$

$$\therefore \text{માંગેલ નિશ્ચાયક} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

જવાબ : (D)

(56) શ્રેણિકોના ગુણાકારને સાપેક્ષ સમૂહ $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}, x \in R, x \neq 0 \right\}$ નો એકમ ઘટક છે.

$$(A) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : ધારો કે $\begin{bmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{bmatrix}$ એકમ ઘટક છે.

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \quad \forall x \quad \text{અર્થાત્} \quad \begin{bmatrix} 3kx & 3kx & 3kx \\ 3kx & 3kx & 3kx \\ 3kx & 3kx & 3kx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

$$\therefore 3kx = x$$

$$\therefore k = \frac{1}{3} \quad (x \neq 0)$$

$$\therefore \text{એકમ ઘટક} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ છે.} \quad \text{જવાબ : (A)}$$

$$(57) \quad \text{જો } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ નો લંબ શ્રેણિક થાય.}$$

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ઉકેલ : } I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{|I - A|} \text{adj} (I - A) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\oslash (A) = (I + A) (I - A)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

જવાબ : (B)

$$(58) \quad \text{જો સમીકરણો } x + 3y + z = 0, 2x - y - z = 0, kx + 2y + 3z = 0 \text{ નો શૂન્યેતર ઉકેલ મળે તો } k = \dots$$

$$(x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0)$$

$$(A) \frac{13}{2}$$

$$(B) \frac{9}{2}$$

$$(C) -\frac{15}{2}$$

$$(D) -\frac{13}{2}$$

$$\text{ઉકેલ : } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = D \quad \text{જ્યાં } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{શૂન્યેતર ઉકેલ માટે } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$1 [-3 + 2] - 3 [6 + k] + 1 [4 + k] = 0$$

$$-1 - 18 - 3k + 4 + k = 0$$

$$-15 - 2k = 0$$

$$\therefore k = -\frac{15}{2}$$

જવાબ : (C)

(59) જો સમીકરણો $y + z = -ax$, $z + x = -by$, $x + y = -cz$ નો શૂન્યેતર ઉકેલ શક્ય હોય, તો

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = \dots\dots (x + y + z \neq 0)$$

(A) 1

(B) 2

(C) -1

(D) -2

ઉકેલ : $y + z = -ax$, $z + x = -by$, $x + y = -cz$

$$\therefore -a = \frac{y+z}{x} \quad -b = \frac{z+x}{y} \quad -c = \frac{x+y}{z}$$

$$1 - a = 1 + \frac{y+z}{x}; \quad 1 - b = \frac{z+x}{y} + 1; \quad 1 - c = \frac{x+y}{z} + 1$$

$$1 - a = \frac{x+y+z}{x}; \quad 1 - b = \frac{x+y+z}{y}; \quad 1 - c = \frac{x+y+z}{z}$$

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1$$

જવાબ : (A)

(60) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ તો $A^{100} = \dots\dots$

(A) $2^{99} A$

(B) $2^{101} A$

(C) $2^{100} A$

(D) I

$$\text{ઉકેલ : } A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{તે જ રીતે } A^{100} = 2^{99} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2^{99} A$$

જવાબ : (A)

(61) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$ તો $A^T A^{-1} = \dots\dots$

$$(A) \begin{bmatrix} -\cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ \cos 2x & \sin 2x \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} \tan x & 1 \\ -1 & \tan x \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : $|A| = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \cos^2 x \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^T A^{-1} &= \cos^2 x \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix} = \cos^2 x \begin{bmatrix} 1-\tan^2 x & -2\tan x \\ 2\tan x & 1-\tan^2 x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & -2\sin x \cos x \\ 2\sin x \cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} \quad \text{જવાબ : (B)} \end{aligned}$$

$$(62) \quad \text{જો } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} \text{ તો } I + 2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots \infty = \dots$$

$$(A) \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -18 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -5 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\text{ઉકેલ : } A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-9 & 3-3 \\ -27+27 & -9+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots$$

$$\therefore I + 2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -18 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -18 & -5 \end{bmatrix}$$

$$I + 2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots \infty = I + 2A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -18 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{જવાબ : (C)}$$

$$(63) \quad \text{જો સંમિત શ્રેણિક } X \text{ તથા વિસંમિત શ્રેણિક } Y \text{ માટે } X + Y = A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \text{ તો } X = \dots$$

$$(A) \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 6 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & \frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 13 \\ 10 & 13 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & \frac{13}{2} \\ 5 & \frac{13}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{ઉકેલ : } A = X + Y \Rightarrow A^T = X^T + Y^T = X - Y$$

$$\therefore X = \frac{1}{2} [A + A^T]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & \frac{13}{2} \\ 5 & \frac{13}{2} & 8 \end{bmatrix} \quad \text{જવાબ : (D)}$$

$$(64) \quad \text{જો } A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ અને } B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \text{ તો } (AB)^{-1} = \dots$$

$$(A) \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{47}{2} \\ \frac{87}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} \frac{61}{2} & -\frac{47}{2} \\ -\frac{87}{2} & \frac{67}{2} \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{47}{2} \\ \frac{87}{2} & \frac{67}{2} \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} \frac{61}{2} & -\frac{47}{2} \\ \frac{87}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{ઉકેલ : } |A| = 54 - 56 = -2 \neq 0. \quad \text{એટલે } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A \quad \text{અથવા } A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 61 & -47 \\ -87 & 67 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{47}{2} \\ \frac{87}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$$

જવાબ : (A)

$$(65) \quad \text{જો } [x - 5 - 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0], \text{ તો } x = \dots$$

$$(A) \pm 2\sqrt{3}$$

$$(B) \pm \sqrt{3}$$

$$(C) \pm 4\sqrt{3}$$

$$(D) \sqrt{3}$$

$$\text{ઉકેલ : } [x - 5 - 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

$$[(x - 2) - 10 - (2x - 5 - 3)] \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

$$\therefore [x - 2 - 10 - 2x + 8] \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

$$x^2 - 2x - 40 + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 = 48. \quad \text{અથવા } x \pm \sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$

જવાબ : (C)

(66) જો $A^2 - 3A = I$ તો $A^{-1} = \dots\dots$

(A) $I - 3A$

(B) $3A - I$

(C) $A - 3I$

(D) $3I - A$

ઉકેલ : $A^2 - 3A = I$

$$A^{-1} (A^2 - 3A) = A^{-1} I$$

$$(A^{-1} A) A - 3(A^{-1} A) = A^{-1} I$$

$$IA - 3I = A^{-1}$$

$$\therefore A^{-1} = A - 3I$$

જવાબ : (C)

(67) જો $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2x-3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ અને $AB = I$ તો $x = \dots\dots$

(A) 2

(B) -1

(C) 1

(D) 0

ઉકેલ : $|AB| = |I|$

$$|A| |B| = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} [2x - 3] (-2) = 1 \quad \text{અર્થાત્ } 2x - 3 = -1$$

$$\therefore x = 1$$

જવાબ : (C)

(68) જો $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ અને $A^2 = B$ તો $a = \dots\dots$

(A) -1

(B) 1

(C) 4

(D) a ન મળે

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+1 & 1 \end{bmatrix}$. $A^2 = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore a^2 = 1, \quad a + 1 = 5$$

$$a = 4 \quad \text{અ સમીકરણો સુસંગત નથી.}$$

જવાબ : (D)

(69) વિસંમિત શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો લંબ શ્રેણિક $\dots\dots$ થાય.

(A) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(B) I

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{|I - A|} \text{adj} (I - A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{લંબ શ્રેણિક} = (I + A) (I - A)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

જવાબ : (A)

(70) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$ નો લંબ શ્રેણિક થાય.

(A) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

ઉકેલ : I એ 2×2 એકમ શ્રેણિક છે.

$$I + A = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{તથા} \quad I - A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{લંબ શ્રેણિક } (I + A) (I - A)^{-1} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} & -2\tan\frac{\theta}{2} \\ 2\tan\frac{\theta}{2} & -\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} & -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

જવાબ : (B)

(71) જો A એ 3×3 સામાન્ય શ્રેણિક હોય અને $AA^T = A^T A$ અને $B = A^{-1}A^T$ તો $BB^T = \dots\dots$

(A) $I + B$ (B) I (C) B^{-1} (D) $(B^{-1})^T$

ઉકેલ : $BB^T = (A^{-1}A^T) (A^{-1}A^T)^T = (A^{-1}A^T) (A (A^{-1})^T) = [A^{-1}(A^T A)] (A^{-1})^T$

$$BB^T = [(A^{-1}(AA^T))] (A^{-1})^T = [(A^{-1}A) (A^T) (A^{-1})^T] = A^T(A^T)^{-1} = I$$

જવાબ : (B)

(72) જો $[1 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} = [0]$ તો $x = \dots\dots$

(A) $\frac{-9 \pm \sqrt{35}}{2}$

(B) $\frac{-7 \pm \sqrt{53}}{2}$

(C) $\frac{-9 \pm \sqrt{53}}{2}$

(D) $\frac{-7 \pm \sqrt{35}}{2}$

ઉકેલ : $[1 \ 3 + 5x + 3 \ 2 + x + 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} = [0]$

$$\therefore [1 \quad 6 + 5x \quad 4 + x] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} = [0]$$

$$\therefore 1 + 6 + 5x + 4x + x^2 = 0$$

$$\therefore x^2 + 9x + 7 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4(7)}}{2(1)} = \frac{-9 \pm \sqrt{53}}{2}$$

જવાબ : (C)

(73) સંવૃત્ત અંતરાલ $[-4, -1]$ માં x ની કેટલી ક્રિમતો માટે શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 3 & -1+x & 2 \\ 3 & -1 & x+2 \\ x+3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ અસામાન્ય શ્રેણિક છે ?

(A) -4

(B) 3

(C) 0

(D) 2

ઉકેલ : શ્રેણિક અસામાન્ય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & x-1 & 2 \\ 3 & -1 & x+2 \\ x+3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ -x & 0 & x \\ x+3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$R_{21} (-1), R_{32} (-1)$

$$\therefore x^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x+3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore x^2 \{-1(-2-x-3) - 1(1)\} = 0$$

$$\therefore x^2 (x+4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad \text{અથવા} \quad x = -4$$

$$\therefore 0 \notin [-4, -1] \quad \text{તથા} \quad -4 \in [-4, -2]$$

જવાબ : (A)

(74) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $Q = PAP^T$ તો $P^T Q^{205} P = \dots\dots$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 205 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 205 & 205 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 205 \\ 0 & 205 \end{bmatrix}$

(D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $PP^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+1}{4} & -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4} & \frac{1+3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore P^T = P^{-1}, \text{ તથા } P^T P = PP^T$$

$$(PP^{-1} = P^{-1}P = I)$$

$$\text{હવે } P^T Q^{205} P = P^T [Q \times Q \times \dots \times Q \text{ 205 વખત}] P$$

$$= P^T [(PAP^T) (PAP^T) \times \dots \times 205 \text{ વખત}] P$$

$$= (P^T P) A (P^T P) A (P^T P) A \dots 205 \text{ વખત} = A \times A \times \dots 205 \text{ વખત} = A^{205}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{તે જ રીતે } A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{અર્થાત્ } A^{205} = \begin{bmatrix} 1 & 205 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{જવાબ : (A)}$$

$$(75) \quad A = \begin{bmatrix} \cos \frac{7\pi}{6} & \sin \frac{11\pi}{6} \\ \sin \frac{11\pi}{6} & -\cos \frac{7\pi}{6} \end{bmatrix} \quad \text{તે } A^2 = \dots$$

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ઉકેલ : } A = \begin{bmatrix} \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) & \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) & -\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{જવાબ : (A)}$$

$$(76) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots$$

$$(A) \begin{bmatrix} 20 & 25 & 16 \\ 32 & 40 & 28 \\ 44 & 55 & 40 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} -12 & -15 & 4 \\ 32 & 40 & 28 \\ 44 & 55 & 40 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ -24 & -40 & 48 \end{bmatrix}$$

(D) આમાંથી એક પણ નહિ.

$$\text{ઉકેલ : માંગેલ ગુણકાર } \begin{bmatrix} -1-4 & -2-12 \\ -2-6 & -4-16 \\ -3-8 & -6-20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ -8 & -20 \\ -11 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 25 & 16 \\ 32 & 40 & 28 \\ 44 & 55 & 40 \end{bmatrix}$$

જવાબ : (A)

$$(77) \quad 2A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{અને } A + 2B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{તે } B = \dots$$

$$(A) \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} -8 & 1 & -2 \\ -1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ઉકેલ : } 2A + 4B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 2 & 12 & 4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (2)$$

(1) માંથી (2) ની બાદબાકી કરતાં

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 2 & 12 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{જવાબ : (A)}$$

$$(78) \text{ જો } A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \text{ તો } A^{12} = \dots$$

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ઉકેલ : } A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{12} = (A^4)^3 = I^3 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{જવાબ : (C)}$$

$$(79) \text{ જો } A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ અને } A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ તો } \alpha = \dots \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$(A) \frac{\pi}{6}$$

$$(B) \frac{\pi}{4}$$

$$(C) \frac{\pi}{3}$$

$$(D) \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ઉકેલ : } A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ તો } A^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\cos \alpha & 0 \\ 0 & 2\cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2 \cos \alpha = 1. \quad \text{આથી } \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{જવાબ : (C)}$$

(80) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ તો $A^8 = \dots$

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = A^4 \cdot A^4 = I$$

જવાબ : (C)

(81) જો $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ અને $A + A^T = \sqrt{3} I$ તો $\theta = \dots$ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $-\frac{\pi}{6}$

(D) $-\frac{\pi}{3}$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

હવે $A + A^T = \sqrt{3} I$

$$\therefore \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2\cos \theta & 0 \\ 0 & 2\cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ હોવાથી, $P(\theta)$ પ્રથમ અથવા ચતુર્થ ચરણમાં છે.

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \text{ અથવા } -\frac{\pi}{6}$$

જવાબ : (A), (C)

(82) હાર સંક્ષેપન એશિલોનની રીતે $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

હવે $A = I_2 A$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \quad \text{અથવા} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1) \quad \text{અથવા} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A \quad (R_2 \rightarrow 4R_2)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A \quad R_{21} (-5)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(83) હાર સંક્ષેપન એશિલોનની રીતે $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ અને $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

હવે $A = I_3 A$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \quad R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 8 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} A \quad R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1, \quad R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} A \quad R_2 \rightarrow \frac{1}{10} R_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 1 & \frac{3}{10} & \frac{-11}{10} \end{bmatrix} A \quad R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-11}{4} \end{bmatrix} A \quad R_3 \rightarrow \frac{5}{2} R_3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-15}{2} & \frac{-9}{4} & \frac{37}{4} \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-11}{4} \end{bmatrix} A \quad R_2 \rightarrow R_2 - \frac{4}{5} R_3, R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} & \frac{-5}{4} & \frac{17}{4} \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-11}{4} \end{bmatrix} A \quad (R_1 \rightarrow R_1 - 2 R_2)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} & \frac{-5}{4} & \frac{17}{4} \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-11}{4} \end{bmatrix}$$

(84) હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવવા માટે અમુક પગથિયા પૂર્ણ કરતાં નીચે પ્રમાણે શ્રેણિકો મળે તો α અને β નું મૂલ્ય મેળવો.

$$\text{શ્રેણિક } A = \begin{bmatrix} 41 & 5 & 1 \\ 79 & 9 & 7 \\ 29 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ હોય, તો } \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A$$

$$(A) \alpha = \frac{7}{26}, \beta = \frac{-1}{26} \quad (B) \alpha = \frac{-1}{26}, \beta = \frac{7}{26} \quad (C) \alpha = \frac{1}{26}, \beta = \frac{-7}{26} \quad (D) \alpha = \frac{1}{26}, \beta = \frac{7}{26}$$

$$\text{ઉકેલ : } \begin{bmatrix} 41 & 5 & 1 \\ 79 & 9 & 7 \\ 29 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 7 & 9 & 79 \\ 5 & 3 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \quad (C_1 \leftrightarrow C_3)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & -26 & -208 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A \quad R_2 \rightarrow R_2 - 7 R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 5 R_1$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{26} & \frac{7}{26} \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A \quad \left(R_2 \rightarrow -\frac{1}{26} R_2 \right)$$

$$\therefore \alpha = \frac{-1}{26}, \beta = \frac{7}{26} \quad \text{જવાબ : (B)}$$

(85) હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી શ્રેણિક

$$A = \begin{bmatrix} 41 & 5 & 1 \\ 79 & 9 & 7 \\ 29 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવતા}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y & -\frac{9}{26} \\ 0 & -\frac{1}{26} & \frac{7}{26} \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ A શ્રેણિક મળ્યા તો } x \text{ અને } y \text{ નાં મૂલ્યો અનુક્રમે અને}$$

(A) 1 અને $\frac{5}{26}$

(B) $\frac{5}{26}$ અને 1

(C) 1 અને $-\frac{5}{26}$

(D) -1 અને $-\frac{5}{26}$

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} 41 & 5 & 1 \\ 79 & 9 & 7 \\ 29 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 7 & 9 & 79 \\ 5 & 3 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$$

$$(C_1 \leftrightarrow C_3)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & -26 & -208 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 7 R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 5 R_1$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{26} & \frac{7}{26} \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A$$

$$(R_2 \rightarrow \frac{1}{26} R_2)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{26} & \frac{-9}{26} \\ 0 & -\frac{1}{26} & \frac{7}{26} \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - 5 R_2$$

$$\therefore x = 1 \text{ અને } y = \frac{5}{26}$$

જવાબ : (A)

•