

सामान्य अनुदेश :

- 1 परीक्षार्थी प्रश्न-पत्र के पहले पृष्ठ पर अपना अनुक्रमांक अवश्य लिखें ।
- 2 कृपया प्रश्न-पत्र को जाँच लें कि प्रश्न-पत्र के कुल पृष्ठों तथा प्रश्नों की उतनी ही संख्या है जितनी प्रथम पृष्ठ के सबसे ऊपर छपी है । इस बात की जाँच भी कर लें कि प्रश्न क्रमिक रूप में हैं ।
- 3 उत्तर-पुस्तिका में पहचान-चिह्न बनाने अथवा निर्दिष्ट स्थानों के अतिरिक्त कहीं भी अनुक्रमांक लिखने पर परीक्षार्थी को अयोग्य ठहराया जायेगा ।
- 4 अपनी उत्तर-पुस्तिका पर प्रश्न-पत्र की कोड संख्या **59/OSS/2, सेट-[C]** लिखें ।
- 5 (क) प्रश्न-पत्र केवल हिन्दी/अंग्रेजी में है । फिर भी, यदि आप चाहें तो नीचे दी गई किसी एक भाषा में उत्तर दे सकते हैं :

अंग्रेजी, हिंदी, उर्दू, पंजाबी, बंगला, तमिल, मलयालम, कन्नड़, तेलुगू, मराठी, उड़िया, गुजराती, कोंकणी, मणिपुरी, असमिया, नेपाली, कश्मीरी, संस्कृत और सिंधी ।

कृपया उत्तर-पुस्तिका में दिए गए बॉक्स में लिखें कि आप किस भाषा में उत्तर लिख रहे हैं।

- (ख) यदि आप हिन्दी एवं अंग्रेजी के अतिरिक्त किसी अन्य भाषा में उत्तर लिखते हैं, तो प्रश्नों को समझने में होने वाली त्रुटियों / गलतियों की जिम्मेदारी केवल आपकी होगी ।



MATHEMATICS

(गणित)

(311)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 100

समय : 3 घण्टे]

[पूर्णांक : 100

- Note :**
- This question paper consists of **four Sections**, viz., 'A', 'B', 'C' and 'D' containing 33 questions.
 - Question Nos. **1 to 10** in **Section 'A'** are multiple-choice questions (MCQ). Each question carries **1 mark**. In each question, there are four choices (A), (B), (C) and (D) of which only one is correct. You have to select the correct choice and indicate it in your Answer-Book by writing (A), (B), (C) or (D) as the case may be. No extra time is allotted for attempting these questions.
 - Question Nos. **11 to 16** in **Section 'B'** are very short-answer questions and carry **2 marks** each.
 - Question Nos. **17 to 28** in **Section 'C'** are short-answer questions and carry **4 marks** each.
 - Question Nos. **29 to 33** in **Section 'D'** are long-answer questions and carry **6 marks** each.
 - All** questions are **compulsory**. There is no overall choice, however, alternative choices are given in some questions. In such questions, you have to attempt only one choice.

- निर्देश :**
- इस प्रश्न-पत्र में कुल **33** प्रश्न हैं, जो चार खण्डों 'अ', 'ब', 'स' तथा 'द' में विभाजित हैं।
 - खण्ड-‘अ’** में प्रश्न संख्या **1 से 10** तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के लिए **1 अंक** निर्धारित है। प्रत्येक प्रश्न में (A), (B), (C) तथा (D) चार विकल्प दिए गए हैं, जिनमें कोई एक सही है। आपको सही विकल्प चुनना है तथा अपनी उत्तर-पुस्तिका में (A), (B), (C) अथवा (D) जो सही हो, उत्तर के रूप में लिखना है। इन प्रश्नों के उत्तर देने के लिए कोई अतिरिक्त समय नहीं दिया जाएगा।
 - खण्ड-‘ब’** में प्रश्न संख्या **11 से 16** तक अति लघु-उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के **2 अंक** निर्धारित हैं।
 - खण्ड-‘स’** में प्रश्न संख्या **17 से 28** तक लघु-उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के **4 अंक** निर्धारित हैं।
 - खण्ड-‘द’** में प्रश्न संख्या **29 से 33** तक दीर्घ-उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के **6 अंक** निर्धारित हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य** हैं। पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं है, फिर भी कुछ प्रश्नों में आंतरिक विकल्प हैं। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।



SECTION – A

खण्ड – अ

1 The values of x for which $f(x) = \sin^{-1} x$, $-1 \leq x \leq 1$ is not differentiable,

जिन x के मानों के लिए फलन $f(x) = \sin^{-1} x$, $-1 \leq x \leq 1$ अवकलनीय नहीं है, है :

- (A) 2, 1 (B) 1, 0
(C) -1, 0 (D) -1, 1

2 If $A = [1 \ 2 \ 3]$, then the order of the matrix $A'A$ is equal to

यदि $A = [1 \ 2 \ 3]$ है, तो आव्यूह $A'A$ की कोटि होगी

- (A) 1×3 (B) 3×3
(C) 3×1 (D) 1×1

3 Let '*' be a binary operation on the set \mathbb{Q} defined by $a*b = a + b - ab$ for all values of $a, b \in \mathbb{Q}$. Then identity element of \mathbb{Q} is

माना समुच्चय \mathbb{Q} पर एक द्विआधारी संक्रिया इस प्रकार परिभाषित की जाती है, सभी $a, b \in \mathbb{Q}$ के लिए $a*b = a + b - ab$ । तब \mathbb{Q} का तत्समक अवयव होगा -

- (A) -1 (B) 1
(C) 2 (D) 0

4 Maximum value of $\sin x \cos x$ is

$\sin x \cos x$ का अधिकतम मान है

- (A) 0 (B) 1
(C) $\frac{1}{2}$ (D) 2



5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(x \cos x)}{x \cos x}$ is equal to

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(x \cos x)}{x \cos x}$ के बराबर है

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$
(C) 1 (D) 2

6 If $y = xe^{\sin x}$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to

यदि $y = xe^{\sin x}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ होगा

- (A) $e^{\cos x}(x \sin x + 1)$ (B) $e^{\sin x}(x \cos x + 1)$
(C) $-e^{\sin x}(x \cos x + 1)$ (D) $-e^{\cos x}(x \sin x + 1)$

7 The principal value of $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ is equal to

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान होगा

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{6}$
(C) $\frac{\pi}{3}$ (D) 0



8 Possible equation of a plane whose normal makes angle 60° , 60° and 60° with three axes is

एक समतल जिसका अभिलम्ब तीनों अक्षों से क्रमशः 60° , 60° तथा 60° के कोण बनाता है, का सम्भावित समीकरण होगा

- (A) $2x + y - z = 6$ (B) $x - 2y + z = 6$
(C) $x + y + z = 6$ (D) $2x + y + z = 0$

9 If $\int \left[e^x \frac{x}{(1+x)^2} \right] dx = ke^x + c$, then k is equal to

यदि $\int \left[e^x \frac{x}{(1+x)^2} \right] dx = ke^x + c$ है, तो k बराबर है

- (A) $1+x$ (B) $\frac{1}{1+x}$
(C) $-\frac{1}{1+x}$ (D) $-(1+x)$

10 The negation of the statement “all triangle have three vertices” is

- (A) it is not the case that all triangle have three vertices
(B) all triangle have four vertices
(C) all triangle have more than four vertices
(D) all triangle have two vertices

कथन “सभी त्रिभुजों के तीन शीर्ष होते हैं” का निषेधन होगा :

- (A) यह वस्तु स्थिति नहीं है कि सभी त्रिभुजों के तीन शीर्ष होते हैं ।
(B) सभी त्रिभुजों के चार शीर्ष होते हैं ।
(C) सभी त्रिभुजों के चार से अधिक शीर्ष होते हैं ।
(D) सभी त्रिभुजों के दो शीर्ष होते हैं ।



SECTION – B

खण्ड – ब

11 Write the contrapositive of the following statements :

(a) If a number is even then it is divisible by 2.

(b) If a number is odd then it is divisible 3.

निम्न कथनों के प्रतिधनात्मक लिखिए :

(a) यदि एक संख्या सम संख्या है, तो वह 2 से विभाजित होगी ।

(b) यदि एक संख्या विषम संख्या है, तो वह 3 से विभाजित होगी ।

12 Find the area of a parallelogram whose diagonals are $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ and $2\hat{i} - 3\hat{k}$.

एक चतुर्भुज, जिसके विकर्ण $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $2\hat{i} - 3\hat{k}$ हैं, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

13 If $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ and $B - A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, then find A and B .

यदि $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B - A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह A और B ज्ञात कीजिए ।

14 Prove that $2 \tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$.

सिद्ध कीजिए कि $2 \tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$



15 Find $\frac{dy}{dx}$ if $y = e^{x^2 \tan x}$.

यदि $y = e^{x^2 \tan x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

OR / अथवा

If $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$, then prove that $\frac{dy}{dx} = 0$.

यदि $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = 0$ है ।

16 Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए ।



SECTION – C

खण्ड – स

17 Find $\frac{dy}{dx}$ when $x = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)$, $y = \tan^{-1}\left(\frac{3t-t^3}{1-3t^2}\right)$.

यदि $x = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)$, $y = \tan^{-1}\left(\frac{3t-t^3}{1-3t^2}\right)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

OR / अथवा

If $y = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m$, prove that $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$

यदि $y = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$

18 If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix}$ and $(A+B)^2 = A^2 + B^2$, then find the values

of x and y .

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix}$ तथा $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ हैं, तो x और y के मान

ज्ञात कीजिए ।



19 Evaluate $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2} \right] dx$

$\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2} \right] dx$ ज्ञात कीजिए ।

OR / अथवा

Evaluate $\int \left[\frac{1}{1 - \cos \alpha \cos x} \right] dx$

$\int \left[\frac{1}{1 - \cos \alpha \cos x} \right] dx$ ज्ञात कीजिए ।

20 Solve the following differential equation :

$$x dy + y dx + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0, \text{ given } y = 1 \text{ when } x = 1.$$

अवकल समीकरण $x dy + y dx + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जब $x = 1$ के लिए

$y = 1$ है ।

21 Evaluate $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\theta}{1 + \sin \theta} d\theta$

$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\theta}{1 + \sin \theta} d\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।



22 Prove that :

सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

23 Prove that $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan x\right) = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1+2 \cos 2x}{2+\cos 2x}$

सिद्ध कीजिए : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan x\right) = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1+2 \cos 2x}{2+\cos 2x}$

24 Examine the continuity of the following function at $x=0$ and $x=2$.

निम्न फलन की सांतत्य की $x=0$ व $x=2$ पर जांच कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

25 If $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, find a vector \vec{r} satisfying relations $\vec{a} \cdot \vec{r} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{r} = 2$, $\vec{c} \cdot \vec{r} = 5$.

यदि $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ है, तो एक सदिश \vec{r} ज्ञात कीजिए, जिसके लिए

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{r} = 2, \quad \vec{c} \cdot \vec{r} = 5$$



- 26 If $lx + my = 1$ be a normal to the curve $y^2 = 4ax$, then show that $al^3 + 2alm^2 - m^2 = 0$.

यदि $lx + my = 1$, वक्र $y^2 = 4ax$ पर अभिलम्ब है, तो दिखाइए कि $al^3 + 2alm^2 - m^2 = 0$

- 27 Using vector method prove that the medians of a triangle are concurrent.

सदिशों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ संगामी होती हैं ।

- 28 Let R be a relation defined on the set \mathbb{Z} of all integers as $R = \{(x, y) : x - y \text{ is an integer}\}$. Show that R is an equivalence relation.

माना सम्बन्ध R , समुच्चय \mathbb{Z} पर $R = \{(x, y) : x - y \text{ एक पूर्णांक है}\}$ द्वारा परिभाषित है। तो दर्शाइए कि R एक समतुल्य सम्बन्ध है ।



SECTION – D

खण्ड – द

- 29 Using integration, find the area of the smaller region bounded by the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ and the straight line } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

समाकलन विधि से, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा सरल रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, (a > 0, b > 0)$ के बीच धिरे लघुकक्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

- 30 Find the foot of the perpendicular drawn from the point (1, 1, 2) to the plane

$$\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) = 5. \text{ Also, calculate the perpendicular distance.}$$

बिन्दु (1, 1, 2) से समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) = 5$ पर खींचे गये लम्ब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए । तथा लम्ब-दूरी भी ज्ञात कीजिए ।

OR / अथवा

Show that two lines $\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-6}{2}$ are intersecting lines. Also, calculate the point of intersection.

दर्शाइए कि रेखाएँ $\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-6}{2}$ प्रतिच्छेदित रेखाएँ हैं ।

इन रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिन्दु भी ज्ञात कीजिए ।

- 31 Find the maximum value of $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

फलन $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए ।



- 32 In a small scale industry a manufacturer produces two types of book cases. The first type of book case requires 3 hours on machine A and 2 hours on machine B for completion, whereas the second type of book case requires 3 hours on machine A and 3 hours on machine B. The machine A can run at the most for 18 hours while the machine B for at the most 14 hours a day. He earns a profit of ₹ 30 on each book case of the first type and ₹ 40 on each book case of the second type.

How many book cases of each type should he make each day so as he have a maximum profit ?

एक लघु उद्योग में एक निर्माता दो प्रकार की पुस्तक अलमारी बनाता है। पहले प्रकार की पुस्तक अलमारी को पूर्ण बनाने के लिए मशीन A पर 3 घंटे तथा मशीन B पर 2 घंटे आवश्यक होते हैं। दूसरे प्रकार की पुस्तक अलमारी के लिए मशीन A पर 3 घंटे तथा मशीन B पर 3 घंटे आवश्यक होते हैं। प्रतिदिन मशीन A अधिकतम 18 घंटे तथा मशीन B अधिकतम 14 घंटे चल सकती है। पहले प्रकार की प्रत्येक पुस्तक अलमारी पर वह ₹ 30 लाभ तथा दूसरे प्रकार की प्रत्येक पुस्तक अलमारी पर ₹ 40 लाभ कमाता है। प्रत्येक दिन वह प्रत्येक प्रकार की कितनी पुस्तक अलमारी बनाए जिससे उसे अधिकतम लाभ प्राप्त हो ?

- 33 Find adjoint of a matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ and show that $A(\text{Adj. } A) = |A| I$.

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज ज्ञात कीजिए और दर्शाइए कि $A(\text{Adj. } A) = |A| I$.

OR / अथवा

Solve the following system of equations, using matrix inversion method :

निम्न समीकरण निकाय का हल, आव्यूह व्युत्क्रमण विधि से ज्ञात कीजिए :

$$2x + 3y + 4z = 1$$

$$x - y + 2z = -2$$

$$3x + y - z = 5$$





Roll No.
अनुक्रमांक

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

