

Total Pages : 8

KN-20

B.A. (Part-I) Examination, 2022

(New Course)

MATHEMATICS

(Algebra and Trignometry)

[Paper : First]

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Passing Marks : 17

Note : All questions are **compulsory**. Answer **any two parts** from each questions. All questions carry **equal** marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Unit - I / इकाई - I

1. (a) Find the inverse of the following matrix by using elementary operations only : [5]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

केवल प्रारंभिक संक्रियाओं के उपयोग से निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

- (b) Examine Linear independence of the following sets of vectors : [5]

$$[1, 0, -1], [2, 1, 3], [-1, 0, 0] \text{ and } [1, 0, 1]$$

निम्नलिखित सदिशों के समुच्चयों की रैखिक स्वतंत्रता का परीक्षण कीजिए :

$$[1, 0, -1], [2, 1, 3], [-1, 0, 0] \text{ तथा } [1, 0, 1]$$

- (c) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the following matrix : [5]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

निम्नलिखित आव्यूह के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Unit - II / इकाई - II

2. (a) Test consistency for the following. If possible find the solution : [5]

$$4x - 2y + 6z = 8, x + y - 3z = -1, 15x - 3y + 9z = 21$$

निम्नलिखित के लिए संगतता की जाँच कीजिए। यदि संभव है तब हल ज्ञात कीजिए :

$$4x - 2y + 6z = 8, x + y - 3z = -1, 15x - 3y + 9z = 21$$

- (b) Solve $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$ when the product of its two roots is 12 . [5]

समीकरण $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$ को हल कीजिए जबकि इसके दो मूलों का गुणनफल 12 है।

- (c) Solve the following equation by Cardan's method : [5]

$$x^3 - 27x + 54 = 0$$

निम्नलिखित समीकरण को कार्डन विधि से हल कीजिए :

$$x^3 - 27x + 54 = 0$$

Unit - III / इकाई - III

3. (a) Define equivalence relation with example. [5]

तुल्यता संबंध को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

- (b) State and prove Lagrange's theorem for a finite group. [5]

परिमित समूह के लिए लेग्रेंज प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

- (c) Prove that a subgroup H of any group G is normal if and only if $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$. [5]

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का एक उपसमूह H प्रसामान्य होता है यदि और केवल यदि $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$.

Unit - IV / इकाई - IV

4. (a) State and prove the fundamental theorem of homomorphism. [5]

समाकारिता का मूल प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

- (b) By defining subring prove that the intersection of two subring is also a subring. [5]

उपवलय को परिभाषित करते हुए सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

- (c) Prove that every field is an integral domain but converse is not always true. [5]

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक फील्ड (क्षेत्र) एक पूर्णांकीय डोमेन होता है। परन्तु विलोम सदैव सत्य नहीं है।

Unit - V / इकाई - V

5. (a) If $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ and $2\cos\phi = \frac{1}{y} + y$ then show that : [5]

$$x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\theta + n\phi)$$

यदि $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ तथा $2\cos\phi = \frac{1}{y} + y$ तब दर्शाइये कि :

$$x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\theta + n\phi)$$

- (b) Find the sum of the following series : [5]

$$\sin \alpha + x \sin(\alpha + \beta) + \frac{x^2}{2!} \sin(\alpha + 2\beta) + \dots \infty$$

निम्नलिखित श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए :

$$\sin \alpha + x \sin(\alpha + \beta) + \frac{x^2}{2!} \sin(\alpha + 2\beta) + \dots \infty$$

- (c) Prove that : [5]

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$$

-----X-----