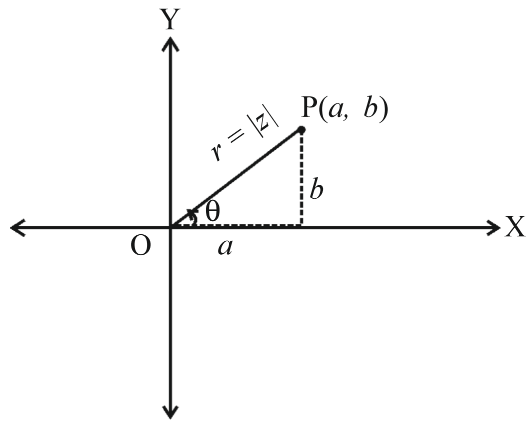
2 સંકર સંખ્યાઓ

- સંકર સંખ્યાનું સ્વરૂપ $z = a + ib$, જ્યાં, $a, b \in R$
  $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$ તથા $i^2 = -1$
- સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ ને (a, b) વડે દર્શાવતાં તેનું ભૌમિતિક નિરૂપણ $R \times R$ માં કરી શકાય છે. તેને આર્ગન્ડ આકૃતિ કહે છે.
  X-અક્ષને **વાસ્તવિક અક્ષ** તેમજ Y-અક્ષને **કાલ્પનિક અક્ષ** કહે છે.



આકૃતિ 2.1

- સંકર સંખ્યાના ગણને C વડે દર્શાવાય છે.
- સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ નો માનાંક $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ થાય.
- સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ નું ધ્રુવીય (ત્રિકોણમિતિય) સ્વરૂપ
  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ જ્યાં $r = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$ ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) (ઑઈલર સ્વરૂપ)
- $z = a + ib$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\overline{z} = a - ib$ થાય. જો $\theta \in (-\pi, \pi]$ તો θ ને z નો **મુખ્ય કોણાંક** કહે છે. તેને $arg(z)$ વડે દર્શાવાય છે.
- જો $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ સ્વરૂપમાં હોય, તો $\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = re^{-i\theta}$ લખી શકાય.
- $|z| = |\overline{z}|$
- $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}(z)$
- $arg(\overline{z}) = -arg(z)$
- $z\overline{z} = |z|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
- $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$
- $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$
- $arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) = 2arg\, z$
- $arg(z^n) = n\, arg(z)$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 - z_2| \geq |\,|z_1| - |z_2|\,|$
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- જો $z = re^{i\theta}$ તો $z^n = r^n e^{in\theta}$, $n \in Q$ **(દ-મુર પ્રમેય)**
- 1 નાં ઘનમૂળ :
  $1, \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ એ 1 નાં ઘનમૂળ છે.
- $1 + \omega + \omega^2 = 0$, $\omega^3 = 1$.

- આર્ગન્ડ આકૃતિમાં 1 નાં ઘનમૂળ એ સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુ થાય.
- **1 નાં ચતુર્થ મૂળ**

  $1, i, -1, -i$ એ 1 નાં ચતુર્થ મૂળ છે.
- $z = a + ib = r\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$ નાં n મૂળ $r^{\frac{1}{n}}\left[cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)+i\,sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right]$ જ્યાં $k = 0, 1, 2,..., n-1$
- સમીકરણ $|z - z_0| = r$ એ z_0 કેન્દ્ર તથા r ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.
- જો $b^2 - 4ac < 0$, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ જ્યાં, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ નાં બીજ $\frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ છે.
- $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2Re\,(z_1 . \overline{z_2})$

  જો $z = x + iy$ તો,

$$arg\,z = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x > 0, y \geq 0$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, \qquad x < 0, y \geq 0$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, \qquad x < 0, y < 0$$

$$= \frac{\pi}{2}, \qquad x = 0, y > 0$$

$$= -\frac{\pi}{2}, \qquad x = 0, y < 0$$

જો $x = 0, y = 0$ તો $arg\,z$ ન મળે.

જો z_1, z_2 એ આર્ગન્ડ આકૃતિમાં બે નિશ્ચિત બિંદુ હોય તો

- $|z - z_1| = |z - z_2| \Rightarrow z$ એ z_1 અને z_2 ના લંબદ્વિભાજક પરનું બિંદુ છે.
- $|z - z_1| + |z - z_2| = |z_1 - z_2| \Rightarrow z$ નો બિંદુગણ z_1 અને z_2 થી બનતો રેખાખંડ છે.
- $|z - z_1| + |z - z_2| =$ અચળ $(z_1 \neq z_2) \Rightarrow z$ નો બિંદુગણ ઉપવલય છે.
- $|z - z_1| - |z - z_2| = |z_1 - z_2| \Rightarrow z$ નો બિંદુગણ z_1 અને z_2 થી બનતો રેખાખંડ છે પરંતુ z એ રેખાખંડ પર ન હોય.
- $|z - z_1| - |z - z_2| =$ અચળ $(z_1 \neq z_2) \Rightarrow z$ નો બિંદુગણ અતિવલય છે.
- $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Rightarrow z$ નો બિંદુગણ એ વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓ z_1 અને z_2 હોય તેવું વર્તુળ છે.
- $|z - z_1| = k\,|z - z_2|, (k \neq 1) \Rightarrow z$ નો બિંદુગણ વર્તુળ છે.
- $arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) =$ અચળ $\Rightarrow z$ નો બિંદુગણ વૃત્તખંડ છે.
- $arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow z$ નો બિંદુગણ એ વ્યાસનાં શિરોબિંદુઓ z_1 અને z_2 હોય તેવું વર્તુળ છે.

- $arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = 0$ અથવા $\pi \Rightarrow z$ નો બિંદુગણ એ z_1 અને z_2 માંથી પસાર થતી રેખા છે.

- જો $\left|z+\frac{1}{z}\right| = a$, તો $|z|$ નું મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય $\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ તથા $\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ છે.

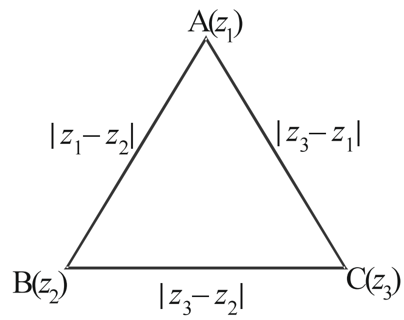
ધારો કે z_1, z_2, z_3 એ ΔABC ના ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં આવેલ શિરોબિંદુઓ છે.

AB = $|z_1 - z_2|$, AC = $|z_3 - z_1|$ અને

BC = $|z_3 - z_2| = |(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)|$

જો $arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right) = \alpha$ તથા $\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right| = \frac{AC}{AB}$ હોય તો

$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{AC}{AB}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ થાય.



આકૃતિ 2.2

જો $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ તો ΔABC એ સમબાજુ ત્રિકોણ થશે.

બહુ વિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) જો ચતુર્ઘાત સમીકરણ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a, b, c, d \in R)$ નું કોઈપણ બીજ વાસ્તવિક સંખ્યા ન હોય તથા બે બીજનો સરવાળો $3 + 4i$ હોય અને બાકીનાં બે બીજનો ગુણાકાર $13 + i$ હોય, તો b = ...

(A) 30 (B) 6 (C) 51 (D) 15

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ છે. (1)

ધારો કે આપેલ સમીકરણનાં બીજ $\alpha \pm i\beta, \gamma \pm i\delta$ છે.

$\therefore$ આપેલ સમીકરણ

$(x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta))(x - (\gamma + i\delta))(x - (\gamma - i\delta)) = 0$

$\therefore (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)(x^2 - 2\gamma x + \gamma^2 + \delta^2) = 0$ (2)

આપણે b ની કિંમત શોધવી છે. સમીકરણ (1) અને (2) ની સરખામણી કરતાં, x^2નો સહગુણક b થશે.

$\therefore b = \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\gamma + \gamma^2 + \delta^2$ (3)

આપેલ છે કે $\alpha + i\beta + \gamma + i\delta = 3 + 4i$

$\therefore \alpha + \gamma = 3$ અને $\beta + \delta = 4$

$\therefore \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma = 9$ (4)

અને $\beta^2 + \delta^2 + 2\beta\delta = 16$

$\therefore \beta^2 + \delta^2 = 16 - 2\beta\delta$ (5)

સમીકરણ (4), (5)ની કિંમતો સમીકરણ (3)માં મૂકતા,

$b = 9 + 2\alpha\gamma + 16 - 2\beta\delta$ (6)

વળી, $(\alpha - i\beta)(\gamma - i\delta) = 13 + i$. આથી $(\alpha\gamma - \beta\delta) - i(\alpha\delta + \beta\gamma) = 13 + i$

$\therefore \alpha\gamma - \beta\delta = 13$

સમીકરણ (6) પરથી, $b = 25 + 2(13) = 51$ **જવાબ :** (C)

(2) z_1 અને z_2 ભિન્ન સંકર સંખ્યાઓ છે તથા $|z_1| = |z_2|$. જો z_1નો વાસ્તવિક ભાગ ધન સંખ્યા હોય તથા z_2 નો કાલ્પનિક ભાગ ઋણ સંખ્યા હોય, તો $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ એ .... છે. $\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} \neq 0\right)$

(A) શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા (B) વાસ્તવિક અને ધન (C) વાસ્તવિક અને ઋણ (D) શૂન્ય સંખ્યા

ઉકેલ : ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c - id$ જ્યાં $a > 0, d > 0$

$|z_1| = |z_2| \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ (1)

હવે, $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} = \frac{(a+ib)+(c-id)}{(a+ib)-(c-id)} = \frac{[(a+c)+i(b-d)]}{[(a-c)+i(b+d)]}$

$= \frac{[(a+c)+i(b-d)][(a-c)-i(b+d)]}{[(a-c)+i(b+d)][(a-c)-i(b+d)]}$

$= \frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)-2i(ad+bc)}{a^2+c^2-2ac+b^2+d^2+2bd}$

$= \frac{-(ad+bc)i}{a^2+b^2-ac+bd}$ ((1)નો ઉપયોગ કરતાં)

$\therefore \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા થાય.

જવાબ : (A)

(3) જો $|z| = 1$ અને $z^{2n} + 1 \neq 0$ તો $\frac{z^n}{z^{2n}+1} - \frac{z^{-n}}{(\bar{z})^{2n}+1} =$ ......

(A) 3 (B) 0 (C) i (D) 1

ઉકેલ : ધારો કે $z = cos\theta + i\ sin\theta$

$\therefore \frac{z^n}{z^{2n}+1} - \frac{z^{-n}}{(\bar{z})^{2n}+1} = \frac{cos\,n\theta+i\,sin\,n\theta}{1+cos\,2n\theta+i\,sin\,2n\theta} - \frac{cos\,n\theta-i\,sin\,n\theta}{1+cos\,2n\theta-i\,sin\,2n\theta}$

$= \frac{cos\,n\theta+i\,sin\,n\theta}{2cos\,n\theta(cos\,n\theta+i\,sin\,n\theta)} - \frac{cos\,n\theta-i\,sin\,n\theta}{2cos\,n\theta(cos\,n\theta-i\,sin\,n\theta)}$

$= \frac{1}{2cos\,n\theta} - \frac{1}{2cos\,n\theta} = 0$ **જવાબ :** (B)

બીજી રીત : $|z| = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1$

$\frac{z^n}{z^{2n}+1} - \frac{z^{-n}}{(\bar{z})^{2n}+1} = \frac{z^n}{z^{2n}+1} - \frac{z^{-n}}{\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}+1} = \frac{z^n}{z^{2n}+1} - \frac{z^{2n}\cdot z^{-n}}{1+z^{2n}} = \frac{z^n}{z^{2n}+1} - \frac{z^n}{z^{2n}+1} = 0$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}\right) > 1$ (જ્યાં $|z-1| \neq \frac{2}{3}$) અસમતાનું પાલન કરતી સંકર સંખ્યાનો બિંદુગણ ......

(A) વર્તુળ છે. (B) વર્તુળની અંદરનો ભાગ. (C) વર્તુળનો બહારનો ભાગ. (D) રેખા છે.

ઉકેલ : $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}\right) > 1 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \left(\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}\right) < \frac{1}{2}$ ($\log_a x$ એ $a < 1$ માટે ઘટતું વિધેય છે.)

$\therefore 2|z-1| + 8 < 3|z-1| - 2$

$\therefore |z-1| > 10$ વર્તુળની બહારનો ભાગ છે. **જવાબ :** (C)

(5) જો α, β એ $x^2 - 2x + 2 = 0$ નાં બીજ હોય, તો $\alpha^n + \beta^n =$ ......

(A) $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ (B) $2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$ (C) $2^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{n\pi}{4}$ (D) 0

ઉકેલ : $x^2 - 2x + 2 = 0$

$\therefore x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$

$\therefore$ ધારો કે $\alpha = 1 + i, \quad \beta = 1 - i,$

$\alpha^n + \beta^n = (1 + i)^n + (1 - i)^n$

$$= \left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n + \left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$= 2^{\frac{n}{2}}\left[cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\,sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right] = 2^{\frac{n}{2}} \cdot 2cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$ **જવાબ :** (B)

(6) જો $x^2 - x\sqrt{3} + 1 = 0$, તો $\sum_{n=1}^{36}\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = ...$

(A) 0 (B) –72 (C) 72 (D) 36

ઉકેલ : $x^2 - x\sqrt{3} + 1 = 0$

$$x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$$

$\therefore x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ લેતાં, $x = cos\,\dfrac{\pi}{6} + i\,sin\,\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore x^{2n} = cos\,\dfrac{n\pi}{3} + i\,sin\,\dfrac{n\pi}{3}$ તથા $x^{-2n} = cos\,\dfrac{n\pi}{3} - i\,sin\,\dfrac{n\pi}{3}$

$$\therefore \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}} - 2 = x^{2n} + x^{-2n} - 2 = 2\,cos\,\frac{n\pi}{3} - 2$$

હવે, $\sum_{n=1}^{36}\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{36}\left(-2 + 2cos\frac{n\pi}{3}\right)$

$$= -2 \times 36 + 2\left[cos\frac{\pi}{3} + cos\frac{2\pi}{3} + ... + cos\frac{36\pi}{3}\right]$$

$$= -72 + 2\,\frac{\left[cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{35\pi}{6}\right)sin\left(\frac{36\pi}{3\times 2}\right)\right]}{sin\frac{\pi}{6}}$$

$$\left(cos\,\alpha + cos\,(\alpha+\beta) + ...n \text{ પદ સુધી } = \frac{sin\frac{n\beta}{2}}{sin\frac{\beta}{2}}cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)\right)$$

$= -72 + 0$

$= -72$ **જવાબ :** (B)

(7) જો $x^2 + x + 1 = 0$ નાં બે બીજ a અને b હોય, તો જેનાં બીજ a^{19} અને b^7 હોય, તેવું સમીકરણ ......

(A) $x^2 - x + 1 = 0$ (B) $x^2 - x - 1 = 0$ (C) $x^2 + x - 1 = 0$ (D) $x^2 + x + 1 = 0$

ઉકેલ : $x^2 + x + 1 = 0$ નાં બે બીજ a અને b હોય, તો $a = \omega$ તથા $b = \omega^2$ લઈ શકાય, જ્યાં $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

હવે, $a^{19} = \omega^{19} = \omega^{18}\,\omega = \omega \quad b^7 = (\omega^2)^7 = \omega^{14} = \omega^2$

તથા માંગેલ સમીકરણ $x^2 - (\omega + \omega^2)x + \omega \cdot \omega^2 = 0$

$x^2 + x + 1 = 0 \qquad (\omega + \omega^2 = -1,\ \omega\,.\omega^2 = \omega^3 = 1)$ **જવાબ :** (D)

(8) $f(z)$ ને $z - i$ વડે ભાગીએ તો શેષ i મળે છે તથા જો તેને જ $z + i$ વડે ભાગીએ તો શેષ $1 + i$ મળે છે. જો $f(z)$ ને $z^2 + 1$ વડે ભાગીએ તો મળતી શેષ ......

(A) $\frac{1}{2}(iz + 1)$ (B) $\frac{1}{2}(iz + 1 + 2i)$ (C) $iz + 1 + i$ (D) 0

ઉકેલ : $f(z)$ ને $z - i$ વડે ભાગીએ તો શેષ i મળે છે.

$\therefore f(i) = i.$ (1)

તે જ રીતે, $f(-i) = 1+i.$ (2)

$z^2 + 1$ એ દ્વિઘાત પદાવલિ છે. તેથી $f(z)$ ને $z^2 + 1$ વડે ભાગીએ, તો $az + b$ ($a, b \in R$) પ્રકારની શેષ મળે.

ધારો કે $f(z) = g(z)\ (z^2 + 1) + az + b$ (3)

$\therefore f(i) = g(i)\ (i^2 + 1) + ai + b$

$\therefore i = ai + b$ (4)

તથા $f(-i) = g(-i)\ ((-i)^2 + 1) + a(-i) + b$

$1 + i = -ai + b$ (5)

(4) અને (5)ને ઉકેલતાં, $b = \frac{1}{2} + i,\ a = \frac{i}{2}$

$\therefore$ માંગેલ શેષ $az + b = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2} + i = \frac{1}{2}(iz + 1 + 2i)$ **જવાબ :** (B)

(9) ધારો કે $a = e^{\frac{i2\pi}{13}}$. $\alpha = a + a^3 + a^4 + a^{-4} + a^{-3} + a^{-1}$ તથા $\beta = a^2 + a^5 + a^6 + a^{-6} + a^{-5} + a^{-2}$ જેનાં બીજ હોય તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ ...... છે.

(A) $x^3 - x - 3 = 0$ (B) $x^2 - x + 2 = 0$ (C) $x^2 + x + 3 = 0$ (D) $x^2 + x - 3 = 0$

ઉકેલ : બીજોનો સરવાળો

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a + a^3 + a^4 + a^{-4} + a^{-3} + a^{-1}) + (a^2 + a^5 + a^6 + a^{-6} + a^{-5} + a^{-2}) \\ &= (a + a^3 + a^4 + a^9 + a^{10} + a^{12}) + (a^2 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^{11}) \qquad (a^{13} = 1) \\ &= a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{12} \\ &= \frac{a(1-a^{12})}{1-a} = \frac{a(1-a^{13}a^{-1})}{1-a} = \frac{a(1-a^{-1})}{1-a} = -1 \qquad (a^{13} = 1)\end{aligned}$$

બીજોનો ગુણાકાર

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a + a^3 + a^4 + a^{-4} + a^{-3} + a^{-1})\ (a^2 + a^5 + a^6 + a^{-6} + a^{-5} + a^{-2}) \\ &= (a + a^3 + a^4 + a^9 + a^{10} + a^{12})\ (a^2 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^{11}) \\ &= a^3\,(1 + a^2 + a^3 + a^8 + a^9 + a^{11})\ (1 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^9) \\ &= a^3\,[1 + a^2 + 2\,(a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + a^{13} + a^{15} + a^{17}) + a^4 + 3\,(a^6 + a^8 + a^{11} + a^{12} + a^{14}) + \\ &\qquad (a^2 + a^{25} + a^{18} + a^{20})] \\ &= 3\,(a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{12}) = 3(-1) = -3\end{aligned}$$

$\therefore$ માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - (-1)x - 3 = 0$

$x^2 + x - 3 = 0$ **જવાબ :** (D)

(10) જો $\left|\dfrac{1-iz}{z-i}\right| = 1$, તો ......

(A) z એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા હોય. (B) z એ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય.

(C) $P(z)$ એ બીજા ચરણમાં હોય. (D) $P(z)$ એ ત્રીજા ચરણમાં હોય.

ઉકેલ : $z = x + iy$ લેતાં,

$|1 - iz|^2 = |z - i|^2$

$\therefore |1 - i(x + iy)|^2 = |x + iy - i|^2$

$\therefore |1 - ix + y|^2 = |x + i(y - 1)|^2$

$\therefore (1 + y)^2 + x^2 = x^2 + (y - 1)^2$

$\therefore y = 0$

$\therefore$ z એ વાસ્તવિક સંખ્યા થશે.

બીજી રીત : $|z - i| = |1 - iz| = |i + z|$

$\therefore$ $P(z)$ એ $P(i)$ તથા $P(-1)$ના લંબદુભાજક પર છે

$\therefore$ $P(z)$ X-અક્ષ પર છે.

$\therefore$ z વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

જવાબ : (B)

(11) જો $z \neq 0$, તો $|z^i|$ ની મહત્તમ સીમા ...... થશે.

(A) $|z|$ (B) 1 (C) $e^{-\pi}$ (D) e^{π}

ઉકેલ : ધારો કે $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$.

$\therefore z^i = r^i e^{-\theta} = e^{\log r^i} . e^{-\theta}$

$= e^{(i \log r - \theta)}$

$= (cos (\log r) + i\, sin (\log r))\, e^{-\theta}$

$\therefore$ $|z^i| = |e^{-\theta}| < e^{\pi}$ $\quad -\pi < \theta \leq \pi, \ -\pi \leq -\theta < \pi$

$\therefore$ $|z^i|$ ની મહત્તમ સીમા e^{π} થાય.

જવાબ : (D)

(12) જો z એ સંકર સંખ્યા હોય તથા $|z| \geq 2$ તો $\left|z + \frac{1}{2}\right|$ ની ન્યૂનતમ કિંમત

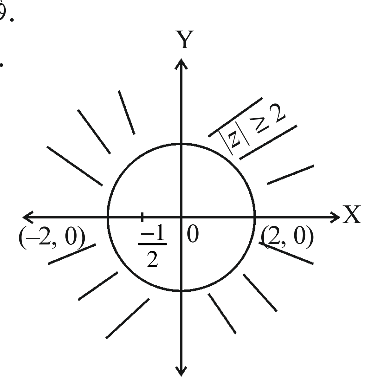
(A) અંતરાલ (1, 2) માં છે. (B) $\frac{5}{2}$ થી વધુ હોય. (C) $\frac{3}{2}$ થી વધુ તથા $\frac{5}{2}$ થી ઓછી હોય. (D) $\frac{5}{2}$ હોય.

ઉકેલ : રીત 1

ભૌમિતિક રીતે $|z| = 2$ એ ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર તથા 2 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ છે.
$|z| \geq 2$ એ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ વર્તુળ તેમજ તેની બહારનો પ્રદેશ થશે.

$\left|z + \frac{1}{2}\right| = \left|z - \left(-\frac{1}{2}\right)\right|$ એ z તેમજ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ વચ્ચેનું અંતર છે. આ અંતર

$(-2, 0)$ આગળ ન્યૂનતમ થશે જે $\frac{3}{2}$ છે.



આકૃતિ 2.3

રીત 2

$\left|z + \frac{1}{2}\right| = \left|z - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| \geq \left||z| - \left|-\frac{1}{2}\right|\right| = \left||z| - \frac{1}{2}\right|$

$|z| \geq 2$ ની ન્યૂનતમ કિંમત જ્યાં $|z| = 2$ હોય ત્યાં થશે.

$\therefore \left|z + \frac{1}{2}\right|_{min} = \left|2 - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$

જવાબ : (A)

(13) $\bar{z} = z^2$ શરતનું પાલન કરતી કેટલી સંકર સંખ્યાઓ મળે ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : ધારો કે $z = x + iy$

હવે $\bar{z} = z^2$

$\therefore x - iy = (x^2 - y^2) + i\,(2xy)$

$\therefore x = x^2 - y^2$ અને $-y = 2xy$

બીજા પરિણામ પરથી, $y = 0$ અથવા $x = -\frac{1}{2}$

ધારો કે $y = 0$. આથી $x = x^2 - y^2$ પરથી $x = x^2$

$\therefore x = 0$ અથવા $x = 1$

$\therefore z = 0$ અથવા $z = 1$

હવે જો $x = \frac{-1}{2}$ તો $\frac{-1}{2} = \frac{1}{4} - y^2$. આથી $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

આમ, $z = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ અથવા $z = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

આપેલ શરતનું પાલન કરતી કુલ ચાર સંકર સંખ્યાઓ મળે. **જવાબ :** (D)

(14) શૂન્યેતર ભિન્ન સંકર સંખ્યાઓ z અને w માટે જો $|z|^2 w - |w|^2 z = z - w$ તો ......

(A) $z = -w$ (B) $z = \bar{w}$ (C) $z\bar{w} = 1$ (D) $zw = 1$

ઉકેલ : $|z|^2 w - |w|^2 z = z - w$ ની પુનઃગોઠવણી કરતાં,

$$\frac{z}{w} = \frac{1+|z|^2}{1+|w|^2} \qquad (1)$$

$\therefore \frac{z}{w}$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા થશે. ધારો કે $\frac{z}{w} = k$ જ્યાં $k \in R$

$$\therefore \frac{kw}{w} = \frac{1+k^2|w|^2}{1+|w|^2} \qquad ((1)\text{ પરથી})$$

$\therefore k + k|w|^2 = 1 + k^2 |w|^2$

$\therefore k - 1 = k\,|w|^2 (k-1)$

$\therefore (k|w|^2 - 1)(k - 1) = 0$

$\therefore k = 1$ અથવા $k = \frac{1}{|w|^2}$

$\therefore \frac{z}{w} = 1$ અથવા $\frac{z}{w} = \frac{1}{|w|^2} = \frac{1}{w\bar{w}}$ $\qquad (z \neq w, w \neq 0)$

$z\bar{w} = 1$ **જવાબ :** (C)

(15) જો $\left|z - \frac{4}{z}\right| = 2$ હોય, તો $|z|$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો વચ્ચેનો તફાવત ...... છે. $(z \neq 0)$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $\left|z - \frac{4}{z}\right| \geq \left||z| - \frac{4}{|z|}\right|$

$\therefore \left||z| - \frac{4}{|z|}\right| \leq \left|z - \frac{4}{z}\right|$

$\therefore \left||z|-\frac{4}{|z|}\right| \le 2$

$\therefore -2 \le |z| - \frac{4}{|z|} \le 2$

$\therefore |z|^2 + 2|z| - 4 \ge 0$ અને $|z|^2 - 2|z| - 4 \le 0$

$(|z|+1)^2 \ge 5$ તથા $(|z|-1)^2 \le 5$

$\left||z|+1\right| \ge \sqrt{5}$ તથા $\left||z|-1\right| \le \sqrt{5}$

$\therefore |z|+1 \ge \sqrt{5}$ તથા $-\sqrt{5} \le |z|-1 \le \sqrt{5}$

$\therefore |z| \ge \sqrt{5}-1$ તથા $1-\sqrt{5} \le |z| \le \sqrt{5}+1$

$\sqrt{5}-1 \le |z| \le \sqrt{5}+1$

$\therefore$ મહત્તમ $|z|$ – ન્યૂનતમ $|z| = (\sqrt{5}+1) - (\sqrt{5}-1) = 2$

$\therefore |z|$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો વચ્ચેનો તફાવત 2 થશે. **જવાબ :** (B)

(16) જો z એ વાસ્તવિક ન હોય તેવી સંકર સંખ્યા વર્તુળ $|z| = 1$ પર આવેલ છે, તો $z =$ ......

(A) $\dfrac{1-i\tan\left(\frac{\arg z}{2}\right)}{1+i\tan\left(\frac{\arg z}{2}\right)}$ (B) $\dfrac{1+i\tan\left(\frac{\arg z}{2}\right)}{1-i\tan\left(\frac{\arg z}{2}\right)}$ (C) $\dfrac{1-i\tan(\arg z)}{1+i\tan(\arg z)}$ (D) $\dfrac{1+i\tan(\arg z)}{1-i\tan(\arg z)}$

ઉકેલ : $|z| = 1$ હોવાથી $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ આથી $\arg(z) = \alpha$

$$\therefore z = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} + i\,\frac{2\tan\frac{\alpha}{z}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)+i\,2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\left(1+i\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(1+i\tan\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-i\tan\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1+i\tan\frac{\alpha}{2}}{1-i\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1+i\tan\left(\frac{\arg z}{2}\right)}{1-i\tan\left(\frac{\arg z}{2}\right)}$$

જવાબ : (B)

(17) $\cos y \sin y + \cos^2 y \sin 2y + \cos^3 y \sin 3y + \ldots n$ પદ ......

(A) $\tan y\,(1 - \sin^n y \sin ny)$ (B) $\tan y\,(1 - \cos^n y \cos ny)$

(C) $\cot y\,(1 - \sin^n y \sin ny)$ (D) $\cot y\,(1 - \cos^n y \cos ny)$

ઉકેલ : ધારો કે $\cos y = a$

$S = a\sin y + a^2 \sin 2y + a^3 \sin 3y + \ldots n$ પદ

$C = a\cos y + a^2 \cos 2y + a^3 \cos 3y + \ldots n$ પદ

$\therefore C+iS = ae^{iy} + a^2 e^{i2y} + a^3 e^{i3y} + \ldots n$ પદ

$$= \frac{ae^{iy}[1-a^n e^{iny}]}{1-ae^{iy}}$$

$$= \frac{ae^{iy}[1-a^n e^{iny}][1-ae^{-iy}]}{1-a(e^{iy}+e^{-iy})+a^2 e^{iy} e^{-iy}}$$

$$= \frac{(ae^{iy}-a^2)[1-a^n e^{iny}]}{1-a(2cosy)+a^2}$$

$$\therefore C+iS = [cosy\ (cosy + i\ sin\ y) - cos^2y] \cdot \frac{\left[1-cos^n y(cosny+i\,sin\,ny\right]}{1-2cos^2 y+cos^2 y}$$

($a = cos\ y$, તથા $e^{i\theta} = cos\theta + i\ sin\theta$)

$$= \frac{i\,sin\,y\,cos\,y}{sin^2 y}\ [1 - cos^n ycosny - i\ cos^n ysinny]$$

S = કાલ્પનિક ભાગ

$= cot\ y\ (1 - cos^n y\ cosny)$ **જવાબ :** (D)

(18) $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ અને $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$ બંને શરતનું પાલન કરતી બધી સંકર સંખ્યાઓના કાલ્પનિક ભાગનો સરવાળો ...... થાય.

(A) 25 (B) 28 (C) 32 (D) 35

ઉકેલ : સહેલાઈથી જોઈ શકાય છે કે પ્રથમ સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે છે.

બીજુ સમીકરણ એ (4, 0) તથા (8, 0)ને જોડતા રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક દર્શાવે છે.

$\therefore z$ નું સ્વરૂપ $6 + yi$ પ્રકારનું હોય.

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \left|\frac{-6+yi}{6+(y-8)i}\right| = \frac{5}{3}$$

$\therefore 9\ (6^2 + y^2) = 25\ (6^2 + (y - 8)^2)$

$\therefore 16\ y^2 - 400y + 2176 = 0$

$\therefore y^2 - 25y + 136 = 0$

$\therefore y = 8$ અથવા $y = 17$

$\therefore z = 6+8i$ અથવા $6 + 17i$

$\therefore$ માંગેલ સરવાળો = 8+17 = 25 **જવાબ :** (A)

(19) વાસ્તવિક સહગુણકવાળી બહુપદી $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ માટે $f(2i) = f(2+i) = 0$ હોય તો $a + b + c + d = ...$

(A) 1 (B) 4 (C) 9 (D) 10

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે જો $z = a + ib$ કોઈ વાસ્તવિક સહગુણકોવાળા બહુપદીય સમીકરણનું એક બીજ હોય, તો $a - ib$ પણ તે બહુપદીય સમીકરણનું અન્ય બીજ થશે.

$\therefore$ આપેલ બહુપદી સમીકરણ $f(x)$નાં બીજ $2i, -2i, 2 + i, 2 - i$ થશે.

$\therefore f(x) = (x + 2i)\ (x - 2i)\ (x - 2-i)\ (x - 2 + i)$

$f(1) = (1 + 2i)\ (1 - 2i)\ (1 - 2 - i)\ (1 - 2 + i) = 5 \times 2 = 10$

$\therefore 1 + a + b + c + d = 10$

$\therefore a + b + c + d = 9$ **જવાબ :** (C)

(20) જો ω એ 1 નું ઘનમૂળ હોય તો $2(1+\omega)(1+\omega^2) + 3(2\omega+1)(2\omega^2+1) + ... + (n+1)(n\omega+1)(n\omega^2+1)$ $= ......$ $(\omega \neq 1)$

(A) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (B) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}+n$ (C) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}-n$ (D) $\frac{n^2(n+1)}{2}+n$

ઉકેલ : $z = \sum_{r=1}^{n}(r+1)(1+r\omega)(1+r\omega^2)$

$$= \sum_{r=1}^{n}(r+1)\left[1+r(\omega+\omega^2)+r^2\omega^3\right]$$

$$= \sum_{r=1}^{n}(r+1)\left(1-r+r^2\right) \qquad (\omega^3 = 1,\ 1+\omega+\omega^2 = 0)$$

$$= \sum_{r=1}^{n}(r^3+1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + n$$

જવાબ : (B)

(21) જો સંકર સંખ્યા z $(z \neq 2)$એ સમીકરણ $z^2 = 4z + |z|^2 + \frac{16}{|z|^3}$ નું સમાધાન કરે તો $|z|^4$ ની કિંમત ...... થાય.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : ધારો કે $z = re^{i\theta}$. આથી $r = |z|$. આથી $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

આપેલ સમીકરણમાં z તથા $\frac{1}{z}$ ની કિંમત મૂકતાં,

$r^2 e^{2i\theta} = 4re^{i\theta} + r^2 + \frac{16}{r^3}$

વાસ્તવિક ભાગ અને કાલ્પનિક ભાગ સરખાવતાં,

$r^2 \cos 2\theta = 4r \cos\theta + r^2 + \frac{16}{r^3}$ (1)

$r^2 \sin 2\theta = 4r \sin\theta$ (2)

$\therefore 2r^2 \sin\theta \cos\theta - 4r \sin\theta = 0$

$\therefore r \sin\theta = 0$ અથવા $r \cos\theta = 2$

વિકલ્પ 1 : $r \sin\theta = 0$. આથી $\sin\theta = 0$ $(r \neq 0)$

$\therefore \cos\theta = \pm 1$

$\cos\theta = 1$ સમીકરણ (1) માં મૂકતાં,

$r^2(2\cos^2\theta - 1) = 4r\cos\theta + r^2 + \frac{16}{r^3}$

$r^2 = 4r + r^2 + \frac{16}{r^3}$

$\therefore 4r + \frac{16}{r^3} = 0$

$\therefore 4r = \frac{-16}{r^3}$

$\therefore r^4 = -4$ શક્ય નથી.

વિકલ્પ 2 : $\cos\theta = -1$ સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$r^4 = 4$

આથી $|z|^4 = 4$

વિકલ્પ 3 : $r\cos\theta = 2$

સમીકરણ (1) પરથી, $r^5 = -8$ જે શક્ય નથી, કારણ કે $r = |z|$

$\therefore r^4 = 4$

$\therefore |z|^4 = 4$ **જવાબ :** (D)

(22) જો $|u| < 1, |v| < 1$ અને $z = \frac{u-v}{1-uv}$ તો $|z|$ ની ન્યૂનતમ કિંમત ..... થાય.

(A) $\frac{|u|-|v|}{1+|u||v|}$ (B) $\frac{|u|+|v|}{1-|u||v|}$ (C) $\frac{\left||u|-|v|\right|}{1-|u||v|}$ (D) $\frac{|u|+|v|}{1-|u||v|}$

ઉકેલ : $z = \frac{u-v}{1-uv}$

$|u-v| > \left||u|-|v|\right|$ (1)

ધારો કે $u = re^{i\theta}$, $v = \rho e^{i\phi}$;

$\therefore |u| = r, |v| = \rho$ તથા $r, \rho < 1$

$|1-uv|^2 = |1 - r\rho\, e^{i(\theta+\phi)}|^2 = |1 - r\rho\cos(\theta+\phi) - ir\rho\sin(\theta+\phi)|^2$

$= 1 + r^2\rho^2\cos^2(\theta+\phi) + r^2\rho^2\sin^2(\theta+\phi) - 2r\rho\cos(\theta+\phi)$

$\le 1 + r^2\rho^2 + 2r\rho$

$\le (1+r\rho)^2 = (1+|u||v|)^2$ $\quad (\cos(\theta+\phi) \ge -1))$

$\therefore |1-uv| \le (1+|u||v|)$ (2)

(1) અને (2) પરથી

$|z| = \left|\frac{u-v}{1-uv}\right| \ge \frac{\left||u|-|v|\right|}{1-|u||v|}$

નોંધ : $\theta = \phi = 0$ માટે ન્યૂનતમ કિંમત મળે.

બીજી રીત : $|u-v| \ge \left||u|-|v|\right|$

$\therefore |1-uv| = |1+(-uv)| \le |1| + |uv| = 1 + |u||v|$

$\therefore \frac{1}{|1-uv|} \ge \frac{1}{1+|u||v|}$

$\therefore |z| = \left|\frac{u-v}{1-uv}\right| \ge \frac{\left||u|-|v|\right|}{1+|u||v|}$ **જવાબ :** (A)

(23) જો $\frac{z-1}{e^{i\theta}} + \frac{e^{i\theta}}{z-1}$ નો કાલ્પનિક ભાગ શૂન્ય હોય, તથા $\frac{z-1}{e^{i\theta}}$ વાસ્તવિક ન હોય તો z એ

(A) રેખા પર હોય. (B) પરવલય પર હોય. (C) વર્તુળ પર હોય. (D) ઉપવલય પર હોય.

ઉકેલ : આપેલ છે કે $u + \frac{1}{u}$ નો કાલ્પનિક ભાગ શૂન્ય છે, જ્યાં $u = \frac{z-1}{e^{i\theta}}$

હવે, જો સંકર સંખ્યા z નો કાલ્પનિક ભાગ શૂન્ય હોય, તો $z - \bar{z} = 2iy = 0$

$$\therefore \left(u+\frac{1}{u}\right) - \left(\overline{u+\frac{1}{u}}\right) = 0$$

$$\therefore \left(u+\frac{1}{u}\right) - \left(\bar{u}+\frac{1}{\bar{u}}\right) = 0$$

$$\therefore \left(u-\bar{u}\right) + \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{\bar{u}}\right) = 0$$

$\therefore\ (u-\bar{u}) - \left(\dfrac{u-\bar{u}}{u\bar{u}}\right) = 0$

$\therefore\ (u-\bar{u})\left(1-\dfrac{1}{|u|^2}\right) = 0$ $\qquad (|u|^2 = u\bar{u})$

$\therefore\ |u|^2 = 1$ $\qquad (u \neq \bar{u})$

$\therefore\ \left|\dfrac{z-1}{e^{i\theta}}\right|^2 = 1$

$\therefore\ |z-1|^2 = 1$ $\qquad (|e^{i\theta}| = 1)$

$\therefore\ |z-1| = 1$

$\therefore$ z એ વર્તુળ પર આવેલ બિંદુ છે. **જવાબ :** (C)

(24) સમીકરણ $z^n = (z+1)^n$ નાં બીજ ....

(A) $\frac{1}{2}$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પર આવેલ છે. (B) $2x + 1 = 0$ રેખા પર આવેલ છે.

(C) n બાજુવાળા નિયમિત બહુકોણ પર આવેલ છે. (D) $2n$ બાજુવાળા નિયમિત બહુકોણ પર આવેલ છે.

ઉકેલ : $z^n = (z+1)^n$

$\therefore\ \left(1+\dfrac{1}{z}\right)^n = 1$

$\therefore\ 1+\dfrac{1}{z} = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

$\therefore$ $k = 0$ માટે $\frac{1}{z} = 0$ શક્ય નથી.

$$\therefore z = \dfrac{1}{-1+\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}},\ k = 1, 2, ..., n-1$$

$$= \dfrac{-1+\cos\dfrac{2k\pi}{n}-i\sin\dfrac{2k\pi}{n}}{\left(-1+\cos\dfrac{2k\pi}{n}\right)^2+\sin^2\dfrac{2k\pi}{n}}$$

$$= \dfrac{-\left(1-\cos\dfrac{2k\pi}{n}\right)-i\sin\dfrac{2k\pi}{n}}{2\left(1-\cos\dfrac{2k\pi}{n}\right)} = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{i\sin\dfrac{2k\pi}{n}}{2\left(1-\cos\dfrac{2k\pi}{n}\right)} = \dfrac{-1}{2} - \left(\dfrac{-1}{2}\cot\dfrac{k\pi}{n}\right)$$

$\therefore$ Re $(z) = \frac{-1}{2}$. આથી $x = \frac{-1}{2}$

સમીકરણ $z^n = (z+1)^n$ નાં બીજ રેખા $2x + 1 = 0$ પર આવેલ છે. **જવાબ :** (B)

(25) z_1 અને z_2 એવી સંકર સંખ્યાઓ છે. જ્યાં $\left|\dfrac{z_1-2z_2}{2-z_1\bar{z}_2}\right| = 1$ તથા $|z_2| \neq 1$. બિંદુ z_1 એ (JEE 2015)

(A) 2 ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પર હોય. (B) $\sqrt{2}$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પર હોય.

(C) X-અક્ષને સમાંતર રેખા પર હોય. (D) Y-અક્ષને સમાંતર રેખા પર હોય.

ઉકેલ : આપણે એક પરિણામ સાબિત કરીએ :

જો $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\alpha\overline{\beta}}\right| = 1, |\beta| \neq 1,$ તો $|\alpha| = 1$

$|\alpha - \beta| = |\ 1 - \alpha\overline{\beta}\,|$

$\therefore\ |\alpha - \beta|^2 = |\ 1 - \alpha\overline{\beta}\,|^2$

$\therefore\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\text{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) = 1 + |\alpha|^2\,|\beta|^2 - 2\text{Re}\,(\alpha\overline{\beta})$

$\therefore\ 1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2 + |\alpha|^2\,|\beta|^2 = 0$

$\therefore\ (1 - |\alpha|^2)\ (1 - |\beta|^2) = 0$

પરંતુ $|\beta| \neq 1$. આથી $|\alpha| = 1$

અહીં, $\alpha = \dfrac{z_1}{2}$ અને $\beta = z_2$ લેતાં, $\left|\dfrac{z_1-2z_2}{2-z_1\overline{z_2}}\right| = 1.$ આથી $\dfrac{z_1}{2} = 1,\ |z_1| = 2.$

$\therefore$ z_1 એ 2 ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પર છે. **જવાબ :** (A)

(26) સંકર સંખ્યા $z_1 = x_1 + iy_1$ અને $z_2 = x_2 + iy_2$ માટે જો $x_1 \le x_2$ અને $y_1 \le y_2$ પ્રદેશને આપણે $z_1 \cap z_2$ વડે દર્શાવીએ.

ધારો કે z એ સંકર સંખ્યા છે જ્યાં $1 \cap z$, તો

(A) $\dfrac{1-z}{1+z} \cap -i$ (B) $1 \cap \dfrac{1-z}{1+z}$ (C) $\dfrac{1-z}{1+z} \cap 0$ (D) $\dfrac{1+z}{1-z} \cap 0$

ઉકેલ : ધારો કે $z = x + iy$. $1 \cap z$ હોવાથી $1 \le x$ અને $0 \le y$.

હવે, $\dfrac{1-z}{1+z} = \dfrac{(1-x)-iy}{(1+x)+iy} = \dfrac{[(1-x)-iy][(1+x)-iy]}{(1+x)^2+y^2}$

$$= \frac{1-(x^2+y^2)-2iy}{(1+x)^2+y^2}$$

$x \ge 1$ અને $y \ge 0$ હોવાથી, $\dfrac{1-(x^2+y^2)}{(1+x)^2+y^2} \le 0$ અને $\dfrac{-2y}{(1+x)^2+y^2} \le 0$

$\therefore\ \dfrac{1-z}{1+z} \cap 0$ **જવાબ :** (C)

(27) $|z - i| + |z + i| \le 4$ એ આર્ગન્ડ સમતલમાં કયો પ્રદેશ દર્શાવશે ?

(A) ઉપવલયની અંદરનો ભાગ

(B) વર્તુળની બહારનો ભાગ

(C) ઉપવલય ઉપર તથા તેની અંદરનો ભાગ

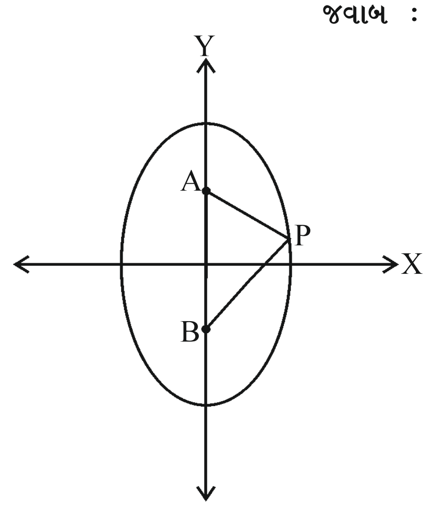
(D) વર્તુળ ઉપર તથા તેની અંદરનો ભાગ

ઉકેલ : ધારો કે A અને B અનુક્રમે $0 + i$ તથા $0 - i$ બિંદુ દર્શાવે છે.

ધારો કે P(z) સમતલનું કોઈ પણ બિંદુ છે.

$|z - i| + |z + i| \le 4 \ \Rightarrow PA + PB \le 4$

આમ, P એ A અને B નાભિવાળા ઉપવલય ઉપર અથવા ઉપવલયની અંદરનું બિંદુ હોઈ શકે.



આકૃતિ 2.4

જવાબ : (C)

(28) જો $(1 + x)^n$ ના દ્વિપદી વિસ્તરણના સહગુણકો $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ હોય, તો નીચે આપેલ વિકલ્પમાંથી કયો વિકલ્પ સત્ય ના બને ?

(A) $c_0 - c_2 + c_4 - c_6 + ... = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$ (B) $c_1 - c_3 + c_5 - ... = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$

(C) $c_1 + c_5 + c_9 + c_{13} + ... = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}\right)$ (D) $c_1 + c_5 + c_9 + c_0 + ... = \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}\right)$

ઉકેલ : $(1 + x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ...$ $(n + 1)$ પદ (1)

(1) માં $x = i$ મૂકતાં,

$(1 + i)^n = c_0 + c_1i - c_2 - c_3i + c_4 + ...$ $(n + 1)$ પદ (2)

સમીકરણ (1)માં $x = -i$ મૂકતાં,

$(1 - i)^n = c_0 - c_1i - c_2 + c_3i + c_4 + ...$ $(n + 1)$ પદ (3)

(2) અને (3)નો સરવાળો કરતાં,

$2 (c_0 - c_2 + c_4 - c_6 + ...) = (1 + i)^n + (1 - i)^n$

$$\therefore c_0 - c_2 + c_4 - c_6 + ... = \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2}$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n + \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n}{2} \right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}}{2} \right)$$

$\therefore c_0 - c_2 + c_4 - c_6 + ... = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$ (A) સત્ય છે. (4)

તે જ રીતે (2) અને (3)ની બાદબાકી કરતાં,

$2i (c_1 - c_3 + c_5 - ...) = (1 + i)^n - (1 - i)^n$

$c_1 - c_3 + c_5.... = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$ (B) સત્ય છે. (5)

આપણે જાણીએ છીએ કે $c_1 + c_3 + c_5 + ... = 2^{n-1}$ (6)

સમીકરણ (5) અને (6)નો સરવાળો કરતાં,

$2 (c_1 + c_5 + c_9 + ...) = 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$ આથી (C) સત્ય છે.

$\therefore c_1 + c_5 + c_9 + ... = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}\right)$ આથી (D) અસત્ય છે. **જવાબ :** (D)

(29) જો $|z^2 - 1| = |z|^2 + 1$, તો z એ ......

(A) ઉપવલય પર હોય. (B) વર્તુળ પર હોય. (C) કાલ્પનિક અક્ષ પર હોય. (D) વાસ્તવિક અક્ષ પર હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $z = x + iy$

$|z^2 - 1| = |z|^2 + 1$

$\therefore |(x + iy)^2 - 1| = x^2 + y^2 + 1$

$\therefore\ \sqrt{(x^2-y^2-1)^2+(2xy)^2} = x^2+y^2+1$

$\therefore\ (x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2 = (x^2+y^2+1)^2$

$\therefore\ -2x^2y^2+2y^2-2x^2+4x^2y^2 = 2x^2y^2+2y^2+2x^2$

$\therefore\ 4x^2 = 0.$ આથી $x = 0$

$\therefore$ z એ કાલ્પનિક અક્ષ પર હોય. **જવાબ :** (C)

(30) જો $x = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$ અને $y = cos\,\phi + i\,sin\,\phi$ તો $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = ...$

(A) $cos\,(m\theta + n\phi)$ (B) $cos\,(m\theta - n\phi)$ (C) $2cos\,(m\theta + n\phi)$ (D) $2cos\,(m\theta - n\phi)$

ઉકેલ : $x = e^{i\theta}$, $y = e^{i\phi}$

$$\therefore\ x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = e^{im\theta}\,e^{in\phi} + e^{-im\theta}\,e^{-in\phi}$$

$$= e^{i(m\theta + n\phi)} + e^{-i(m\theta + n\phi)}$$

$$= cos\,(m\theta + n\phi) + i\,sin\,(m\theta + n\phi) + cos\,(m\theta + n\phi) - i\,sin\,(m\theta + n\phi)$$

$$= 2\,cos\,(m\theta + n\phi)$$

જવાબ : (C)

(31) જો $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$, તો $a_0 + a_3 + a_6 + ... = ...$

(A) 1 (B) 2^n (C) 2^{n-1} (D) 3^{n-1}

ઉકેલ : અહીં, $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$ (1)

સમીકરણ (1)માં $x = 1$ લેતાં,

$(1 + 1 + 1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2n}$ (2)

સમીકરણ (1)માં $x = \omega$ લેતાં,

$(1 + \omega + \omega^2)^n = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + ... + a_{2n}\omega^{2n}$ (3)

સમીકરણ (1)માં $x = w^2$ લેતાં,

$(1 + \omega^2 + \omega^4)^n = a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + ... + a_{2n}\omega^{4n}$ (4)

સમીકરણ (2), (3), (4)નો સરવાળો કરતાં,

$3^n = 3\,(a_0 + a_3 + a_6 + ...)$

$\therefore\ a_0 + a_3 + a_6 + ... = 3^{n-1}$ $(1 + \omega + \omega^2 = 0), (\omega^3 = 1)$ **જવાબ :** (D)

(32) સમીકરણ $az^2 + z + 1 = 0$ નાં બીજ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે, જ્યાં $a = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$. નીચેનામાંથી કયું વિધાન $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3\,(1 + cos\,\theta)\,x + 5$ માટે સત્ય છે ?

(A) $f(x) = 0$ ને ત્રણ વાસ્તવિક બીજ મળે.

(B) $f(x) = 0$ ને એક ધન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(C) $f(x) = 0$ ને એક ઋણ વાસ્તવિક બીજ મળે.

(D) $f(x) = 0$ ને ત્રણ બીજ મળે છે પણ બધા જ ભિન્ન ન હોય.

ઉકેલ : $az^2 + z + 1 = 0$ જ્યાં, $a = cos\theta + i\,sin\,\theta$

ધારો કે શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા z_1 અને z_2 એ આ સમીકરણનાં બીજ છે.

$\therefore\ z_1 = -\,\overline{z_1}$ અને $z_2 = -\,\overline{z_2}$

બંને બીજનો સરવાળો $z_1 + z_2 = -\frac{1}{a}$ (1)

$\therefore \overline{z_1} + \overline{z_2} = \frac{1}{a}$

$\therefore \overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{1}{\bar{a}}$

$\therefore -\frac{1}{a} = \frac{1}{\bar{a}}$ આથી $\frac{1}{a} + \frac{1}{\bar{a}} = 0$

$\therefore \cos\theta = 0$ $(a = \cos\theta + i \sin\theta)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

હવે $f(x) = 0$

$\therefore x^3 - 3x^2 + 3\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right) x + 5 = 0$

$\therefore x^3 - 3x^2 + 3x + 5 = 0$

$\therefore (x-1)^3 + 6 = 0.$ આથી $x = 1 + (-6)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore f(x) = 0$ ને એક ઋણ વાસ્તવિક બીજ મળે. **જવાબ :** (C)

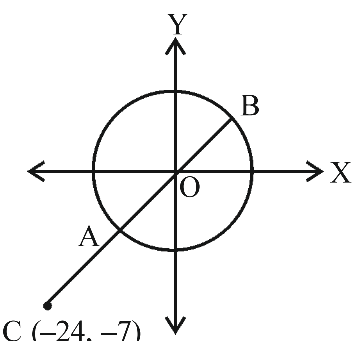
(33) જો $z_1 = 24 + 7i$ અને $|z_2| = 6$ તો $|z_1 + z_2|$ નું મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય અનુક્રમે ...... થાય.

(A) 31, 19 (B) 25, 19 (C) 31, 25 (D) 24, 7

ઉકેલ : $|z_2| = 6$ એ વર્તુળ દર્શાવે છે.

$|z_1 + z_2| = |z_2 - (-24 - 7i)|$ એ આપેલ વર્તુળ પરના કોઈ બિંદુ તથા (–24, – 7) વચ્ચેનું અંતર દર્શાવે છે.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે BC મહત્તમ અંતર તથા AC એ ન્યૂનતમ અંતર થશે.



આકૃતિ 2.5

$OC = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$

OA = 6, OB = 6

AC = OC – OA = 25 – 6 = 19

BC = OC + OB = 25 + 6 = 31

જવાબ : (A)

બીજી રીત : $|z_2| = 6 \Rightarrow z_2 = 6e^{i\theta}$ જ્યાં $\theta \in R$

$|z_1 + z_2|^2 = |24 + 7i + 6\cos\theta + i\, 6\sin\theta|^2$

$= (24 + 6\cos\theta)^2 + (7 + 6\sin\theta)^2$

$= 576 + 36\cos^2\theta + 288\cos\theta + 49 + 36\sin^2\theta + 84\sin\theta$

$= 661 + 12(24\cos\theta + 7\sin\theta)$

$= 661 + 12(25)\sin(\theta + \alpha)$ (જ્યાં $7 = 25\cos\alpha$, $24 = 25\sin\alpha$)

$|z_1 + z_2|^2 = 661 + 300\sin(\theta + \alpha)$

$\therefore |z_1 + z_2|^2$ નું મહત્તમ મૂલ્ય 961 તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય 361 થાય.

$\therefore |z_1 + z_2|$ નું મહત્તમ મૂલ્ય 31 તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય 19 થાય. **જવાબ :** (A)

(34) સંકર સંખ્યા a માટે $|a| = 1$ છે. જો $az^2 + z + 1 = 0$ ને એક શુદ્ધ કાલ્પનિક બીજ હોય, તો a તથા argની કિંમત ....

(A) $a = \cos\theta + \sin\theta,\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ (B) $a = \sin\theta + i\cos\theta,\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

(C) $a = \cos\theta + i\sin\theta,\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ (D) $a = \sin\theta + i\cos\theta,\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$

ઉકેલ : $az^2 + z + 1 = 0$

ધારો કે z_1 એ આ સમીકરણનું શુદ્ધ કાલ્પનિક બીજ છે.

$\therefore\ az_1^2 + z_1 + 1 = 0$ (1)

$\therefore\ \overline{a}\left(\overline{z_1}\right)^2 + \overline{z_1} + 1 = 0$

$\therefore\ \overline{a}z_1^2 - z_1 + 1 = 0$ $(\overline{z_1} = -z_1)$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2)માંથી (z_1)નો લોપ કરતાં,

$$\therefore\ \frac{z_1^2}{2} = \frac{-z_1}{a-\overline{a}} = \frac{1}{-(a+\overline{a})}$$

$$\therefore\ z_1^2 = \left(\frac{a-\overline{a}}{a+\overline{a}}\right)^2 = \frac{-2}{a+\overline{a}}$$

$$\therefore\ \left(\overline{a}-a\right)^2 + 2\left(a+\overline{a}\right) = 0$$

ધારો કે $a = \cos\theta + i\sin\theta$ $(|a| = 1)$

$\therefore\ (-2i\sin\theta)^2 + 2(2\cos\theta) = 0$

$\therefore\ -4(1-\cos^2\theta) + 4\cos\theta = 0$

$\therefore\ \cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\cos\theta$ ની કિંમત $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ન હોઈ શકે.

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

જવાબ : (A)

(35) જો $\cos(1-i) = a + ib$ જ્યાં $a, b \in R$ તો $a = ...$ $b = ...$

(A) $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\cos 1,\ \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)\sin 1$

(B) $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)\cos 1,\ \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\sin 1$

(C) $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)\cos 1,\ \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)\sin 1$

(D) $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\cos 1,\ \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\sin 1$

ઉકેલ : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$$\therefore\ \cos(1-i) = \frac{e^{i(1-i)}+e^{-i(1-i)}}{2}$$

$$= \frac{e^{1+i}+e^{-1-i}}{2}$$

$$= \frac{e.e^{i}+\frac{e^{-i}}{e}}{2} = \frac{1}{2e}\left[e^2(\cos 1 + i\sin 1) + \cos 1 - i\sin 1\right]$$

$$\therefore\ \cos(1-i) = \frac{1}{2e}\left(e^2\cos 1 + \cos 1 + i\,e^2\sin 1 - i\sin 1\right)$$

$\therefore\ a = \frac{1}{2e}\ (e^2 \cos 1 + \cos 1),\ b = \frac{1}{2e}\ (e^2 \sin 1 - \sin 1)$

$a = \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right) \cos 1, \qquad b = \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\sin 1$ **જવાબ** : (B)

(36) જો $z_1, z_2, z_3 \in C,\ \Sigma z_1 \text{ Im } (\overline{z_2}\ z_3) = ...$

(A) $z_1 + z_2 + z_3$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2i}\ (z_1 + z_2 + z_3)$ (D) $z_1 z_2 z_3$

ઉકેલ : ધારો કે $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$; $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$; $z_3 = r_3\, e^{i\theta_3}$

$\text{Im}\ (\overline{z_2}\ z_3) = \text{Im}\left(r_2 r_3 e^{i\,(\theta_3-\theta_2)}\right) = r_2\, r_3 \sin (\theta_3 - \theta_2)$

$\therefore\ z_1 \text{ Im } (\overline{z_2}\, z_3) = r_1\, r_2 r_3\ e^{i\theta_1} \sin (\theta_3 - \theta_2)$

$\therefore\ \Sigma\, z_1 \text{ Im } (\overline{z_2}\, z_3) = r_1\, r_2 r_3\ \{e^{i\theta_1} \sin (\theta_3 - \theta_2) + e^{i\theta_2} \sin (\theta_1 - \theta_3) + e^{i\theta_3} \sin (\theta_2 - \theta_1)\}$

હવે, $\sin (\alpha - \beta)$ના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં તથા $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ પરથી,

$\Sigma z_1 \text{ Im } (\overline{z_2}\ z_3) = 0$ **જવાબ** : (B)

(37) $e^{i\,(2k \cot^{-1} m)} \left(\frac{mi+1}{mi-1}\right)^k = ...$ જ્યાં $k \in Z,\ m > 0$

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) 2

ઉકેલ : $e^{i\,(2k \cot^{-1} m)} \left(\frac{mi+1}{mi-1}\right)^k$

$= [\cos (2k \cot^{-1} m) + i \sin (2k \cot^{-1} m)] \left(\frac{mi+1}{mi-1}\right)^k$

$= e^{i\,2k\theta} \left[\frac{(mi+1)^2}{m^2+1}\right]^k$ જ્યાં $\cot^{-1} m = \theta$

$= e^{i\,2k\theta} \left[\frac{m-i}{\sqrt{m^2+1}}\right]^{2k} = e^{i\,2k\theta}\ [\cos\theta - i \sin\theta]^{2k} = e^{i\,2k\theta}\ e^{-i\,2k\theta} = 1$ **જવાબ** : (B)

(38) જો $(1 + ir)^3 = s\,(1 + i)$ જ્યાં $r, s \in R$ તો r ની શક્ય કિંમતોનો સરવાળો ...... થાય.

(A) 1 (B) –3 (C) 3 (D) 0

ઉકેલ : જો $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$ અને $\sin\theta = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$ લઈએ તો,

આપેલ સમીકરણ પરથી $\left[\sqrt{1+r^2}\,(\cos\theta + i \sin\theta)\right]^3 = s\,(1 + i)$

$\therefore\ \left(\sqrt{1+r^2}\right)^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = s\,(1 + i)$

$\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}} \cos 3\theta = s,\ \left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}} \sin 3\theta = s$

$\therefore\ \cos 3\theta = \sin 3\theta$

$\therefore\ 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$\therefore\ \frac{4}{\left(\sqrt{1+r^2}\right)^3} - \frac{3}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{3r}{\sqrt{1+r^2}} - \frac{4r^3}{\left(\sqrt{1+r^2}\right)^3}$$

$\therefore\ 4 - 3(1+r^2) = 3r(1+r^2) - 4r^3$

$\therefore\ r^3 - 3r^2 - 3r + 1 = 0$

$\therefore$ r ની શક્ય કિંમતનો સરવાળો = ઉપરના સમીકરણનાં બીજનો સરવાળો $= 3$ **જવાબ : (C)**

(39) જો સમીકરણ $8x^2 - 10x + 3 = 0$ નાં બીજ α અને β^2 (જ્યાં, $\beta^2 > \frac{1}{2}$) હોય, તો જેનાં બીજ $(\alpha + i\beta)^{100}$ અને $(\alpha - i\beta)^{100}$ હોય તેવું સમીકરણ ......

(A) $x^2 - x + 1 = 0$ (B) $x^2 + x + 1 = 0$ (C) $x^2 - x - 1 = 0$ (D) $x^2 + x - 1 = 0$

ઉકેલ : $8x^2 - 10x + 3 = 0$

$\therefore\ (4x-3)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = \frac{3}{4}$ અથવા $x = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{1}{2}$ અને $\beta = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$ $\left(\beta^2 > \frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ \alpha + i\beta = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ અથવા $\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{-i}{3}}$

$$\therefore \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{100} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = e^{\frac{i100\pi}{3}} + e^{\frac{-i100\pi}{3}} = 2\cos\frac{100\pi}{3} = 2\left(\frac{-1}{2}\right) = -1$$

$$\text{વળી, } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{100}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = e^{\frac{i100\pi}{3}} \cdot e^{\frac{-i100\pi}{3}} = 1$$

માંગેલ સમીકરણ $x^2 + x + 1 = 0$ **જવાબ : (B)**

(40) w ($I_m(w) \neq 0$) એ સંકર સંખ્યા છે. સમીકરણ $w - \overline{w}z = k(1-z)$, $k \in R$ ના બિંદુગણનું સ્વરૂપ ...... થશે.

(A) $\{z \mid |z| = 1\}$ (B) $\{z \mid z = \overline{z}\}$ (C) $\{z \mid z \neq 1\}$ (D) $\{z \mid |z| = 1, z \neq 1\}$

ઉકેલ : ધારો કે $w = a + ib$, $b \neq 0$ તથા $z = x + iy$,

$w - \overline{w}z = k(1-z)$

$\therefore\ a + ib - (a - ib)(x + iy) = k(1 - x - iy)$

$\therefore\ a + ib - (ax + ayi - bxi + by) = k(1-x) - iky$

$\therefore\ (a - ax - by) + i(b - ay + bx) = k(1-x) - kyi$

વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગને સરખાવતાં,

$k = \dfrac{a - ax - by}{1 - x}$, $\qquad k = \dfrac{ay - bx - b}{y}$

$\therefore\ ay - axy - by^2 = ay - bx - b - ayx + bx^2 + bx$

$\therefore\ - by^2 = bx^2 - b \quad (b \neq 0)$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 1$ આ પણ શક્ય છે.

આથી $|z| = 1,\ z \neq 1$ પરંતુ $z = 1$ તો $b = 0$ **જવાબ : (D)**

(41) જો $(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)\ (cos2\theta + i\ sin2\theta)\ ...\ (cos\ n\ \theta + i\ sin\ n\ \theta) = 1$ તો $\theta =$ ......

(A) $\dfrac{2k\pi}{n(n+1)},\ k \in Z$ (B) $\dfrac{k\pi}{n(n+1)},\ k \in Z$ (C) $\dfrac{4k\pi}{n(n+1)},\ n \in Z$ (D) $\dfrac{k\pi}{2n(n+1)},\ k \in Z$

ઉકેલ : $(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)\ (cos2\theta + i\ sin2\theta)\ ...\ (cos\ n\ \theta + i\ sin\ n\ \theta) = 1$

$\therefore\ (cos\ (\theta + 2\theta + ...\ n\theta) + i\ sin\ (\theta + 2\theta + ... + n\theta) = 1$

$\therefore\ cos\ \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\theta\right\} + i\ sin\ \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\theta\right\} = 1$

$\therefore\ \frac{1}{2}n(n+1)\theta = 2k\pi,\ k \in Z$

$\therefore\ \theta = \dfrac{4k\pi}{n(n+1)},\ k \in Z$ **જવાબ : (C)**

(42) જો α, β એ $u^2 - 2u + 2 = 0$ નાં બીજ હોય તથા $cot\theta = x + 1$ હોય, તો $\dfrac{(x+\alpha)^n - (x+\beta)^n}{\alpha - \beta} =$ ......

(A) $\dfrac{cos\,n\theta}{cos^n\,\theta}$ (B) $\dfrac{sin\,n\theta}{n\ sin\theta}$ (C) $\dfrac{sin\,n\theta}{cos^n\,\theta}$ (D) $\dfrac{sin\,n\theta}{sin^n\,\theta}$

ઉકેલ : $u^2 - 2u + 2 = 0.$ આથી $u = 1 \pm i,$ ધારો કે $\alpha = 1 + i,\ \beta = 1 - i$

$$\frac{(x+\alpha)^n - (x+\beta)^n}{\alpha - \beta} = \frac{[cot\theta - 1 + 1 + i]^n - [cot\theta - 1 + 1 - i]^n}{2i}$$

$$= \frac{(cos\theta + i\,sin\theta)^n - (cos\theta - i\,sin\theta)^n}{sin^n\theta \cdot 2i}$$

$$= \frac{2i\ sin\,n\theta}{2i\ sin^n\theta} = \frac{sin\,n\theta}{sin^n\theta}$$

જવાબ : (D)

(43) a, b, c, a_1, b_1, c_1 એ શૂન્યેતર સંકર સંખ્યાઓ છે, જ્યાં $\dfrac{a}{a_1} + \dfrac{b}{b_1} + \dfrac{c}{c_1} = 1 + i$ અને $\dfrac{a_1}{a} + \dfrac{b_1}{b} + \dfrac{c_1}{c} = 0,$

તો $\dfrac{a^2}{a_1^2} + \dfrac{b^2}{b_1^2} + \dfrac{c^2}{c_1^2} =$ ......

(A) $2i$ (B) $2 + 2i$ (C) 2 (D) $1 + 2i$

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{a}{a_1} = x$; $\frac{b}{b_1} = y$; $\frac{c}{c_1} = z$ છે.

આપેલ સમીકરણ $x + y + z = 1 + i$ અને $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

$\therefore (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $(xy + yz + zx = 0)$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = (1 + i)^2 = 2i$ જવાબ : (A)

(44) Re $(z)^2 = 0$ અને $|z| = a\sqrt{2}$ $(a > 0)$ સમીકરણને કેટલા ઉકેલ મળે ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : ધારો કે $z = re^{i\theta}$

$|z| = r = a\sqrt{2}$ અને $z^2 = 2a^2e^{2i\theta}$

હવે, Re $(z)^2 = 2a^2 \cos 2\theta = 0$

$\therefore \quad 2\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}; n \in Z$

$\therefore \quad \theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}; n \in Z$

$\theta = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}$

$\therefore z = \sqrt{2}\,ae^{\frac{i\pi}{4}}, \ \sqrt{2}\,ae^{-\frac{i\pi}{4}}, \ \sqrt{2}\,ae^{\frac{i3\pi}{4}}, \ \sqrt{2}\,ae^{\frac{-i3\pi}{4}}$

એમ ચાર ઉકેલ શક્ય બને. જવાબ : (D)

(45) વર્તુળ $|z| = 2$ માં અંતર્ગત સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ z_1, z_2, z_3 છે. જો $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$ તો z_2, z_3 અનુક્રમે ...... થાય.

(A) $-2, 1 - \sqrt{3}\,i$ (B) $-1 + \sqrt{3}\,i, -2$ (C) $-2, -1 + \sqrt{3}\,i$ (D) $-2, 2 + \sqrt{3}\,i$

ઉકેલ : $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

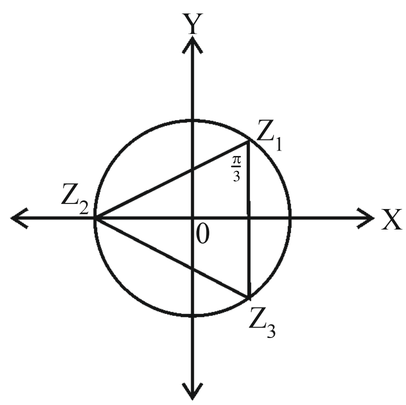
$m\angle z_1 O z_2 = \frac{2\pi}{3}$ અને $m\angle z_2 O z_3 = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore z_2 = z_1 e^{\frac{2\pi i}{3}}, \ z_3 = z_2 e^{\frac{2\pi i}{3}}$

આથી $z_2 = 2e^{i\pi} = -2$ અને $z_3 = -2e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$\therefore \ z_3 = -2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$= -2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$



આકૃતિ 2.6

જવાબ : (A)

46) જો $|z| = 1$ અને $w = \frac{z-1}{z+1}$ $(z \neq -1)$ તો Re (w) = ... (IIT 2003)

(A) 0 (B) $\frac{1}{|z+1|^2}$ (C) $\left|\frac{1}{z+1}\right| \frac{1}{|z+1|^2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{|z+1|^2}$

ઉકેલ : $w = \frac{z-1}{z+1}$ $(z \neq -1)$

$\therefore wz + w = z - 1$

$\therefore w + 1 = z(1 - w)$

$\therefore z = \frac{w+1}{1-w}$

$\therefore |z| = \left|\frac{w+1}{1-w}\right|$

બીજી રીત :

$|w - 1| = |w + 1|$

ધારો કે $w = u + iv$

$\therefore |u + iv - 1| = |u + iv + 1|$

$\therefore (u - 1)^2 + v^2 = (u + 1)^2 + v^2$

$\therefore u = 0$

$\therefore \text{Re}(w) = 0$

$\therefore \left|\frac{w+1}{1-w}\right| = 1 \qquad (|z| = 1)$

$\therefore |w + 1| = |w - 1|$

$\therefore w$ એ (1, 0) તથા (–1, 0)થી સમાન અંતરે આવેલ છે.

$\therefore w$ એ (1, 0) તથા (–1, 0)ના લંબદ્વિભાજક પર આવેલ છે.

$\therefore w$ એ કાલ્પનિક અક્ષ પર આવેલ બિંદુ છે.

$\therefore \text{Re}(w) = 0$ **જવાબ :** (A)

(47) જો શૂન્યેતર સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2 માટે $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 1$ તો O(0), P(z_1) તથા Q(z_2) એ

(A) રેખા પરનાં બિંદુઓ છે.
(B) કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.
(C) સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવે.
(D) એકમ વર્તુળ પર આવેલ છે.

ઉકેલ : ધારો કે $z = \frac{z_1}{z_2}$

$\therefore z + \frac{1}{z} = 1.$ આથી $z^2 - z + 1 = 0$

$\therefore z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$ આથી $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \frac{OP}{OQ} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right| = 1$

$\therefore OP = OQ$

વળી, $\frac{PQ}{OQ} = \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2|} = \left|1 - \frac{z_1}{z_2}\right| = \left|1 - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right| = \left|\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$

$\therefore PQ = OQ$

$\therefore OP = OQ = PQ$

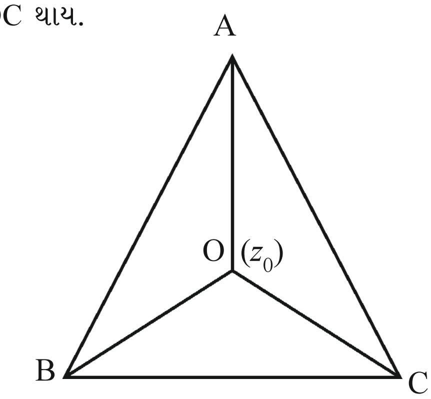
$\therefore \Delta$ OPQ સમબાજુ ત્રિકોણ થશે **જવાબ :** (C)

(48) જો z_1, z_2 અને z_3 એ ઘડિયાળની વિરુદ્ધ દિશામાં દર્શાવેલ ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ છે. જો z_0 એ ΔABCનું પરિકેન્દ્ર હોય, તો $\left(\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2}\right) \frac{\sin 2A}{\sin 2B} + \left(\frac{z_0 - z_3}{z_0 - z_2}\right) \frac{\sin 2C}{\sin 2B} = ...$

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) 2

ઉકેલ : ધારો કે O (z_0) એ ΔABC નું પરિકેન્દ્ર હોવાથી OA = OB = OC થાય.

$m\angle AOB = 2C$, $m\angle BOC = 2A$ તથા $m\angle AOC = 2B$.



આકૃતિ 2.7

$$\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} = cos\ 2C - i\ sin\ 2C$$

તથા $\dfrac{z_0 - z_3}{z_0 - z_2} = cos\ 2A + i\ sin\ 2A$

હવે, $\left(\dfrac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2}\right) \dfrac{sin 2A}{sin 2B} + \left(\dfrac{z_0 - z_3}{z_0 - z_2}\right) \dfrac{sin 2C}{sin 2B}$

$$= \frac{sin 2A\, cos 2C - i\, sin 2A\, sin 2C + cos 2A\, sin 2C + i\, sin 2A\, sin 2C}{sin 2B}$$

$$= \frac{sin(2A + 2C)}{sin 2B} = -1$$ (A + B + C = π) **જવાબ :** (C)

(49) જો $e^{\log 2 \frac{|z|^2 - |z| + 4}{|z|^2 + 1}} = \log_{\sqrt{2}}(16)$ તો $|z|$ = ...

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : ધારો કે $|z| = r$

$$e^{\log 2 \frac{|z|^2 - |z| + 4}{|z|^2 + 1}} = \log_{\sqrt{2}} 16$$

$$\therefore\ 2^{\frac{r^2 - r + 4}{r^2 + 1}} = 8 \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 8 = 2^3$$

$$\therefore\ \frac{r^2 - r + 4}{r^2 + 1} = 3$$

$\therefore\ r^2 - r + 4 = 3(r^2 + 1)$

$\therefore\ 2r^2 + r - 1 = 0$

$\therefore\ (2r - 1)(r + 1) = 0$

$\therefore\ r = \frac{1}{2}$ અથવા $r = -1$ પરંતુ $r > 0$

$\therefore\ r = |z| = \frac{1}{2}$ **જવાબ :** (D)

(50) ધારો કે $z = x + iy$ જ્યાં $x, y \in Z$, સમીકરણ $z\bar{z}^3 + \bar{z}z^3 = 350$ નાં બીજથી રચાતા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ ......

(A) 175 (B) 350 (C) 48 (D) 68

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ $z\bar{z}^3 + \bar{z}z^3 = 350$ એ ચાર ઘાતવાળું છે. આથી તેને ચાર બીજ મળે.

$z\bar{z}^3 + \bar{z}z^3 = 350$

$\therefore\ |z|^2\ \bar{z}^2 + |z|^2 z^2 = 350$ ($z\bar{z} = |z|^2$)

$\therefore\ |z|^2\,(\bar{z}^2 + z^2) = 350$

$\therefore\ (x^2 + y^2)\,[(x - iy)^2 + (x + iy)^2] = 350$

$\therefore\ (x^2 + y^2)\,(2x^2 - 2y)^2 = 350$

$\therefore\ (x^2 + y^2)\,(x^2 - y^2) = 175$

x અને y પૂર્ણાંક સંખ્યા હોવાથી $x^2 + y^2$ અને $x^2 - y^2$ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા થશે.

$175 = 25 \times 7 = (4^2 + 3^2)\,(4^2 - 3^2)$ લખી શકાય.

$\therefore\ x^2 = 16,\ y^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 4,\ y = \pm 3$

$\therefore$ લંબચોરસનાં ચાર શિરોબિંદુ (4, 3), (–4, 3), (4, –3), (–4, –3) થશે.

તેનું ક્ષેત્રફળ $= 8 \times 6 = 48$ થાય. **જવાબ :** (C)

(51) જો $|z| = 1$ અને $arg\,(z) =$ તો $arg\left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right) =$ ......

(A) $-\theta$ (B) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (C) θ (D) $\pi - \theta$

ઉકેલ : $z\bar{z} = |z|^2$

$z\bar{z} = 1$ $(|z| = 1)$

$\therefore\ \bar{z} = \frac{1}{z}$

$arg\left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right) = arg\left(\frac{1+z}{1+\frac{1}{z}}\right) = arg\,(z) = \theta$ **જવાબ :** (C)

(52) જો $|z| = 1$ અને $z \neq \pm 1$ તો કોઈ પણ સંકર સંખ્યા z માટે $\frac{z}{1-z^2}$ એ = ... (IIT : 2007)

(A) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર ન થતી રેખા પર હોય. (B) $|z| = \sqrt{2}$

(C) X-અક્ષ પર હોય. (D) Y-અક્ષ પર હોય.

ઉકેલ : $|z| = 1$

$\frac{z}{1-z^2} = \frac{z}{z\bar{z} - z^2} = \frac{z}{z(\bar{z} - z)} = \frac{1}{\bar{z} - z}$ $(z\bar{z} = |z|^2 = 1)$

$z - \bar{z}$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે.

$\therefore\ \frac{1}{\bar{z} - z}$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે.

$\therefore\ \frac{z}{1-z^2}$ એ Y-અક્ષ પર હોય. **જવાબ :** (D)

(53) $sin\,\alpha + sin\,\beta + sin\,\gamma = 0 = cos\,\alpha + cos\,\beta + cos\,\gamma$ જ્યાં $-\pi < \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$.

જો $sin^n\,\alpha + sin^n\,\beta + sin^n\,\gamma = \frac{3}{2}$ તથા $\Sigma cos\,(\alpha + \beta) = \lambda$ તો $(n, \lambda) =$ ......

(A) (2, 0) (B) (0, 3) (C) (2, 3) (D) (3, 2)

ઉકેલ : $\Sigma cos\,\alpha = 0 = \Sigma sin\,\alpha$, જ્યાં $-\pi < \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$

ધારો કે $A = e^{i\alpha},\ B = e^{i\beta},\ C = e^{i\gamma}$ તો

$A + B + C = 0$ અને $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = 0$

$\therefore A + B + C = 0$ અને $AB + BC + CA = 0$

$\therefore A^2 + B^2 + C^2 = 0$ અને $AB + BC + CA = 0$

$\therefore e^{i2\alpha} + e^{i2\beta} + e^{i2\gamma} = 0$ અને $e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\beta+\gamma)} + e^{i(\gamma+\alpha)} + e = 0$

$\therefore \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$ અને $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) = 0$

(વાસ્તવિક ભાગ સરખાવતાં)

$\therefore 1 - 2\sin^2\alpha + 1 - 2\sin^2\beta + 1 - 2\sin^2\gamma = 0$

$\therefore \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{3}{2}$ તથા $\Sigma\cos(\alpha + \beta) = 0$

$\therefore n = 2, \lambda = 0.$ આથી $(n, \lambda) = (2, 0)$ **જવાબ** : (A)

(54) જો $\alpha = \cos\left(\frac{8\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{11}\right)$, તો $Re(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5) = ...$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) 1

ઉકેલ : $Re(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5)$

$= \cos\left(\frac{8\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{16\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{24\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{32\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{40\pi}{11}\right)$

$= \cos\left(\frac{8\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{16\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{18\pi}{11}\right)$ (1)

$= \cos\left(\frac{14\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{20\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{11}\right)$ (2)

(1) અને (2)નો સરવાળો કરતાં,

$$2\,Re(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5) = \sum_{m=1}^{10} \cos\left(\frac{2m\pi}{11}\right)$$

આપણે જાણીએ છીએ કે $\sum_{m=0}^{10} \cos\left(\frac{2m\pi}{11}\right) = 0$ (1 ના 11માં મૂળના વાસ્તવિક ભાગનો સરવાળો)

$\therefore Re(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5) = \frac{1}{2}(-1) = \frac{-1}{2}$ **જવાબ** : (B)

(55) જો $f(z) = z^4 - 8z^3 + 4z^2 + 4z + 39$ અને $f(3 + 2i) = a + ib$, તો $a : b = ...$

(A) 1 : 8 (B) –1 : 8 (C) 1 : 4 (D) –1: 4

ઉકેલ : ધારો કે $z = 3 + 2i$

$\therefore (z - 3)^2 = 4i^2$ આથી $z^2 - 6z + 13 = 0$ (1)

હવે, $f(z)$ ને $z^2 - 6z + 13$ વડે ભાગતાં,

$\therefore z^4 - 8z^3 + 4z^2 + 4z + 39 = (z^2 - 6z + 13)(z^2 - 2z + 21) - 96z + 312$

$\therefore f(3 + 2i) = 0(z^2 - 2z - 21) - 96(3 + 2i) + 312 = 24 - 192i = a + ib$

$\therefore a = 24, \; b = -192$

$\therefore \frac{a}{b} = -\frac{1}{8}$ **જવાબ** : (B)

(56) જો સંકર સંખ્યા α $(\alpha \neq 1)$એ સમીકરણ $z^{p+q} - z^p - z^q + 1 = 0$, જ્યાં p, q ભિન્ન અવિભાજ્ય સંખ્યા છે, નું બીજ હોય તો

(A) $1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^p = 0$

(B) $1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^q = 0$ અને $1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{q-1} = 0$

(C) $1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{p-1} = 0$ અને $1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{q-1} = 0$

(D) વિકલ્પ (C)ના બંને સમીકરણ એક સાથે ન ઉદ્ભવે.

ઉકેલ : $z^{p+q} - z^p - z^q + 1 = 0$

$\therefore (z^p - 1)(z^q - 1) = 0$

α આપેલ સમીકરણનું બીજ હોવાથી,

$\alpha^p = 1$ અથવા $\alpha^q = 1$

$\therefore \alpha$ એ 1 નું p મૂળ છે અથવા α એ 1 નું q મૂળ છે તથા $(\alpha \neq 1)$

$\therefore 1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{p-1} = 0$ અથવા $1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{q-1} = 0$ (1 નાં બધાં જ n મૂળનો સરવાળો શૂન્ય થાય.)

ધારો કે α એ 1 નું p મૂળ છે અથવા α એ 1 નું q મૂળ પણ છે.

$\therefore \alpha = e^{\frac{2m\pi i}{p}} = e^{\frac{2n\pi i}{q}}$, જ્યાં $1 \leq m < p$, $1 \leq n < q$

$\therefore$ કોઈક ધન પૂર્ણાંક m, n માટે $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$ જે શક્ય નથી. (p, q અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.) **જવાબ :** (D)

(57) જો સંકર સંખ્યા z માટે $|z - 3 - 2i| \leq 2$, તો $|2z - 6 + 5i|$ નું મહત્તમ મૂલ્ય ...... છે. (IIT : 2011)

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14

ઉકેલ : $|2z - 6 + 5i| = 2\left|z - 3 + \frac{5}{2}i\right|$

$$= 2\left|z - 3 - 2i + \frac{9}{2}i\right| \leq 2\left(|z-3-2i| + \frac{9}{2}\right) = 2\left(2 + \frac{9}{2}\right) = 13$$

જો $z = 3 + 4i$ હોય તો $|z - 3 - 2i| = 2$ હોય તથા $|2z - 6 + 5i| = 13$

$\therefore |2z - 6 + 5i|$ નું મહત્તમ મૂલ્ય 13 થશે **જવાબ :** (C)

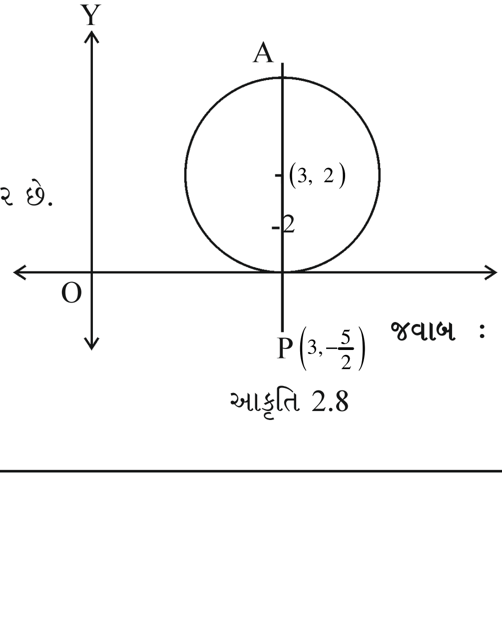
બીજી રીત : $|z - 3 - 2i| \leq 2$ એ (3, 2) કેન્દ્રવાળા તથા 2 ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પરનો તથા વર્તુળની અંદરનો પ્રદેશ દર્શાવે છે.

$|2z - 6 - 5i| = 2\left|z - 3 + \frac{5}{2}i\right|$

$\therefore \left|z - 3 + \frac{5}{2}i\right|$ એ z થી બિંદુ $\left(3, \frac{-5}{2}\right)$ નું અંતર છે.

P મહત્તમ અંતર PA = 2.5 + 4 = 6.5

$\therefore$ માંગેલ મહત્તમ મૂલ્ય = 2(6.5) = 13



જવાબ : (C)

આકૃતિ 2.8

(58) z અને w એ શૂન્યેતર સંકર સંખ્યાઓ છે. જો $|zw| = 1$ અને $arg z - arg w = \frac{\pi}{2}$ તો $\bar{z} w = ...$

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-i$

ઉકેલ : $|zw| = 1$ આથી $|z|\,|w| = 1$ આથી $|w| = \frac{1}{|z|}$ (1)

ધારો કે $z = re^{i\theta}$ આથી $\bar{z} = re^{-i\theta}$

$arg w = arg z - \frac{\pi}{2} = \theta - \frac{\pi}{2}$

$\therefore w = \frac{1}{r} e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$ (1) પરથી

$\therefore \bar{z} w = re^{-i\theta} \cdot \frac{1}{r} e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{-i\pi}{2}} = cos\,\frac{\pi}{2} - i\,sin\,\frac{\pi}{2} = -i$ **જવાબ : (D)**

(59) z અને w એ સંકર સંખ્યાઓ છે. જો $\bar{z} + i\bar{w} = 0$ અને $arg\,(zw) = \pi$ તો $arg z = ...$

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{-\pi}{4}$ (D) $\frac{5\pi}{4}$

ઉકેલ : ધારો કે $z = re^{i\theta}$

$arg\,(zw) = \pi$. આથી $arg\,z + arg\,w = \pi$. આથી $arg\,w = \pi - \theta$

$\therefore w = r_1 e^{i(\pi-\theta)}$ જ્યાં $r_1 = |w|$

હવે, $\bar{z} + i\bar{w} = 0$

$\therefore re^{-i\theta} + ir_1 e^{i(\theta-\pi)} = 0$

$r\,(cos\,\theta - i\,sin\,\theta) + ir_1\,[cos\,(\pi - \theta) - i\,sin\,(\pi - \theta)] = 0$

$\therefore r\,(cos\,\theta - i\,sin\,\theta) + r_1\,[-\,i\,cos\,\theta + sin\,\theta) = 0$

વાસ્તવિક ભાગ તથા કાલ્પનિક ભાગ સરખાવતાં,

$r\,cos\,\theta + r_1\,sin\,\theta = 0,\ -\,r\,sin\,\theta - r_1\,cos\,\theta = 0$

$\therefore \frac{r}{r_1} = -tan\,\theta = \frac{r_1}{r}.$ આથી $r^2 = r_1^{\,2}$ આથી $r = r_1$

$\therefore tan\,\theta = -1.$ આથી $arg z = \frac{-\pi}{4}$ **જવાબ : (C)**

(60) $\sum_{k=1}^{6}\left(sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)+i\,cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)\right) = ...$

(A) -1 (B) 0 (C) $-i$ (D) 1

ઉકેલ : $z = \sum_{k=1}^{6}\left(sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)+i\,cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)\right) = i\sum_{k=1}^{6}\left(cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)-i\,sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)\right)$

ધારો કે $\theta = \frac{2\pi}{7}$

$\therefore\ z = i\sum_{k=1}^{6} e^{-ik\theta}$

$= i\,[e^{-i\theta} + e^{-i2\theta} + \ldots + + e^{-i6\theta}]$

$= ie^{-i\theta}\left(\frac{e^{-i6\theta}-1}{e^{-i\theta}-1}\right) = ie^{-i\theta}\left(\frac{cos\,6\theta - i\,sin\,6\theta - 1}{cos\,\theta - i\,sin\theta - 1}\right) = ie^{-i\theta}\left(\frac{1-cos\,6\theta + i\,sin\,6\theta}{1-cos\,\theta + i\,sin\theta}\right)$

$$= ie^{-i\theta}\ \frac{\sin 3\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\ \left(\frac{\sin 3\theta + i\cos 3\theta}{\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= ie^{-i\theta}\ \frac{\sin 3\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\ \left(\frac{\cos 3\theta - i\sin 3\theta}{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= ie^{-i\theta}\ \frac{\sin 3\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\ e^{-3i\theta}\ e^{\frac{i\theta}{2}} = i\, e^{\frac{-7i\theta}{2}}\ \frac{\sin 3\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= ie^{-i\pi}\ \frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \qquad \left(\theta = \frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= i\,(\cos\pi - i\sin\pi)\ \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}} = -i$$

જવાબ : (C)

(61) જો સંકર સંખ્યા z માટે $arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ તો $|z - 2i|$ ની કિંમત = ...

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{2}$

ઉકેલ : ધારો કે $z = x + iy$ અને $arg\,(z - 2) = \theta_1$ તથા $arg\,(z + 2) = \theta_2$

$$arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = arg\,(z-2) - arg\,(z+2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \tan^{-1}\frac{\frac{y}{x-2} - \frac{y}{x+2}}{1 + \frac{y^2}{x^2-4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \frac{y(x+2) - y(x-2)}{x^2 - 4 + y^2} = 1$$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 4y = 4$

$\therefore\ (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 8$

$\therefore\ |x + i(y - 2)|^2 = 8$

$\therefore\ |z - 2i| = 2\sqrt{2}$

જવાબ : (A)

(62) $$\sum_{p=1}^{32}(3p+2)\left(\sum_{q=1}^{10}\left(\sin\frac{2q\pi}{11} - i\cos\frac{2q\pi}{11}\right)\right)^p = ...$$

(A) 24 (1 + i) (B) 24 (1 – i) (C) 48 (1 + i) (D) 48 (1 – i)

ઉકેલ : $\sin\frac{2q\pi}{11} - i\cos\frac{2q\pi}{11} = -i\left(\cos\frac{2q\pi}{11} + i\sin\frac{2q\pi}{11}\right)$

$$= -i\ e^{\frac{i2q\pi}{11}}$$

$$\therefore \sum_{q=1}^{10}\left(\sin\frac{2q\pi}{11} - i\cos\frac{2q\pi}{11}\right) = -i\sum_{q=1}^{10} e^{\frac{i2q\pi}{11}}$$

$$= -i\left[e^{\frac{i2\pi}{11}} + e^{\frac{i4\pi}{11}} + ... + e^{\frac{i20\pi}{11}}\right] = -i\,(-1) = i$$

$\left(z'' - 1 = 0\right.$ નાં બીજ $\cos\frac{2k\pi}{11} + i\sin\frac{2k\pi}{11}$ (i = 0, 1, 2, 3, ...10) છે.

$$\therefore \sum_{p=1}^{32}(3p+2)\left(\sum_{q=1}^{10}\left(\sin\frac{2q\pi}{11} - i\cos\frac{2q\pi}{11}\right)\right)^p$$

$$= \sum_{p=1}^{32}(3p+2)i^p = 3\sum_{p=1}^{32} pi^p + 2\sum_{p=1}^{32} i^p = 3\ S_1 + 2S_2$$

જ્યાં $S_1 = \sum_{p=1}^{32} pi^p$, $S_2 = \sum_{p=1}^{32} i^p$

$S_1 = i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 32i^{32}$

$i\,S_1 = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + ... + 32i^{33}$

$S_1\,(1 - i) = i + i^2 + i^3 + ... + i^{32} - 32\ i^{33} = 8(i + i^2 + i^3 + i^4\,) - 32\ i\ .\ i^{32}$

$S_1 = \frac{-32i}{1-i} = 16\,(1 - i)$ $\quad [(1 - i)^2 = -2i]$

$S_2 = 0$ $\quad (i + i^2 + ... + i^{32} = 0,\ i^{33} = i)$

$\therefore$ માંગેલ કિંમત = $3 \times 16\,(1 - i) + 0 = 48\,(1 - i)$ **જવાબ : (D)**

એક કરતાં વધુ સાચા જવાબવાળા પ્રશ્નો

(63) જો z_1, z_2 બે શૂન્યેતર સંકર સંખ્યાઓ હોય છે, જ્યાં $|2z_1 - 3z_2|^2 = |2z_1|^2 + |3z_2|^2$, તો

(A) $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0$ (B) $\frac{z_2}{z_1}$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે.

(C) $\frac{z_2}{z_1}$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય. (D) $arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $|2z_1 - 3z_2|^2 = |2z_1|^2 + |3z_2|^2$

$\therefore (2z_1 - 3z_2)\,(2\overline{z_1} - 3\overline{z_2}) = |2z_1|^2 + |3z_2|^2$

$\therefore 4z_1\overline{z_1} - 6\overline{z_1}z_2 - 6z_2\overline{z_1} + 9\,z_2\overline{z_2} = 4\,z_1\overline{z_1} + 9\,z_2\overline{z_2}$

$\therefore \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} = 0$

$\therefore\ \overline{z}_1 z_2 = - z_1 \overline{z}_2$

$\therefore\ \frac{z_2}{z_1} = -\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}$

$\therefore\ \frac{z_2}{z_1}$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે.

$\therefore\ arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ **જવાબ :** (A), (B), (D)

(64) જો $z_1, z_2, \ldots z_n$ એ વર્તુળ $|z| = r$ પર આવેલ હોય તથા $\text{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_j}{z_k}\right) = 0$ હોય તો

(A) $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$ (B) $\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| = 0$ (C) $\sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j = 0$ (D) $\sum_{j=1}^{n} z_j = n$

ઉકેલ : $z_1, z_2, \ldots z_n$ એ $|z| = r$ પર આવેલ હોવાથી $z_i = r\,(cos\ \theta_i + i\ sin\ \theta_i)$

હવે $\text{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_j}{z_k}\right) = 0$

$\therefore\ \text{Re}\left[\left(z_1 + z_2 + \ldots + z_n\right)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots. + \frac{1}{z_n}\right)\right] = 0$

$\therefore\ \text{Re}\ [\{(cos\ \theta_1 + \ldots + cos\ \theta_n) + i\ (sin\ \theta_1 + \ldots + sin\ \theta_n)\}$
$\{(cos\ \theta_1 + \ldots + cos\ \theta_n) - i\ (sin\ \theta_1 + \ldots + sin\ \theta_n)\}] = 0$

$\therefore\ (cos\ \theta_1 + \ldots + cos\ \theta_n)^2 + (sin\ \theta_1 + \ldots + sin\ \theta_n)^2 = 0$

$\therefore\ cos\ \theta_1 + \ldots + cos\ \theta_n = 0 = sin\ \theta_1 + \ldots + sin\ \theta_n$ **જવાબ :** (A), (B), (C)

(65) P (x) અને Q (x) એ બહુપદી છે. ધારો કે $x^2 + x + 1$ એ $f(x) = P(x^3) + xQ\,(x^3)$ નો અવયવ છે, તો

(A) $(x-1)$એ P (x)નો અવયવ હોય પરંતુ Q (x)નો અવયવ ન હોય.

(B) $(x-1)$એ Q (x)નો અવયવ હોય પરંતુ P (x)નો અવયવ ન હોય.

(C) $(x-1)$એ P(x) તથા Q(x) બંનેનો અવયવ હોય.

(D) $(x-1)$એ $f(x)$નો અવયવ હોય.

ઉકેલ : $f(x) = P\,(x^3) + xQ\,(x^3)$ (1)

$1 + x + x^2$ ના અવયવ પણ સમીકરણ (1)ની બંને બાજુ અવયવ થશે.

$1 + x + x^2$ નાં બીજ ω, ω^2 છે. જ્યાં $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \ \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$f(\omega) = 0$

$\therefore\ P(\omega^3) + \omega\,Q\,(\omega^3) = 0$

$\therefore$ P(1) + ω Q (1) = 0 (2)

વળી, $f(\omega^2) = 0$

$\therefore$ P(ω^6) + $\omega^2 Q$ (ω^6) = 0

$\therefore$ P(1) + $\omega^2 Q$ (1) = 0 (3)

(2) અને (3) પરથી,

P(1) = 0 અને Q (1) = 0

$\therefore$ $(x - 1)$ એ P(x) અને Q(x)ના અવયવ થશે.

$\therefore$ $f(1)$ = P(1) + Q(1) = 0

$\therefore$ $f(1) = 0$

$\therefore$ $(x-1)$ એ $f(x)$નો અવયવ હોય. **જવાબ :** (C), (D)

જોડકાં જોડવાના પ્રશ્નો

(66) ધારો કે $z_k = cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right) + i\ sin\left(\frac{2k\pi}{10}\right), k = 1, 2, ..., 9$

(P) દરેક z_k માટે z_j એવો મળે કે $z_k z_j = 1$ થાય.	(1) સત્ય છે.
(Q) $k \in \{1, 2, ..., 9\}$ એવો મળે કે $z_1 \cdot z = z_k$ ને સંકર સંખ્યા ગણમાં કોઈ ઉકેલ નથી.	(2) મિથ્યા છે.
(R) $\frac{\|1-z_1\|\|1-z_2\|....\|1-z_9\|}{10}$	(3) 1
(S) $1 - \sum_{k=1}^{9} \cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right)$	(4) 2

(A) (P)→(1), (Q)→(2), (R)→(4), (S)→(3)
(B) (P)→(2), (Q)→(1), (R)→(3), (S)→(4)
(C) (P)→(1), (Q)→(2), (R)→(3), (S)→(4)
(D) (P)→(2), (Q)→(1), (R)→(4), (S)→(3)

ઉકેલ : (P) z_k એ 1 નું 10 મૂળ છે.

$\therefore$ $\overline{z}_k$ એ પણ 1 નું 10 મૂળ થશે.

જો $z_j = \overline{z}_k$ લઈએ તો વિધાન (P) સત્ય થશે. (P)→(1)

(Q) $z_1 \neq 0$. જો આપણે $z = \frac{z_k}{z_1}$ લઈએ તો વિધાન (Q) મિથ્યા થશે. (Q)→(2)

(R) $z^{10} - 1 = (z - 1)(z - z_1) .... (z - z_9)$

$\therefore$ $\frac{z^{10}-1}{z-1} = (z - z_1)(z - z_2) .... (z - z_9) = 1 + z + z^2 + ... + z^9$

$(1 - z_1)(1 - z_2) .... (1 - z_9) = 10$

$\therefore \dfrac{|1-z_1||1-z_2|....|1-z_9|}{10} = 1$ (R)→(3)

(S) માટે હવે જરૂર નથી. પરંતુ આપણે સમજી લઈએ.

$1 + z_1 + z_2 + ... + z_9 = 0$

$\therefore$ Re (1) + Re (z_1) + ... + Re (z_9) = 0

$\therefore$ Re (z_1) + ... + Re (z_9) = –1

$\therefore 1 - \sum_{k=1}^{9} \cos\left(\dfrac{2k\pi}{10}\right) = 2$ **જવાબ** : (C)

નોંધ : જવાબ માટે P $\rightarrow$ (1), (R) $\rightarrow$ (3) પૂરતું છે.

(67)

(P) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા હોય તથા તેનો કાલ્પનિક ભાગ ધન સંખ્યા હોય તેવી n ની ન્યૂનતમ કિંમત	(i) 2
(Q) $\left(\sum_{m=1}^{2n+1} i^{2m}\right)$	(ii) –1
(R) Δ ABC માટે $1 + e^{iA} \cdot e^{iB} \cdot e^{ic} =$	(iii) 3
(S) $z \in C$ અને $arg\ (z) = \theta$ $\left\lvert\dfrac{z}{\lvert z\rvert}-1\right\rvert$ નું મહત્તમ મૂલ્ય	(iv) 0

	(P)	(Q)	(R)	(S)
(A)	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(B)	(ii)	(iii)	(iv)	(i)
(C)	(iii)	(ii)	(iv)	(i)
(D)	(iv)	(iii)	(ii)	(i)

ઉકેલ : (P) $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$\therefore \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n = (-i)^n$ n = 1, 3, 5,... શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા મળે.

n = 3 માટે $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n$ નો શુદ્ધ કાલ્પનિક ભાગ ધન સંખ્યા મળે. આથી (P) $\rightarrow$ (iii)

(અહીં (P) $\rightarrow$ (iii) વાળો એક જ વિકલ્પ (C) હોવાથી જવાબ (C) નક્કી થઈ જાય.)

(Q) $\left(\sum_{m=1}^{2n+1} i^{2m}\right)$

$= \{(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + ... + (-1)^{2n+1}\} = (-1)$ (Q) $\rightarrow$ (ii)

(R) $1 + e^{iA}\ e^{iB}\ e^{iC}$

$= 1 + cos\ (A + B + C) + i\ sin\ (A + B + C)$

$= 1 + cos\ \pi + i\ sin\ \pi = 0$ (R) $\rightarrow$ (iv)

(S) ધારો કે $z = r\ (cos\ \theta + i\ sin\ \theta)$

$\dfrac{z}{|z|} = (cos\ \theta + i\ sin\ \theta)$

$\therefore \left|\frac{z}{|z|}-1\right| = |(cos\ \theta - 1 + i\ sin\ \theta|$

$= |-2sin^2\frac{\theta}{2} + 2\ i\ sin\frac{\theta}{2}\ cos\frac{\theta}{2}|$

$= 2\ |sin\frac{\theta}{2}|$

$\therefore \left|\frac{z}{|z|}-1\right|$નું મહત્તમ મૂલ્ય 2 થાય. (S) $\to$ (i) **જવાબ :** (C)

(68)

(P)	જો $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 2$ તો $\frac{|z|}{tan\frac{\pi}{8}}$ ની કિંમત ન્યૂનતમ ...... હોય તેવી n ની ન્યૂનતમ કિંમત	(i) 0
(Q)	જો $|z| = 1$ અને $z^{2n} + 1 \neq 0$ તો $\frac{z^n}{z^{2n}+1} - \frac{z^{-n}}{(\bar{z})^{2n}+1} = ...$	(ii) 3 (iii) 11
(R)	જો $8iz^3 + 12z^2 - 18z + 27i = 0$ તો $2\ |z| = ...$	(iv) 1
(S)	જો z_1, z_2, z_3, z_4 એ સમીકરણ $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ નાં બીજ હોય તો $\prod_{i=1}^{i=4} (z_i + 2) = ...$	

	(P)	(Q)	(R)	(S)
(A)	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(B)	(ii)	(ii)	(iv)	(iii)
(C)	(iv)	(iii)	(ii)	(i)
(D)	(iv)	(i)	(ii)	(iii)

ઉકેલ : (P) $\left||z|-\frac{1}{|z|}\right| \leq \left|z+\frac{1}{z}\right| = 2$

$\therefore -2 \leq |z| - \frac{1}{|z|} \leq 2$

$\therefore |z|^2 + 2|z| - 1 \geq 0$ અને $|z|^2 \ -2|z| - 1 \leq 0$

$\therefore (|z| + 1)^2 \geq 2, (|z| - 1)^2 \leq 2$ $(-\sqrt{2} \leq |z| - 1 \leq \sqrt{2})$

$|z| \geq \sqrt{2} -1,\ |z| \leq \sqrt{2}+1$

$\therefore |z|$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $\sqrt{2} -1$ થાય.

$\therefore \frac{|z|}{tan\frac{\pi}{8}}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 1$ (P) $\to$ (iv)

(Q) ધારો કે $z = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\frac{z^n}{z^{2n}+1} - \frac{z^{-n}}{(\bar{z})^{2n}+1} = \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1+\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta} - \frac{\cos n\theta - i\sin n\theta}{1+\cos 2n\theta - i\sin 2n\theta}$$

$$= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{2\cos n\theta\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)} - \frac{\cos n\theta - i\sin n\theta}{2\cos n\theta(\cos n\theta - i\sin n\theta)}$$

$$= \frac{1}{2\cos n\theta} - \frac{1}{2\cos n\theta} = 0$$ (Q) → (i)

(R) $8iz^3 + 12z^2 - 18z + 27i = 0$

$\therefore (2iz + 3)(4z^2 + 9i) = 0$

$\therefore z = \frac{3}{2}i,\ z^2 = \frac{-9}{4}i$

$\therefore 2|z| = 3$ (R) → (ii)

(S) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$

$= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$

$z = -2$ લેતાં,

$$\prod_{i=1}^{4}(z_i + 2) = (-2)^4 + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) + 1 = 11$$ (S) → (iii)

જવાબ : (D)

નોંધ : સૌ પ્રથમ R અને S ગણવા સરળ છે. (R) → (ii), (S) → (iii) પરથી જવાબ (D) મળી જાય.

(69)

(P)	ત્રિઘાત સમીકરણ $(z + \alpha\beta)^3 = \alpha^3$, $(\alpha \neq 0)$ નાં બીજથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ	(i) $\lvert\tan\alpha\rvert$
(Q)	વર્તુળ $\left\lvert\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right\rvert = 2$, $\alpha \in C$ ની ત્રિજ્યા	(ii) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\lvert\alpha\rvert^2$
(R)	જો $\arg z = \alpha$ અને $\lvert z-1\rvert = 1$ તો $\left\lvert\frac{z-2}{z}\right\rvert = \ldots\ldots.$	(iii) $\frac{2}{3}\lvert\alpha - \bar{\alpha}\rvert$
(S)	$z^2 + pz + q = 0$ નાં બીજ z_1 તથા z_2 ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં $A(z_1)$, $B(z_2)$ વડે દર્શાવ્યા છે. જો $m\angle AOB = \alpha \neq 0$ તથા OA = OB હોય તો $\frac{p^2}{q} = \ldots\ldots$	(iv) $4\cos^2\frac{\alpha}{2}$

	(P)	(Q)	(R)	(S)
(A)	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(B)	(iv)	(iii)	(ii)	(i)
(C)	(ii)	(iii)	(i)	(iv)
(D)	(ii)	(i)	(iv)	(iii)

ઉકેલ : (P) $(z + \alpha\beta)^3 = \alpha^3 \Rightarrow z + \alpha\beta = \alpha,\ \omega\alpha,\ \omega^2\alpha$ જ્યાં $\omega = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

આથી $z = \alpha - \alpha\beta,\ \omega\alpha - \alpha\beta,\ \omega^2\alpha - \alpha\beta$

ધારો કે $z_1 = \alpha - \alpha\beta$, $z_2 = \omega\alpha - \alpha\beta$, $z_3 = \omega^2\alpha - \alpha\beta$

હવે, $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}\ |\alpha|$

$\therefore$ z_1, z_2, z_3 એ સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

તેનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\sqrt{3}}{4}\ |z_1 - z_2|^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ |\alpha|^2$ (P) $\to$ (ii)

(Q) $|z - \alpha|^2 = 4|z - \overline{\alpha}|^2$

$\therefore$ $(z - \alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = 4(z - \overline{\alpha})(\overline{z} - \alpha)$

$\therefore$ $z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + \alpha\overline{\alpha} = 4(z\overline{z} - \alpha z - \overline{\alpha}\,\overline{z} + \alpha\overline{\alpha})$

$\therefore$ $3z\overline{z} + (\alpha - 4\overline{\alpha})\,\overline{z} + (\overline{\alpha} - 4\alpha)z + 3\alpha\overline{\alpha} = 0$

$\therefore$ $z\overline{z} + \frac{\alpha - 4\overline{\alpha}}{3}\overline{z} + \frac{\overline{\alpha} - 4\alpha}{3}z + \alpha\overline{\alpha} = 0$ (1)

આપણે જાણીએ છીએ કે જેનું કેન્દ્ર a તથા ત્રિજ્યા $\sqrt{|a|^2 - b}$ તેવા વર્તુળનું સામાન્ય સમીકરણ

$z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + b = 0$ ($a \in C$, $b \in$ R) છે.

વર્તુળ (1) ની ત્રિજ્યા

$$\sqrt{\left|\frac{\alpha - 4\overline{\alpha}}{3}\right|^2 - \alpha\overline{\alpha}} = \sqrt{-\frac{4}{9}(\alpha - \overline{\alpha})^2} = \frac{2}{3}\ |\alpha - \overline{\alpha}|$$ (Q) $\to$ (iii)

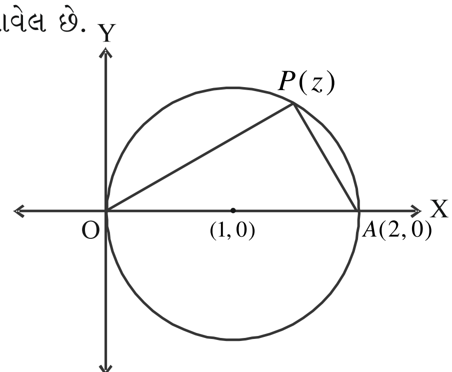
(R) બિંદુ P(z) એ (1, 0) કેન્દ્રવાળા તથા 1 ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પર આવેલ છે.

$m\angle$OPA $= \pm\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\frac{2 - z}{0 - z} = \left|\frac{2 - z}{z}\right| e^{\pm\frac{i\pi}{2}}$

$\therefore$ $\frac{z - 2}{z} = \frac{\text{AP}}{\text{OP}}(\pm i) = \pm i\ tan\ \alpha$

$\therefore$ $\left|\frac{z - 2}{z}\right| = |tan\ \alpha|$



આકૃતિ 2.9

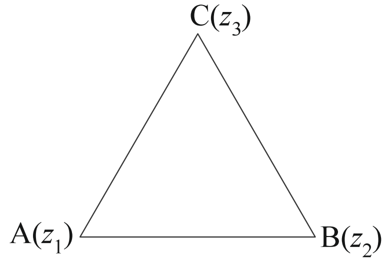
(R) $\to$ (i)

(S) આપણે જાણીએ છીએ કે A (z_1), B (z_2), C (z_3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણમાં જો $m\angle$BAC $= \alpha$ હોય, તો

$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{AC}{AB}(cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha)$

અહીં $z_1 + z_2 = -p$ અને $z_1 z_2 = q$

વળી, $\frac{z_2}{z_1} = \frac{OA}{OB}\ (cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha) = cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha$



આકૃતિ 2.10

$\therefore \dfrac{z_2 - z_1 \cos\alpha}{z_1} = i \sin \alpha.$ આથી $z_2^2 - 2z_1z_2 \cos \alpha + z_1^2 \cos^2 \alpha = -z_1^2 \sin^2 \alpha$

$$\therefore z_1^2 + z_2^2 = 2z_1z_2 \cos \alpha$$

$$\therefore (z_1 + z_2)^2 = 2z_1z_2 (1 + \cos \alpha)$$

$$\therefore \frac{P^2}{q} = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \qquad (S) \rightarrow (iv)$$

નોંધ : R ના વિકલ્પ બધે જ જુદા છે. તે ગણતાં R $\rightarrow$ (i) મળે છે. **જવાબ :** (C)

(70) સંકર સંખ્યા z માટે $4\, arg\,(z - 5i) = 2arg\,(z + 3) = \cos^{-1}(-1)$ તો

(A) $\overline{z} = 2i + 3$

(B) z એ $x + y + 1 = 0$ પર છે.

(C) $|z|$ એ $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ ની ત્રિજ્યા છે.

(D) $z + \overline{z} < 0$

ઉકેલ : $4\, arg\,(z - 5i) = 2arg\,(z + 3) = \cos^{-1}(-1) = \pi$

$\therefore \tan^{-1}\left(\dfrac{y-5}{x}\right) = \dfrac{\pi}{4},\ \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x+3}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $(z = x + iy)$

$\therefore y - 5 = x,\ x + 3 = 0$ પરથી $x = -3, y = 2$

$\therefore z = -3 + 2i$ આથી $\overline{z} = -3 - 2i$

બિંદુ $(-3, 2)$ એ $x + y + 1 = 0$ પર આવેલ છે.

$\therefore$ z એ $x + y + 1 = 0$ પર આવેલ છે. (B)

વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ ની ત્રિજ્યા $\sqrt{1+4+8} = \sqrt{13} = |z|$

$\therefore |z|$ એ વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ની ત્રિજ્યા છે. (C)

વળી, $z + \overline{z} = -6 < 0$ (D)

જવાબ : (B), (C), (D)

(71) જો $f(x) = ax^2 + bx$ જ્યાં $f(1) = 2$, $f(i^2) = 0$ અને $f(z + z^{-1}) = 0$ તો $|z| = ...$

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 1

ઉકેલ : $f(x) = ax^2 + bx$

$f(1) = 2.$ આથી $a + b = 2$ (1)

$f(i^2) = f(-1) = 0.$ આથી $a - b = 0$ (2)

(1) અને (2) પરથી, $a = 1, b = 1$

$\therefore f(x) = x^2 + x$

$f(z + z^{-1}) = 0.$ આથી $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) = 0$

$$\therefore z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0$$

$$\therefore (z^2 + 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\therefore z = \pm i, \omega, \omega^2$$

$\therefore |z| = 1$ **જવાબ :** (D)

(72) નીચેના ડાબી બાજુના સમીકરણને જમણી બાજુ દર્શાવતા વક્ર સાથે જોડો.

(P) $\|z-3\| + \|z-i\| = 1$	(i) વર્તુળ
(Q) $\left\|\frac{2z-3}{z-i}\right\| = 2$	(ii) અતિવલય
(R) $z^2 + \bar{z}^2 = 5$	(iii) રેખા
(S) $\left\|\frac{z-6}{z-2i}\right\| = 3$	(iv) ઉપવલય
	(v) પરવલય

	(P)	(Q)	(R)	(S)
(A)	(iv)	(iii)	(ii)	(i)
(B)	(iv)	(ii)	(i)	(iii)
(C)	(iv)	(ii)	(iii)	(i)
(D)	(i)	(iv)	(ii)	(iii)

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $|z-z_1| + |z-z_2| = \lambda$ એ z_1, z_2 નાભિવાળા તથા પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ λ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ છે. $(\lambda > |z_1 - z_2|)$

$\therefore$ સમીકરણ $|z-3| + |z-i| = 10$ એ ઉપવલય છે. $\lambda = 10 > |z_1 - z_2| = \sqrt{10}$ (P) → (iv)

(Q) $\left|\frac{2z-3}{z-i}\right| = 2.$ આથી $\left|\frac{z-\frac{3}{2}}{z-i}\right| = 1 \Rightarrow \left|z-\frac{3}{2}\right| = |z-i|$

$\therefore$ z એ $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ અને (0, 1) ને જોડતા લંબદ્વિભાજક પર આવેલ છે. (Q) → (iii)

(R) ધારો કે $z = x + iy$

$\therefore$ $z^2 + \bar{z}^2 = 5.$ આથી $(x+iy)^2 + (x-iy)^2 = 5$

આથી $x^2 - y^2 + x^2 - y^2 = 5$

આથી $x^2 - y^2 = \frac{5}{2}$ અતિવલય દર્શાવે છે. (R) → (ii)

(S) $\left|\frac{z-6}{z-2i}\right| = 3$ એ વર્તુળનું સમીકરણ છે. (S) → (i)

નોંધ : (S) → (i), (R) → (ii) ગણવા સરળ છે. તરત જ જવાબ (A) મળે. **જવાબ :** (A)

(73)

(P) વર્તુળ $\|z-2\|^2 + \|z-4i\|^2 = 20$ નું કેન્દ્ર	(i) $1 - i$
(Q) વર્તુળ $\left\|\frac{z-1}{z+1}\right\| = \frac{1}{2}$ નું કેન્દ્ર	(ii) $\frac{5}{3} + 0i$
(R) વર્તુળ $z\overline{z} - (1+i)z - (1+i)\overline{z} + 7 = 0$ નું કેન્દ્ર	(iii) $-4 - i$
(S) વર્તુળ $arg\left(\frac{z+3+4i}{z+5-2i}\right) = \frac{\pi}{2}$ નું કેન્દ્ર	(iv) $1 + 2i$

	(P)	(Q)	(R)	(S)
(A)	(iv)	(iii)	(ii)	(i)
(B)	(iv)	(ii)	(i)	(iii)
(C)	(iv)	(ii)	(iii)	(i)
(D)	(i)	(iv)	(ii)	(iii)

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે જો $k > \frac{1}{2}|z_1 - z_2|^2$ હોય તો z_1 અને z_2 વ્યાસાંત બિંદુવાળા વર્તુળનું સમીકરણ $|z-z_1|^2 + |z-z_2|^2 = k$ હોય.

$\therefore$ $|z-2|^2 + |z-4i|^2 = 20$ વર્તુળનું કેન્દ્ર $\frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$ છે. (P) $\rightarrow$ (iv)

(Q) $4|z-1|^2 = |z+1|^2$

$\therefore$ $4(z\overline{z} - z - \overline{z} + 1) = z\overline{z} + z + \overline{z} + 1$

$\therefore$ $3z\overline{z} - 5z - 5\overline{z} + 3 = 0$

$\therefore$ $z\overline{z} - \frac{5}{3}z - \frac{5}{3}\overline{z} + 1 = 0$

આપણે જાણીએ છીએ કે વર્તુળ $z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} + b = 0$ નું કેન્દ્ર $-a$ છે.

$\therefore$ આપેલ વર્તુળનું $\frac{5}{3} + 0i$ કેન્દ્ર છે. (Q) $\rightarrow$ (ii)

(R) વર્તુળ $z\overline{z} - (1+i)z - (1-i)\overline{z} + 7 = 0$ નું કેન્દ્ર $1 - i$ છે. (R) $\rightarrow$ (i)

(S) આપણે જાણીએ છીએ કે $arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = \frac{\pi}{2}$ એ z_1 તથા z_2 વ્યાસાંત બિંદુવાળા વર્તુળનું સમીકરણ છે.

$\therefore$ આપેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર $\frac{-3-4i+(-5+2i)}{2} = -4 - i$ છે. (S) $\rightarrow$ (iii) **જવાબ :** (B)

નોંધ : (S) $\rightarrow$ (iii) મળે. આ માત્ર વિકલ્પ (B) માં શક્ય છે.

નિષ્કર્ષ-કારક પ્રશ્નો

(74) સંકર સંખ્યા માટે $arg\left(\frac{z-1}{z-2}\right) = \frac{\pi}{4}$

વિધાન 1: z નો બિંદુગણ વર્તુળ છે.

વિધાન 2 : સમતલમાં નિશ્ચિત બિંદુથી નિશ્ચિત અંતરે આપેલ તમામ બિંદુઓનો ગણ એ વર્તુળ રચે છે.

ઉકેલ : $arg\left(\frac{z-1}{z-2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $arg\left(\frac{(x-1)+iy}{(x-2)+iy}\right) = \frac{\pi}{4}$ $(z = x + iy)$

$\therefore$ $tan^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right) - tan^{-1}\left(\frac{y}{x-2}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\left(arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg\, z_1 - arg\, z_2\right)$

$\therefore\ tan^{-1}\left\{\dfrac{\dfrac{y}{x-1}-\dfrac{y}{x-2}}{\dfrac{(x-1)(x-2)+y^2}{(x-1)(y-2)}}\right\} = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ \dfrac{y(x-2)-y(x-1)}{(x-1)(x-2)+y^2} = 1$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 3x + y + 2 = 0$ વર્તુળ દર્શાવે છે.

વિધાન 2 સત્ય છે પરંતુ વિધાન 1 ની પર્યાપ્ત સમજૂતી નથી. **જવાબ :** (B)

(75) જો $|z| = 1$ અને $z \neq \pm 1$, તો $arg\ (z) - arg\ (z + 1) - arg\ (z - 1)$ ની શક્ય કિંમત ...... થાય.

(A) $-\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : $arg\ (z) - arg\ (z + 1) - arg\ (z - 1) = arg\left(\dfrac{z}{z^2-1}\right)$

$= arg\left(\dfrac{z}{z^2 - z\bar{z}}\right)$ $(\because\ |z| = 1,\ z\bar{z} = |z|^2)$

$= arg\left(\dfrac{1}{z-\bar{z}}\right)$

$= arg\left(\dfrac{1}{2iy}\right)$ $(z = x + iy)$

$= arg$ (શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા)

$\therefore$ વિકલ્પ (C) શક્ય છે. **જવાબ :** (C)

(76) સંકર સંખ્યા c માટે $|c| = 1$. જો સમીકરણ $cz^2 + z + 1 = 0$ ને ફક્ત શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા બીજ હોય, તો $tan\ (arg\ c)$ ....

(A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (C) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$ (D) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}}$

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ સમીકરણનું બીજ $z = iy$ છે. ધારો કે $c = cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha$

$\therefore\ cz^2 + z + 1 = 0$

$\therefore\ -(cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha)y^2 + iy + 1 = 0$

$\therefore\ (cos\ \alpha \cdot y^2 - 1) + (sin\ \alpha \cdot y^2 - y)i = 0$

$\therefore\ y^2\ cos\ \alpha = 1,\ \ y\ sin\ \alpha = 1,$ $(y \neq 0)$

$\therefore\ y^2\ cos\ \alpha - y^2\ sin^2\ \alpha = 0 \quad \Rightarrow y^2\ (sin^2\ \alpha - cos\ \alpha) = 0$

$\therefore\ 1 - cos^2\ \alpha - cos\ \alpha = 0$

$\therefore\ cos^2\ \alpha + cos\ \alpha - 1 = 0$

$\therefore\ cos\ \alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\left(\cos\alpha \neq \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$\therefore\ sec^2\ \alpha = \dfrac{4}{6-2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$

$\therefore\ tan^2\ \alpha = \dfrac{2}{3-\sqrt{5}} - 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$

$\therefore\ tan\ \alpha = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \times \dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{5}+2}{4}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$ **જવાબ :** (C), (D)

●