

- વ્યાપક સ્વરૂપ
- બીજના પ્રકારો
- બીજ તથા સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ
- દ્વિઘાત સમીકરણની રચના
- વ્યાપક સ્વરૂપ : બહુપદી $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ દ્વિઘાત બહુપદી છે.
 $f(\alpha) = 0$ હોય તો $x = \alpha$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનું બીજ કહે છે.
- દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ શોધવા માટે
(1) અવયવની રીત (2) પૂર્ણ વર્ગની રીત (3) સૂત્રની રીત ઉપયોગમાં લઈ શકાય.
- સૂત્રની રીતથી બીજ શોધવા માટે, $D = b^2 - 4ac$ વાપરીને $(\alpha, \beta) = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ સૂત્ર વાપરવું.

નોંધ : (1) જો $D = b^2 - 4ac > 0$ હોય તો દ્વિઘાત સમીકરણને બે ભિન્ન અને વાસ્તવિક બીજ હોય.

(2) જો $D = b^2 - 4ac = 0$ હોય તો આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણને બે સમાન વાસ્તવિક બીજ હોય.

(3) જો $D = b^2 - 4ac < 0$ હોય તો આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણને બે ભિન્ન અવાસ્તવિક સંકર બીજ હોય, જે એકબીજાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓ હોય. અહીં $i^2 = -1$ ઉપયોગમાં લેવું.

- વાસ્તવિક બીજના પ્રકાર :

- (1) જો દ્વિઘાત સમીકરણમાં a તથા c સમચિહ્ન હોય તથા b થી વિરુદ્ધ ચિહ્ન ધરાવતાં હોય તો બંને બીજ ધન મળે.
- (2) જો દ્વિઘાત સમીકરણમાં a તથા c વિષમચિહ્ન હોય તો બંને બીજ વિરુદ્ધ ચિહ્ન ધરાવતાં હોય.
- (3) જો $b = 0$ હોય તો બંને બીજ એકબીજાની વિરોધી સંખ્યાઓ હોય.
- (4) જો $c = a$ હોય તો બંને બીજ એકબીજાની વ્યસ્ત સંખ્યાઓ હોય.

- દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ તથા સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ :

જો આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α તથા β હોય તો,

$$\text{બે બીજનો સરવાળો } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}} \text{ તથા}$$

$$\text{બે બીજનો ગુણાકાર } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}} \text{ થી મળે.}$$

- દ્વિઘાત સમીકરણની રચના :

જો કોઈ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ જાણતાં હોઈએ તો $x^2 - (\text{બે બીજનો સરવાળો})x + (\text{બે બીજનો ગુણાકાર}) = 0$ સૂત્ર વાપરી દ્વિઘાત સમીકરણ મેળવવું.

- સામાન્ય બીજ :

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ અને $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ બે ભિન્ન દ્વિઘાત સમીકરણો (જ્યાં $a_1, a_2 \neq 0$) માટે

$$(1) \text{ જો એક બીજ સામાન્ય હોય તો } (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (a_1c_2 - a_2c_1)^2$$

$$(2) \text{ જો બંને બીજ સામાન્ય હોય તો } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

● સીમાંત કિંમત :

- (1) જો $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ તો $x \in (\alpha, \beta)$
- (2) જો $(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0$ તો $x \in [\alpha, \beta]$
- (3) જો $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ તો $x \notin [\alpha, \beta]$ તથા
- (4) જો $(x - \alpha)(x - \beta) \geq 0$ તો $x \notin (\alpha, \beta)$

● દ્વિઘાત બહુપદીનાં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો :

ધારો કે $p(x) = ax^2 + bx + c$; $(a \neq 0)$ આપેલ બહુપદી હોય, તો

(i) જો $a > 0$ તો $p(x)$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $x = \frac{-b}{2a}$ આગળ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ મળે તથા

(ii) જો $a < 0$ તો $p(x)$ નું મહત્તમ મૂલ્ય $x = \frac{-b}{2a}$ આગળ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ મળે.

● ત્રિઘાત બહુપદી :

જો $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $(a \neq 0)$ નાં બીજ α, β, γ હોય, તો

(1) બીજનો સરવાળો : $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$

(2) બે બીજના ગુણાકારનો સરવાળો : $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

(3) બીજનો ગુણાકાર : $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$

- α, β, γ બીજવાળું ત્રિઘાત સમીકરણ

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0 \text{ છે.}$$

બહુ વિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) જો x_1 તથા x_2 એ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 3x + p = 0$ નાં બીજ હોય તથા x_3 અને x_4 એ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 12x + q = 0$ નાં બીજ હોય તથા જો આ ચારેય બીજ વધતી સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો $p = \dots, q = \dots$.

(A) $p = 2; q = 32$ (B) $p = 4; q = 16$ (C) $p = 4; q = 32$ (D) $p = 2; q = 16$

ઉકેલ : અહીં $x_1 + x_2 = 3$ તથા $x_1x_2 = p$ છે. એ જ રીતે, $x_3 + x_4 = 12$ તથા $x_3x_4 = q$ છે.

હવે x_1, x_2, x_3, x_4 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$$\therefore x_2 = x_1r; x_3 = x_1r^2; x_4 = x_1r^3 \text{ - લઈ શકાય.}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = x_1 + x_1r = 3 \quad \text{તથા} \quad x_3 + x_4 = 12$$

$$\therefore x_1(1+r) = 3 \quad \left| \begin{array}{l} x_1r^2 + x_1r^3 = 12 \\ \therefore x_1r^2(1+r) = 12 \\ \therefore r^2(3) = 12 \\ \therefore r^2 = 4 \\ \therefore r = 2 \end{array} \right.$$

($r > 0$)

$$\therefore x_1 = 1 \text{ તથા } x_2 = 2 \text{ મળે. આથી } p = x_1x_2 = 1(2) = 2$$

$$\text{વળી } x_3 = x_1r^2 = 4, x_4 = x_1r^3 = 8$$

$$q = x_3x_4 = 4(8) = 32$$

$$p = 2; q = 32 \text{ મળે.}$$

જવાબ : (A)

(2) સમીકરણ $|x^2 - 5x + 6| = x + 6$ નાં વાસ્તવિક બીજ હોય.

(A) 0, 2

(B) 0, 6

(C) 6, 8

(D) 4, 6

ઉકેલ : $|x^2 - 5x + 6| = x + 6$

$\therefore |(x-3)(x-2)| = x + 6$

વિકલ્પ 1 $x \leq 2 \Rightarrow (x-2) \leq 0$ તથા $(x-3) < 0$

$\therefore |(x-3)(x-2)| = (x-3)(x-2)$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = x + 6$

$\therefore x^2 - 6x = 0$

$\therefore x(x-6) = 0$

$\therefore x = 0$ અથવા $x = 6$. $x \leq 2$ હોવાથી $x = 0$

વિકલ્પ 2 $x \geq 3$ આથી $(x-3) \geq 0$ તથા $(x-2) \geq 1 > 0$

$\therefore (x-3)(x-2) \geq 0$ $|(x-3)(x-2)| = (x-3)(x-2)$ થાય.

$\therefore x = 0$ કે 6 મળે.

$x \geq 3$ હોવાથી $x = 6$.

વિકલ્પ 3 $x > 2$ તથા $x < 3$ એટલે કે, $x \in (2, 3)$

$\therefore (x-2) > 0$ તથા $(x-3) < 0$

$\therefore (x-3)(x-2) < 0$

આથી $|(x-3)(x-2)| = -(x^2 - 5x + 6)$

$\therefore -(x^2 - 5x + 6) = x + 6$

$\therefore -6 + 5x - x^2 = x + 6$

$\therefore x^2 - 4x + 12 = 0$

$\therefore$ વાસ્તવિક x ના મળે.

$\therefore x = 0$ અથવા 6

જવાબ : (B)

(3) સમીકરણ $3x^2 + 2x(k^2+1) + k^2 - 3k + 2 = 0$ નાં બીજ વિરોધી ચિહ્ન ધરાવતાં હોય તો $k \in \dots\dots$

(A) $(-1, 0)$

(B) $(0, 1)$

(C) $(1, 2)$

(D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

ઉકેલ : દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ વિષમ ચિહ્ન હોય, તો બીજનો ગુણાકાર ઋણ મળે. આથી $\frac{c}{a} < 0$

$\therefore \frac{k^2 - 3k + 2}{3} < 0$

$\therefore k^2 - 3k + 2 < 0$

$\therefore (k-2)(k-1) < 0$

$\therefore k \in (1, 2)$

જવાબ : (C)

(4) $e^{\cot x} - e^{-\cot x} = 4$ હોય તો $\cot x = \dots\dots$

(A) $\log_{10}(2+\sqrt{5})$

(B) $\log_{10}(2-\sqrt{5})$

(C) $\log_e(2-\sqrt{5})$

(D) $\log_e(2+\sqrt{5})$

ઉકેલ : $e^{\cot x} - \frac{1}{e^{\cot x}} = 4$

ધારો કે $e^{\cot x} = m$

$$\therefore m - \frac{1}{m} = 4$$

$$\therefore m^2 - 4m - 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

પરંતુ $m = e^{\cot x} > 0$ હોવાથી, $m = 2 + \sqrt{5}$

$$\therefore e^{\cot x} = 2 + \sqrt{5}$$

$$\text{આથી } \cot x = \log_e (2 + \sqrt{5})$$

જવાબ : (D)

(5) દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજાનાં વ્યસ્ત બીજ ધરાવતું દ્વિઘાત સમીકરણ હોઈ શકે. ($a \neq 0, c \neq 0$)

(A) $bx^2 + cx - a = 0$ (B) $cx^2 + ax - b = 0$ (C) $cx^2 + bx + a = 0$ (D) $bx^2 - cx + a = 0$

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α અને β છે. આથી $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ તથા $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

હવે માંગેલ સમીકરણનાં બીજ $\frac{1}{\alpha}$ તથા $\frac{1}{\beta}$ હોવાથી,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-b}{c} \text{ તથા } \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a}{c}$$

$$\therefore \text{ માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ } x^2 - \left(\frac{-b}{c}\right)x + \frac{a}{c} = 0$$

$$\therefore cx^2 + bx + a = 0$$

→ બીજી રીત :

$$x = \frac{1}{y} \text{ લેતાં } \frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c = 0$$

$$\therefore cy^2 + by + a = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α, β હોય તો

$$cx^2 + bx + a = 0 \text{ નાં બીજ } \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \text{ હોય.}$$

જવાબ : (C)

(6) જો સમીકરણ $x^2 - 3kx + 2e^{2\log|k|} - 1 = 0$ નાં વાસ્તવિક બીજ એવાં મળે કે, જેથી બીજનો ગુણાકાર 31 થાય તો $k = \dots\dots$

(A) ± 1

(B) ± 2

(C) ± 3

(D) ± 4

ઉકેલ : $x^2 - 3kx + 2e^{2\log|k|} - 1 = 0$

$$\therefore x^2 - 3kx + 2e^{\log k^2} - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 - 3kx + (2k^2 - 1) = 0$$

$\therefore$ હવે બીજનો ગુણાકાર = 31. આથી $2k^2 - 1 = 31$

$$\therefore k^2 = 16$$

આથી $k = \pm 4$

જવાબ : (D)

- (7) દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - bx + c = 0$ નાં બે બીજ વચ્ચેનો તફાવત 1 હોય તો નીચેનામાંથી સત્ય બને.
- (A) $b^2 = 4c + 1$ (B) $b^2 = 4c - 1$ (C) $c^2 = 4b - 1$ (D) $a^2 = 4c + 1$

ઉકેલ : ધારો કે $x^2 - bx + c = 0$ નાં બીજ α તથા β છે તથા $\beta = \alpha + 1$ છે.

$$\text{બે બીજનો સરવાળો} = \alpha + \beta = \alpha + \alpha + 1 = 2\alpha + 1 = b \quad (1)$$

$$\text{તથા બે બીજનો ગુણાકાર} = c = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha$$

$$\therefore c = \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{2}\right) \quad ((1) \text{ પરથી})$$

$$\begin{aligned} \therefore 4c &= (b-1)^2 + 2(b-1) \\ &= b^2 - 2b + 1 + 2b - 2 \\ 4c &= b^2 - 1 \\ b^2 &= 4c + 1 \end{aligned}$$

→ બીજ રીત :

$$(\alpha - \beta)^2 = 1 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$$

$$\Rightarrow b^2 - 4c = 1 \Rightarrow b^2 = 4c + 1$$

જવાબ : (A)

- (8) સમીકરણ $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = 1$ નાં બે બીજ એકબીજાની વિરોધી સંખ્યાઓ હોય તો $2(a+b) = \dots\dots$

- (A) -1 (B) 2 (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

$$\text{ઉકેલ : } \frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = 1$$

$$\therefore ax - ab + bx - ab = (x-a)(x-b)$$

$$\therefore (a+b)x - 2ab = x^2 - (a+b)x + ab$$

$$\therefore x^2 - 2(a+b)x + 3ab = 0$$

આ સમીકરણનાં બીજ એકબીજાની વિરોધી સંખ્યાઓ છે.

$$\therefore \alpha + \beta = 0. \text{ અર્થાત્ } b = 0$$

$$\therefore a + b = 0$$

$$\therefore 2(a+b) = 0$$

જવાબ : (C)

- (9) જો $\sin \alpha$ તથા $\cos \alpha$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ હોય, તો નીચેનામાંથી સત્ય બને.

- (A) $a^2 = b^2 - 2ac$ (B) $a^2 = b^2 - 4ac$ (C) $b^2 = c^2 - 4ab$ (D) $c^2 = a^2 - 4bc$

ઉકેલ : અહીં બે બીજનો સરવાળો, $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{-b}{a}$ તથા બે બીજનો ગુણાકાર, $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{c}{a}$ છે. (1)

$$\therefore (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore 1 + 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} \quad ((1) \text{ પરથી})$$

$$\therefore a^2 + 2ac = b^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 - 2ac$$

જવાબ : (A)

- (10) જો કોઈ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + bx + c = 0$ નાં બીજનો ગુણોત્તર એ અન્ય દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બીજનાં ગુણોત્તર જેટલો હોય તો નીચેનામાંથી સત્ય બને.

(A) $ap^2 = bq^2$ (B) $b^2q = cp^2$ (C) $a^2q = bp^2$ (D) $(aq)^2 = (bq)^2$

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ, $x^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α તથા β છે. $\alpha + \beta = -b$, $\alpha\beta = c$ થાય.

વળી, દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બીજ m તથા n હોય તો, $m + n = -p$, $mn = q$ મળે.

હવે $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$ આપેલ છે.

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{m + n}{m - n}$$

$$\therefore \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{(m + n)^2}{(m - n)^2}$$

$$\therefore \frac{(\alpha + \beta)^2}{[(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta]} = \frac{(m + n)^2}{[(m + n)^2 - 4mn]}$$

$$\therefore \frac{(-b)^2}{[(-b)^2 - 4(c)]} = \frac{(-p)^2}{[(-p)^2 - 4q]}$$

$$\therefore \frac{b^2}{b^2 - 4(c)} = \frac{p^2}{p^2 - 4q}$$

$$\therefore b^2p^2 - b^2(4q) = b^2p^2 - (4cp^2)$$

$$\therefore b^2(4q) = (p^24c)$$

$$\therefore b^2q = cp^2$$

જવાબ : (B)

→ બીજી રીત : ધારો કે સમીકરણોનાં બીજ $\alpha, \alpha\gamma$ તથા $\beta, \beta\gamma$ છે.

$$\alpha(1 + \gamma) = -b, \beta(1 + \gamma) = -p, \alpha^2\gamma = c, \beta^2\gamma = q$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{b}{p}, \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{c}{q}. \text{ આથી } \left(\frac{b}{p}\right)^2 = \frac{c}{q}. \text{ આથી } b^2q = p^2c$$

જવાબ : (B)

- (11) જો $x = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots \infty}}}$ હોય તો x ની કિંમતો હોઈ શકે. ($x > 0$)

(A) 5, -4

(B) 4

(C) 5

(D) 4, -5

ઉકેલ : $x = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots \infty}}}$

$$\therefore x = \sqrt{20 + x}$$

$$\therefore x^2 = 20 + x$$

$$\therefore x^2 - x - 20 = 0$$

$$\therefore (x - 5)(x + 4) = 0$$

$$\therefore x = 5 \text{ કે } x = -4$$

પરંતુ $x > 0$ હોવાથી $x \neq -4$

$$\therefore x = 5$$

જવાબ : (C)

- (12) જો કોઈ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજનો સરવાળો તે બીજના વ્યસ્તના વર્ગોના સરવાળા જેટલો થાય, તો નીચેનામાંથી સત્ય બને.

(A) ab^2, a^2c તથા bc^2 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

(B) ab^2, a^2c તથા bc^2 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય.

(C) $\frac{b}{c}, \frac{a}{b}$ તથા $\frac{c}{a}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

(D) $\frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{c}{a}$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય.

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ની બીજ α અને β છે.

$$\text{હવે } \alpha + \beta = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$\text{અહીં } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \text{ તથા } \alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ છે.}$$

$$\therefore \frac{-b}{a} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

$$\therefore -bc^2 = ab^2 - 2a^2c$$

$$\therefore 2a^2c = ab^2 + bc^2$$

$$\therefore ab^2, a^2c \text{ તથા } bc^2 \text{ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.}$$

જવાબ : (A)

(13) સમીકરણ $\frac{1}{x^4}(\log_2 x) - \frac{3}{4} = 2$ ની બીજ મળે.

(A) $\frac{1}{2}, 6$

(B) $\frac{1}{6}, 2$

(C) $\frac{1}{2}, 16$

(D) $\frac{1}{16}, 2$

ઉકેલ : $\frac{1}{x^4}(\log_2 x) - \frac{3}{4} = 2$

$$\therefore \frac{\log_2 x - 3}{4} = \log_x 2$$

$$\therefore (\log_2 x) - 3 = \frac{4 \log_2 2}{\log_2 x}$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x - 4 = 0$$

$$\therefore (\log_2 x + 1)(\log_2 x - 4) = 0$$

$$\therefore \log_2 x = -1 \text{ અથવા } \log_2 x = 4$$

$$\therefore x = 2^{-1} \text{ અથવા } x = 2^4 \text{ એટલે કે } x = \frac{1}{2} \text{ અથવા } x = 16$$

જવાબ : (C)

(14) જો $\frac{x^2 + 2x + 7}{2x + 3} < 6; x \in \mathbb{R}$ હોય, તો x ની કિંમતો સત્ય બને.

(A) $x > 11$ અથવા $x < -1$

(B) $x < \frac{-3}{2}$ અથવા $-1 < x < 11$

(C) $x > 11$ અથવા $x < \frac{-3}{2}$

(D) $\frac{-3}{2} < x < -1$

ઉકેલ : $\frac{x^2 + 2x + 7}{2x + 3} < 6; x \in \mathbb{R}$ આપેલ છે.

$$\therefore \frac{x^2+2x+7}{2x+3} - 6 < 0$$

$$\therefore \frac{x^2-10x-11}{2x+3} < 0$$

વિકલ્પ 1 $x^2 - 10x - 11 < 0$ અને $2x + 3 > 0$

$$\therefore (x - 11)(x + 1) < 0 \text{ અને } x > \frac{-3}{2}$$

$$\therefore -1 < x < 11 \text{ અને } x > \frac{-3}{2}$$

પરંતુ $x > \frac{-3}{2}$ હોવાથી $-1 < x < 11$ શક્ય બને.

આમ $x < \frac{-3}{2}$ અથવા $-1 < x < 11$ સત્ય થાય.

વિકલ્પ 2 $x^2 - 10x - 11 > 0$ અને $2x + 3 < 0$

$$(x - 11)(x + 1) > 0 \text{ તથા } x < \frac{-3}{2}$$

$$\therefore (x > 11 \text{ અથવા } x < -1) \text{ તથા } x < \frac{-3}{2}$$

$$\therefore x < -\frac{3}{2}$$

જવાબ : (B)

(15) જો $\cos \alpha$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ $15x^2 + 8x - 12 = 0$; $0 < x < 1$ નું બીજ હોય, તો $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \dots\dots$ થાય.

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) 5

ઉકેલ : $15x^2 + 8x - 12 = 0$; $0 < x < 1$ આપેલ છે.

$$\therefore (3x - 2)(5x + 6) = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{3} \text{ અથવા } x = \frac{-6}{5}$$

$$0 < x < 1 \text{ હોવાથી } x = \frac{2}{3} = \cos \alpha$$

$$\therefore \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

જવાબ : (C)

(16) જો $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a + b + c = 0$, $c \neq 0$ હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $4ax^2 + 3bx + 2c = 0$ ને $\dots\dots$ બીજ હોય.

a, c , સમચિહ્ન

(A) એક ધન તથા એક ઋણ.

(B) બે સંકર.

(C) બે વાસ્તવિક.

(D) બંને શૂન્ય.

ઉકેલ : અહીં $4ax^2 + 3bx + 2c = 0$ આપેલ છે.

$$\therefore \Delta = 9b^2 - 32ac$$

$$= 9(-a - c)^2 - 32ac$$

$$(a + b + c = 0 \Rightarrow b = -a - c)$$

$$= 9(a^2 + c^2 + 2ac) - 32ac$$

$$= 9a^2 + 9c^2 - 14ac$$

$$= \frac{9a^2}{c^2} - \frac{14a}{c} + 9$$

$$= \left(\frac{3a}{c} - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{32}{9} \geq \frac{32}{9} > 0$$

આથી દ્વિઘાત સમીકરણને બે વાસ્તવિક બીજ મળે. (શા માટે (A) અથવા (D) નહીં ?)

જવાબ : (C)

(17) સમીકરણ $5^{2x^2-7x+7}=25$ ને બીજ મળે.

- (A) 0 (B) બેથી વધુ (C) બરાબર બે જ. 1, તથા $\frac{2}{5}$ (D) બરાબર બે જ. 1 તથા $\frac{5}{2}$

ઉકેલ : અહીં $5^{2x^2-7x+7}=5^2$ આપેલ છે.

$$\therefore 2x^2 - 7x + 7 = 2$$

$$\therefore 2x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$\therefore (2x - 5)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ અથવા } x = \frac{5}{2}$$

જવાબ : (D)

(18) વિધેય $\frac{5}{9x^2+6x+14}$ ની મહત્તમ કિંમત છે.

- (A) 5 (B) $\frac{13}{5}$ (C) $\frac{5}{13}$ (D) 13

ઉકેલ : $\frac{5}{9x^2+6x+14}$ ત્યારે જ મહત્તમ કિંમત ધારણ કરે કે જ્યારે દ્વિઘાત વિધેય $9x^2 + 6x + 14$ ન્યૂનતમ હોય.

$$\text{હવે, } 9x^2 + 6x + 14 = 9x^2 + 6x + 1 + 13 = (3x + 1)^2 + 13 \geq 13$$

આથી $9x^2 + 6x + 14$ ની ન્યૂનતમ સીમા 13 છે. $x = -\frac{1}{3}$ માટે ન્યૂનતમ કિંમત મળે.

આથી $\frac{5}{9x^2+6x+14}$ ની મહત્તમ કિંમત $\frac{5}{13}$ મળે.

જવાબ : (C)

$$\text{નોંધ : } 9x^2 + 6x + 14 \text{ ની ન્યૂનતમ કિંમત} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{504-36}{36} = \frac{468}{36} = 13.$$

(19) જો x એ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો $\frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3} \in \dots\dots$

- (A) [1, 3] (B) [4, -5] (C) [-5, 4] (D) $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$

ઉકેલ : ધારો કે $y = \frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$

$$\therefore x^2y + 2xy + 3y = x^2 + 14x + 9$$

$$= (y-1)x^2 + (y-7)2x + 3y-9 = 0$$

હવે $x \in \mathbb{R}$ હોવાથી, $b^2 - 4ac \geq 0$ જરૂરી છે.

$$\therefore 4(y-7)^2 - 4(y-1)(3y-9) \geq 0$$

$$\therefore (y-7)^2 - 3(y-1)(y-3) \geq 0$$

$$\therefore (y^2 - 14y + 49) - 3(y^2 - 4y + 3) \geq 0$$

$$\therefore -2y^2 - 2y + 40 \geq 0$$

$$\therefore y^2 + y - 20 \leq 0$$

$$\therefore (y+5)(y-4) \leq 0$$

$$\therefore -5 \leq y \leq 4$$

$$\therefore \frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3} \in [-5, 4]$$

જવાબ : (C)

(20) જો $x \in \mathbb{R}$ હોય, તો $\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે હોય.

- (A) 3, $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$, 3 (C) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ (D) 3, 3

ઉકેલ : ધારો કે $y = \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$

$$\therefore x^2y + 2xy + 4y = x^2 - 2x + 4$$

$$\therefore (y-1)x^2 + 2(y+1)x + 4(y-1) = 0$$

હવે $x \in \mathbb{R}$ હોવાથી, $b^2 - 4ac \geq 0$ જરૂરી છે.

$$\therefore 4(y+1)^2 - 4(y-1) \cdot 4(y-1) \geq 0$$

$$\therefore (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$$

$$\therefore [y+1-2(y-1)](y+1+2(y-1)) \geq 0$$

$$\therefore (3-y)(3y-1) \geq 0 \text{ એટલે કે } (y-3)(3y-1) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$$

$\therefore \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $\frac{1}{3}$ તથા મહત્તમ કિંમત 3 મળે.

નોંધ : અનુક્રમે $x = 2$ તથા $x = -2$ માટે તે મળે.

જવાબ : (A)

(21) જો $\alpha \neq \beta$ તથા $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ તેમજ $\beta^2 = 5\beta - 3$ હોય, તો $\frac{\alpha}{\beta}$ અને $\frac{\beta}{\alpha}$ બીજ ધરાવતું દ્વિઘાત સમીકરણ હોય.

- (A) $3x^2 - 19x + 3 = 0$ (B) $3x^2 - 19x - 3 = 0$ (C) $3x^2 - 16x + 1 = 0$ (D) $x^2 + 19x - 3 = 0$

ઉકેલ : અહીં $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ તથા $\beta^2 = 5\beta - 3$

$\therefore \alpha^2 - 5\alpha + 3 = 0$ તથા $\beta^2 - 5\beta + 3 = 0$ આથી α, β સમીકરણ $x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ છે.

$$\therefore \alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 3$$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}$ અને $\frac{\beta}{\alpha}$ બીજ કોઈ સમીકરણનાં બીજ હોય તો,

$$\begin{aligned} \text{બીજોનો સરવાળો} &= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{25 - 6}{3} = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

$$\text{બીજનો ગુણકાર} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1$$

$$\therefore \text{માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ : } x^2 - \left(\frac{19}{3}\right)x + 1 = 0$$

$$\therefore 3x^2 - 19x + 3 = 0$$

જવાબ : (A)

(22) સમીકરણ $\frac{\log 3 + \log(x^2+2)}{\log(x-2)} = 2$ ની ઉકેલ મળે.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $\frac{\log 3 + \log(x^2+2)}{\log(x-2)} = 2$

$$\therefore \log [3 (x^2 + 2)] = 2 \log (x - 2) = \log (x - 2)^2$$

$$\therefore 3 (x^2 + 2) = (x - 2)^2$$

$$\therefore 3x^2 + 6 = x^2 - 4x + 4$$

$$\therefore 2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\therefore (x + 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1 \quad \text{પરંતુ } x = -1 \text{ લેતાં, } \log (x-2) \text{ શક્ય ન બને.}$$

$$\therefore x \neq -1$$

$$\therefore \text{એક પણ ઉકેલ શક્ય નથી.}$$

જવાબ : (A)

(23) સમીકરણ $\sqrt{x-2} (x^2 - 4x + 3) = 0$ નાં વાસ્તવિક બીજ હોય.

(A) 1, 2

(B) 1, 3

(C) 2, 3

(D) 1, 2, 3

$$\text{ઉકેલ : } \sqrt{x-2} (x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\therefore \sqrt{x-2} (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ અથવા } 2 \text{ અથવા } 3$$

$$\text{પરંતુ } x - 2 \geq 0$$

$$\therefore x = 2, 3$$

જવાબ : (C)

(24) જો x, y, z ભિન્ન અને વાસ્તવિક હોય, તો $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6yz - 3zx - 2xy$ હંમેશાં હોય.

(A) અનુલ

(B) ઋણ

(C) 0

(D) સંકર સંખ્યા

$$\text{ઉકેલ : } x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6yz - 3zx - 2xy$$

$$= (x)^2 + (2y)^2 + (3z)^2 - (2y) (3z) - x(3z) - x (2y)$$

$$= \frac{1}{2} [(x-2y)^2 + (2y-3z)^2 + (x-3z)^2] \geq 0$$

$$\text{આથી } x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6yz - 3zx - 2xy \text{ હંમેશાં અનુલ જ હોય.}$$

જવાબ : (A)

(25) જો $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{10}{3} = \log_2 y + \log_y 2$ તથા $x \neq y$ હોય તો $x + y = \dots\dots$

(A) 8

(B) $\frac{1}{2^3}$

(C) $8 - 2^{\frac{1}{3}}$

(D) $8 + 2^{\frac{1}{3}}$

ઉકેલ : અહીં $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{10}{3} = \log_2 y + \log_y 2$ આપેલ છે.

$$\therefore \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{10}{3} \text{ લેતાં, } = \frac{(\log_2 x)^2 + 1}{\log_2 x} = \frac{10}{3}$$

$$\text{ધારો કે } \log_2 x = m, \quad \text{આથી } 3(m^2 + 1) = 10m$$

$$\therefore 3m^2 - 10m + 3 = 0$$

$$\therefore (3m - 1)(m - 3) = 0$$

$$\therefore m = 3 \text{ અથવા } m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \log_2 x = 3 \text{ અથવા } \log_2 x = \frac{1}{3}$$

$$\text{આ જ રીતે, } \log_2 y = 3 \text{ કે } \log_2 y = \frac{1}{3} \text{ મળે.}$$

$$\text{હવે, } x \neq y \text{ હોવાથી, } \log_2 x = 3 \text{ લેતાં, } \log_2 y \neq 3. \quad \text{આથી } \log_2 y = \frac{1}{3} \text{ થાય.}$$

$$\text{અથવા } \log_2 x = \frac{1}{3} \text{ લેતાં, } \log_2 y = 3 \text{ થાય.}$$

$$\therefore x = 2^3 \text{ તથા } y = 2^{\frac{1}{3}} \text{ અથવા } x = 2^{\frac{1}{3}} \text{ અને } y = 2^3 \text{ થાય}$$

$$\therefore x + y = 2^3 + 2^{\frac{1}{3}} = 8 + 2^{\frac{1}{3}}$$

જવાબ : (D)

$$(26) \quad \text{જો } x = \sqrt{12 - \sqrt{140}} \text{ હોય, તો } x + \frac{1}{x} = \dots\dots$$

$$(A) \sqrt{7} + \sqrt{5}$$

$$(B) \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$$

$$(C) \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$$

$$(D) \frac{\sqrt{7} - 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{ઉકેલ : } x = \sqrt{12 - \sqrt{140}} = \sqrt{12 - 2\sqrt{35}} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$$

(કરણીનું વર્ગમૂળ)

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{7} - \sqrt{5} + \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$$

જવાબ : (C)

$$(27) \quad \text{જો } 3, 3 \text{ એ દ્વિઘાત સમીકરણ } x^2 + ax + \beta = 0 \text{ નાં બીજ હોય તથા } -8, 2 \text{ એ દ્વિઘાત સમીકરણ } x^2 + \alpha x + b = 0 \text{ નાં બીજ હોય, તો સમીકરણ } x^2 + ax + b = 0 \text{ નાં બીજ } \dots\dots \text{ હોય.}$$

$$(A) 2, 8$$

$$(B) -2, -8$$

$$(C) 8, -2$$

$$(D) -8, 2$$

$$\text{ઉકેલ : સમીકરણ } x^2 + ax + \beta = 0 \text{ નાં બીજ } 3, 3 \text{ હોવાથી, બીજનો સરવાળો } 3 + 3 = -a. \text{ આથી } a = -6 \text{ મળે.}$$

$$\text{વળી, દ્વિઘાત સમીકરણ } x^2 + \alpha x + b = 0 \text{ નાં બીજ } -8 \text{ તથા } 2 \text{ છે. આથી બીજનો ગુણાકાર } = -8(2) = b.$$

$$\text{આથી } b = -16.$$

$$\text{આથી નવું દ્વિઘાત સમીકરણ } x^2 - 6x - 16 = 0 \text{ મળે.}$$

$$\therefore (x - 8)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 8 \text{ અથવા } x = -2 \text{ મળે.}$$

જવાબ : (C)

- (28) દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ શોધતી વખતે બે વિદ્યાર્થીઓ પૈકી એક વિદ્યાર્થી સમીકરણનું અચળ પદ ખોટું લખે છે અને સમીકરણનાં સાચાં બીજનો સરવાળો 3 મળે છે જ્યારે બીજો વિદ્યાર્થી x^2 નો સહગુણક તથા અચળ પદ સાચાં લખે છે જે અનુક્રમે 1 તથા -18 છે તો મળતા દ્વિઘાત સમીકરણનાં સાચાં બીજ હોય.

(A) 3, 6 (B) -3, -6 (C) -6, 3 (D) 6, -3

ઉકેલ : અહીં બીજનો સરવાળો = 3

$$\text{તથા બીજનો ગુણાકાર} = \frac{-18}{1} = -18$$

$$\therefore \text{મળતું દ્વિઘાત સમીકરણ } x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\therefore (x - 6)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = 6 \text{ અથવા } x = -3 \text{ મળે.}$$

જવાબ : (D)

- (29) સમીકરણ $(5+2\sqrt{6})^{x-3} + (5-2\sqrt{6})^{x-3} = 10$ નું એક બીજ હોય.

(A) 4 (B) 3 (C) 8 (D) 2

ઉકેલ : અહીં $5-2\sqrt{6} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}}$

$$\therefore (5+2\sqrt{6})^{x-3} + (5-2\sqrt{6})^{x-3} = 10$$

$$\therefore (5+2\sqrt{6})^{x-3} + \left(\frac{1}{5+2\sqrt{6}}\right)^{x-3} = 10$$

$$\text{ધારો કે } (5+2\sqrt{6})^{x-3} = m$$

$$\therefore m + \frac{1}{m} = 10$$

$$\therefore m^2 - 10m + 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{10 \pm \sqrt{100-4}}{2}$$

$$\therefore m = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

$$\therefore m = (5+2\sqrt{6})^{x-3} = (5+2\sqrt{6})^1 \text{ અથવા } (5+2\sqrt{6})^{-1}$$

$$\therefore x - 3 = \pm 1$$

$$\therefore x = 4 \text{ અથવા } 2$$

જવાબ : (A),(D)

- (30) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $(a^2 + b^2)x^2 - 2b(a + c)x + (b^2 + c^2) = 0$ નાં બીજ સમાન હોય તો a, b, c શ્રેણીમાં હોય. $a, b, c \in R$

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : $(a^2 + b^2)x^2 - 2b(a + c)x + (b^2 + c^2) = 0$ નાં બીજ સમાન છે.

$$\therefore \Delta = 0$$

$$\therefore 4b^2(a + c)^2 - 4(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = 0$$

$$\therefore 4b^2(a^2 + 2ac + c^2) - 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2) = 0$$

$$\therefore 8ab^2c - 4a^2c^2 - 4b^4 = 0$$

$$\therefore b^4 + a^2c^2 - 2ab^2c = 0$$

$$\therefore (b^2 - ac)^2 = 0$$

$$\therefore b^2 = ac$$

$\therefore a, b, c$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

જવાબ : (B)

$$(31) \log_2 (x^2 + 5x + 10) = 2 \text{ ની બીજાં મળે.}$$

$$(A) 2, 3$$

$$(B) -2, 3$$

$$(C) -3, 2$$

$$(D) -2, -3$$

$$\text{ઉકેલ : } \log_2 (x^2 + 5x + 10) = 2$$

$$\therefore x^2 + 5x + 10 = 2^2 = 4$$

$$\therefore x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\therefore (x + 3)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ કે } x = -3 \text{ મળે.}$$

જવાબ : (D)

$$(32) \text{ જો દ્વિઘાત સમીકરણ } ax^2 + bx + c = 0 \text{ ની બીજાં } \alpha \text{ અને } \beta \text{ હોય, તો } \frac{1}{a\alpha+b} + \frac{1}{a\beta+b} = \dots\dots$$

$$(A) \frac{c}{ab}$$

$$(B) \frac{a}{bc}$$

$$(C) \frac{b}{ac}$$

$$(D) \frac{1}{abc}$$

$$\text{ઉકેલ : } \frac{1}{a\alpha+b} + \frac{1}{a\beta+b} = \frac{a\beta+b+a\alpha+b}{(a\alpha+b)(a\beta+b)}$$

$$= \frac{a(\alpha+\beta)+2b}{a^2\alpha\beta+ab(\alpha+\beta)+b^2}$$

$$= \frac{a\left(\frac{-b}{a}\right)+2b}{a^2\left(\frac{c}{a}\right)+ab\left(\frac{-b}{a}\right)+b^2} = \frac{-b+2b}{ac-b^2+b^2} = \frac{b}{ac}$$

જવાબ : (C)

$$(33) \text{ જો } x \text{ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને } k = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \text{ હોય તો } k \in \dots\dots$$

$$(A) \left(\frac{1}{3}, 3\right)$$

$$(B) \left[\frac{1}{3}, 3\right]$$

$$(C) k \leq \frac{1}{3}$$

$$(D) k \geq 3$$

$$\text{ઉકેલ : } k = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \text{ આપેલ છે.}$$

$$\therefore x^2 + x + 1 = kx^2 - kx + k$$

$$\therefore (k-1)x^2 - (k+1)x + (k-1) = 0$$

$$\text{હવે } x \in \mathbb{R} \text{ હોવાથી, } \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\therefore (k+1)^2 - 4(k-1)(k-1) \geq 0$$

$$\therefore (k+1)^2 - [2(k-1)]^2 \geq 0$$

$$\therefore (k+1-2k+2)(k+1+2k-2) \geq 0$$

$$\therefore (3-k)(3k-1) \geq 0$$

$$\therefore (k-3)(3k-1) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq k \leq 3$$

$$\therefore k \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$$

જવાબ : (B)

(34) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - m(x+1) - n = 0$ ની બીજ α અને β હોય, તો $\frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+n} + \frac{\beta^2+2\beta+1}{\beta^2+2\beta+n}$ ની

કિંમત હોય.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

ઉકેલ : $x^2 - m(x+1) - n = 0$

$$\therefore x^2 - mx - (m+n) = 0 \text{ ની બીજ } \alpha \text{ તથા } \beta \text{ આપેલ છે.}$$

(1)

$$\therefore \alpha + \beta = m; \alpha\beta = -(m+n)$$

$$\text{આથી, } n = -\alpha\beta - m$$

$$= -\alpha\beta - (\alpha + \beta)$$

$$\therefore \frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+n} + \frac{\beta^2+2\beta+1}{\beta^2+2\beta+n} = \frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha-\alpha\beta-\alpha-\beta} + \frac{\beta^2+2\beta+1}{\beta^2+2\beta-\alpha\beta-\alpha-\beta}$$

$$= \frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-\alpha\beta-\beta} + \frac{\beta^2+2\beta+1}{\beta^2+\beta-\alpha\beta-\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha+1)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+1)} + \frac{(\beta+1)^2}{(\beta+1)(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha+1}{\alpha-\beta} - \frac{\beta+1}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}$$

$$= 1$$

જવાબ : (B)

(35) સમીકરણ $x^2 + x - 1 = 0$ ની બીજનો ગુણોત્તર $m : n$ હોય તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ?

(A) $2m+n(3+\sqrt{5})=0$

(B) $2m = 3n$

(C) $3m - 2n(\sqrt{5}+1) = 0$

(D) $3m = 2n$

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણ $x^2 + x - 1 = 0$ ની બીજ α અને β છે.

$$\text{અહીં } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n} \text{ છે. વળી } \alpha + \beta = -1; \alpha\beta = -1$$

$$\begin{array}{lcl}
\therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{m+n}{m-n} & \text{(યોગ-વિયોગ)} & \\
\therefore \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{(m+n)^2}{(m-n)^2} & & \\
\therefore \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \frac{(m+n)^2}{(m-n)^2} & & \\
\therefore \frac{1}{1+4} = \frac{(m+n)^2}{(m-n)^2} & & \\
\therefore \frac{1}{5} = \left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2 & & \\
\therefore \frac{m+n}{m-n} = \frac{1}{\sqrt{5}} & & \\
\therefore \frac{m+n+m-n}{m+n-m+n} = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} & \text{(યોગ-વિયોગ)} & \\
\therefore \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{5}+1}{1-\sqrt{5}} \times \frac{(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})} = \frac{6+2\sqrt{5}}{-4} & & \\
\therefore \frac{m}{n} = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-1}{2} (3+\sqrt{5}) & & \\
\therefore 2m + n (3+\sqrt{5}) = 0 & \text{જવાબ : (A)} &
\end{array}$$

નોંધ : $\frac{m+n}{m-n} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ લેતાં, $2m + n (3-\sqrt{5}) = 0$ મળે, જે વિકલ્પ આપેલ નથી.

બીજી રીત :

ધારો કે $\alpha = mk$, $\beta = nk$

$$\therefore \alpha + \beta = (m+n)k = -1, \quad \alpha\beta = mnk^2 = -1.$$

$$\therefore k = \frac{-1}{m+n}, \quad k^2 = \frac{-1}{mn}. \quad \text{આથી} \quad \frac{1}{(m+n)^2} = \frac{-1}{mn} \quad \therefore m^2 + 3mn + n^2 = 0$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore 2m = (-3 \pm \sqrt{5})n$$

$$\therefore 2m + (3 \pm \sqrt{5})n = 0 \quad (\text{આપેલ વિકલ્પ પ્રમાણે})$$

(36) સમીકરણ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$ નો વાસ્તવિક ઉકેલમળે.

(A) 6, 1

(B) -1, 6

(C) -6, -1

(D) -6, 1

ઉકેલ : $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$

$$\therefore [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] = 120$$

$$\therefore (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 0$$

ધારો કે $x^2 + 5x = m$

$$\therefore (m+4)(m+6) = 120$$

$$\therefore m^2 + 10m - 96 = 0$$

$$\therefore (m+16)(m-6) = 0$$

$$\therefore m = -16 \text{ અથવા } m = 6$$

$$\therefore x^2 + 5x = -16 \text{ અથવા } x^2 + 5x = 6 \quad (x^2 + 5x = m)$$

$$\therefore x^2 + 5x + 16 = 0 \text{ અથવા } x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x^2 + 5x + 16 = 0 \text{ લેતાં, } \Delta = (5)^2 - 4(1)(16) = 25 - 64 = -39 < 0$$

$\therefore$ સમીકરણને વાસ્તવિક ઉકેલ ન મળે.

હવે, $x^2 + 5x - 6 = 0$ લેતાં, $(x + 6)(x - 1) = 0$ મળે.

$$\therefore x = -6 \text{ કે } x = 1$$

જવાબ : (D)

નોંધ : $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 2.3.4.5 = (-5)(-4)(-3)(-2)$ પરથી બે વાસ્તવિક ઉકેલો $x = 1$ તથા $x = -6$ મળે છે.

(37) જો બીજાનાં વર્ગોનો સરવાળો 40 તથા બીજાના ઘનનો સરવાળો 208 હોય તથા બીજ સંમેય હોય તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ હોય.

$$(A) x^2 - 4x - 12 = 0 \quad (B) x^2 - 4x + 12 = 0 \quad (C) x^2 + 4x - 12 = 0 \quad (D) x^2 + 4x + 12 = 0$$

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ α અને β છે.

$$\alpha^2 + \beta^2 = 40 \text{ તથા } \alpha^3 + \beta^3 = 208$$

$$\therefore (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 40 \text{ અને } (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 208$$

$$\therefore (\alpha + \beta)(40 - \alpha\beta) = 208$$

ધારો કે $\alpha + \beta = m$ તથા $\alpha\beta = n$ છે.

$$\therefore m^2 - 2n = 40 \text{ તથા } m(40 - n) = 208 \text{ મળે.}$$

$$\therefore \frac{m^2 - 40}{2} = n \text{ ની આ ઉકેલ સમીકરણ } m(40 - n) = 208 \text{ માં મૂકતાં,}$$

$$\therefore m \left[40 - \left(\frac{m^2 - 40}{2} \right) \right] = 208$$

$$\therefore m[80 - m^2 + 40] = 416$$

$$\therefore 120m - m^3 = 416$$

$$\therefore m^3 - 120m + 416 = 0$$

$$\therefore (m - 4)(m^2 + 4m - 104) = 0$$

$$\therefore m = 4 \text{ અથવા } m^2 + 4m - 104 = 0$$

$$\text{હવે } m^2 + 4m - 104 = 0 \text{ માટે, } \Delta = 16 - 4(1)(-104) = 432$$

$$\therefore \sqrt{\Delta} = 12\sqrt{3} \text{ અસંમેય સંખ્યા છે. પરંતુ } \alpha, \beta \text{ સંમેય છે.}$$

$$\therefore m = 4 \text{ શક્ય છે. આથી } n = \frac{16 - 40}{2} = -12$$

$$\therefore \alpha + \beta = 4; \alpha\beta = -12$$

$$\therefore \text{ માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ } x^2 - 4x - 12 = 0$$

જવાબ : (A)

નોંધ : વિકલ્પો (B) તથા (D) ને સંકરબીજ હોય. આથી બે વિકલ્પો (A) તથા (C) જ શક્ય બને. વિકલ્પ (A)નાં બીજ $\alpha = 6$ તથા $\beta = -2$ છે. જે આપેલ શરતને સંતોષે છે. આથી, વિકલ્પ (A) જવાબ છે.

(38) સમીકરણ $3 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 16 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 26 = 0$ નો ઉકેલ ગણ હોય.

$$(A) \left\{ 1, 3, \frac{1}{3} \right\} \quad (B) \left\{ -1, -3, \frac{-1}{3} \right\} \quad (C) \left\{ -1, 3, \frac{-1}{3} \right\} \quad (D) \left\{ 1, 3, \frac{-1}{3} \right\}$$

ઉકેલ : $3 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 16 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 26 = 0$ આપેલ છે.

$$\text{ધારો કે } \left(x + \frac{1}{x} \right) = m. \text{ આથી } \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = m^2 - 2$$

$$\therefore 3(m^2 - 2) + 16m + 26 = 0$$

$$\therefore 3m^2 + 16m + 20 = 0$$

$$\therefore (3m + 10)(m + 2) = 0$$

$$\therefore m = \frac{-10}{3} \text{ અથવા } m = -2$$

$$\therefore m = \frac{-10}{3} \text{ લેતાં, દ્વિઘાત સમીકરણ } x + \frac{1}{x} = \frac{-10}{3} \text{ રચાય.}$$

$$\therefore 3x^2 + 10x + 3 = 0. \text{ અર્થાત્ } (3x + 1)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1}{3} \text{ અથવા } x = -3 \text{ મળે.}$$

$$m = -2 \text{ લેતાં, સમીકરણ } x + \frac{1}{x} = -2 \text{ મળે.}$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\therefore (x + 1)^2 = 0. \text{ અર્થાત્ } x = -1$$

$$\therefore x \text{ ની શક્ય કિંમતોનો ઉકેલગણ } \left\{-3, -1, \frac{-1}{3}\right\} \text{ મળે.}$$

જવાબ : (B)

$$(39) \text{ સમીકરણ } 27^{\frac{1}{x}} + 12^{\frac{1}{x}} = 2.8^{\frac{1}{x}} \text{ નાં વાસ્તવિક બીજોની સંખ્યા છે.}$$

$$(A) 0$$

$$(B) 1$$

$$(C) 2$$

$$(D) 3$$

$$\text{ઉકેલ : } 27^{\frac{1}{x}} + 12^{\frac{1}{x}} = 2.8^{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{12}{8}\right)^{\frac{1}{x}} = 2$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{x}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 2$$

$$\text{ધારો કે } \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = m$$

$$\therefore m^3 + m = 2$$

$$\therefore m^3 + m - 2 = 0$$

$$\therefore (m^2 + m + 2)(m - 1) = 0$$

$$\therefore m = 1 \text{ અથવા } m^2 + m + 2 = 0$$

$$\text{હવે } m^2 + m + 2 = 0 \text{ માટે, } \Delta = 1 - 4(1)(2) = -7 < 0 \text{ જેથી વાસ્તવિક બીજ ન મળે.}$$

$$\therefore m = 1$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

$$\therefore \frac{1}{x} = 0 \text{ જે અશક્ય છે.}$$

$$\therefore \text{વાસ્તવિક બીજની સંખ્યા } 0 \text{ થાય.}$$

જવાબ : (A)

(40) જો સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ એ બીજા બીજના n ઘાત જેટલું થાય તો $(ac^n)^{\frac{1}{n+1}} + (a^n c)^{\frac{1}{n+1}} = \dots$

- (A) $-a$ (B) $-b$ (C) $-c$ (D) $-ab$

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

હવે, $\alpha = \beta^n$ આપેલ છે.

વળી, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ તથા $\alpha \beta = \frac{c}{a}$ છે. હવે, $\alpha = \beta^n$ લેતાં, $\beta^n \cdot \beta = \frac{c}{a}$

$\therefore \beta^{n+1} = \frac{c}{a}$. આથી $\beta = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. આથી $\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ મળે.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ પરથી, $\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \frac{-b}{a}$

$$\therefore \frac{\frac{n}{c^{\frac{n}{n+1}}}}{a^{\frac{n}{n+1}}} + \frac{\frac{1}{c^{\frac{1}{n+1}}}}{a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{-b}{a} \quad \text{આથી} \quad \frac{c^{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{n}{n+1}}} + a^{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{1}{c^{\frac{1}{n+1}}}}{a^{\frac{n}{n+1}} \cdot a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{-b}{a}$$

$$\therefore \frac{(c^n \cdot a)^{\frac{1}{n+1}} + (a^n \cdot c)^{\frac{1}{n+1}}}{a} = \frac{-b}{a} \quad \text{આથી} \quad (c^n \cdot a)^{\frac{1}{n+1}} + (a^n \cdot c)^{\frac{1}{n+1}} = -b \quad \text{જવાબ : (B)}$$

(41) જો $ax + by = 1$ હોય અને સમીકરણ $px^2 + qy^2 = 1$ ને માત્ર એક જ બીજ હોય તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ?

- (A) $\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} = 1$ (B) $x = \frac{-a}{p}$ (C) $x = \frac{b}{q}$ (D) $a^2 b^2 = pq$

ઉકેલ : $ax + by = 1$. આથી $y = \frac{1-ax}{b}$

સમીકરણ $px^2 + qy^2 = 1$ માં y નું મૂલ્ય મૂકતાં, $px^2 + q \left(\frac{1-ax}{b}\right)^2 = 1$

$$\therefore b^2 px^2 + q(1-ax)^2 = b^2$$

$$\therefore pb^2 x^2 + q - 2aqx + qa^2 x^2 = b^2$$

$$\therefore (qa^2 + pb^2)x^2 - 2aqx + q - b^2 = 0 \text{ ને માત્ર એક જ બીજ હોય તો } \Delta = 0$$

$$\therefore 4a^2 q^2 - 4(qa^2 + pb^2)(q - b^2) = 0$$

$$\therefore 4a^2 q^2 - 4(a^2 q^2 - a^2 b^2 q + b^2 pq - b^4 p) = 0$$

$$\therefore a^2 q - pq + b^2 p = 0 \quad (b \neq 0)$$

$$\therefore a^2 q + b^2 p = pq$$

$$\therefore \frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} = 1$$

જવાબ : (A)

(42) $\log_{10} a + \log_{10} \sqrt{a} + \log_{10} \sqrt[4]{a} + \dots = b > 0$ હોય તથા $\frac{\sum_{n=1}^b (2n-1)}{\sum_{n=1}^b (3n+1)} = \frac{20}{7 \log_{10} a}$ હોય તો $a = \dots$

- (A) 100 (B) 1000 (C) 10000 (D) 100000

ઉકેલ : $\log_{10} a + \log_{10} \sqrt{a} + \log_{10} \sqrt[4]{a} + \dots = b$ અપેક્ષા છે.

$$\therefore \log_{10} a + \log_{10} a^{\frac{1}{2}} + \log_{10} a^{\frac{1}{4}} + \dots = b$$

$$\therefore \log_{10} (a \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \dots) = b$$

$$\therefore \log_{10} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots} = b$$

$$\therefore \log_{10} a^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = b$$

$$\therefore \log_{10} a^2 = b$$

$$\therefore 2 \log_{10} a = b$$

$$\frac{\sum_{n=1}^b (2n-1)}{\sum_{n=1}^b (3n+1)} = \frac{20}{7 \log_{10} a}$$

$$\therefore \frac{2 \cdot \frac{b(b+1)}{2} - b}{3 \cdot \frac{b(b+1)}{2} + b} = \frac{20}{7 \frac{b}{2}}$$

$$\therefore \frac{b^2}{3b^2+5b} = \frac{20}{7b} \cdot \text{અર્થ} \frac{b^2}{3b+5} = \frac{20}{7}$$

$$\therefore 7b^2 - 60b - 100 = 0$$

$$\therefore (7b+10)(b-10) = 0$$

$$\therefore b = \frac{-10}{7} \text{ અથવા } b = 10$$

પરંતુ $b \neq \frac{-10}{7}$ કારણ કે $b \in \mathbb{N}$. અર્થ $b = 10$

$$\therefore \log_{10} a = 5. \quad \text{અર્થ } a = 10^5 = 100000$$

જવાબ : (D)

$$(43) \quad x \in \mathbb{R} \text{ માટે } 3^{72} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1 \text{ હોય તો } x \in \dots$$

$$(A) [0, 64]$$

$$(B) (0, 64]$$

$$(C) [0, 64]$$

$$(D) (0, 64)$$

$$\text{ઉકેલ : } 3^{72} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$$

$$\therefore 3^{72} (3^{-1})^x (3^{-1})^{\sqrt{x}} > 1$$

$$\therefore 3^{72-x-\sqrt{x}} > 3^0$$

$$\therefore 72 - x - \sqrt{x} > 0$$

$$\therefore x + \sqrt{x} - 72 < 0$$

$$\therefore (\sqrt{x} - 8)(\sqrt{x} + 9) < 0. \quad \text{આથી } -9 < \sqrt{x} < 8 \quad \text{પરંતુ } \sqrt{x} \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq \sqrt{x} < 8. \quad \text{આથી } 0 \leq x < 64$$

$$\therefore x \in [0, 64) \quad \text{જવાબ : (A)}$$

$$(44) \text{ સમીકરણ } (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0 \text{ નાં બીજ હંમેશાં હોય. } (a \neq b)$$

$$(A) \text{ સમાન } \quad (B) \text{ અવાસ્તવિક સંકર } \quad (C) \text{ વાસ્તવિક અસમાન } \quad (D) \text{ શુદ્ધ કાલ્પનિક}$$

$$\text{ઉકેલ : } (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

$$\therefore 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$$

$$\text{હવે } D = 4(a+b+c)^2 - 4(3)(ab+bc+ca)$$

$$= 4[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca]$$

$$= 2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] > 0$$

$$D > 0 \text{ હોવાથી બીજ હંમેશાં વાસ્તવિક અને અસમાન જ હોય.}$$

$$\text{જવાબ : (C)}$$

$$(45) \text{ } a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0 \text{ માટે જો સમીકરણ } a^2x^2 + bx + c = 0 \text{ નું એક બીજ } \alpha \text{ હોય તથા સમીકરણ } a^2x^2 - bx - c = 0 \text{ નું એક બીજ } \beta \text{ હોય જ્યાં } 0 < \alpha < \beta \text{ હોય તો સમીકરણ } a^2x^2 + 2bx + 2c = 0 \text{ નું બીજ } \gamma \text{ હંમેશા નીચેનામાંથી નું સમાધાન કરે.}$$

$$(IIT : 1989)$$

$$(A) \gamma = \alpha + \frac{\beta}{2} \quad (B) \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (C) \gamma = \frac{\alpha}{2} + \beta \quad (D) \alpha < \gamma < \beta$$

$$\text{ઉકેલ : સમીકરણ } a^2x^2 + bx + c = 0 \text{ નું એક બીજ } \alpha \text{ હોવાથી, } a^2\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

$$\therefore b\alpha + c = -a^2\alpha^2 \quad (1)$$

$$\text{વળી, સમીકરણ } a^2x^2 - bx - c = 0 \text{ નું એક બીજ } \beta \text{ હોવાથી, } a^2\beta^2 - b\beta - c = 0$$

$$\therefore b\beta + c = a^2\beta^2 \quad (2)$$

$$\text{હવે, } f(x) = a^2x^2 + 2bx + 2c \text{ નું શૂન્ય } \gamma \text{ હોય તો, } f(\gamma) = a^2\gamma^2 + 2b\gamma + 2c = 0$$

$$\therefore f(x) = a^2x^2 + 2bx + 2c \text{ માં } x = \alpha \text{ લેતાં,}$$

$$\therefore f(\alpha) = a^2\alpha^2 + 2b\alpha + 2c$$

$$= a^2\alpha^2 + 2(b\alpha + c) = a^2\alpha^2 - 2a^2\alpha^2 = -a^2\alpha^2 < 0 \quad ((1) \text{ પરથી })$$

$$\text{વળી, } f(x) = a^2x^2 + 2bx + 2c \text{ માં } x = \beta \text{ લેતાં,}$$

$$\therefore f(\beta) = a^2\beta^2 + 2b\beta + 2c$$

$$= a^2\beta^2 + 2(b\beta + c) = a^2\beta^2 + 2a^2\beta^2 = 3a^2\beta^2 > 0 \quad ((2) \text{ પરથી })$$

$$f(\alpha) < 0 \text{ તથા } f(\beta) > 0 \text{ હોવાથી, } \gamma \in (\alpha, \beta) \text{ એવો મળે કે જેથી } f(\gamma) = 0 \text{ થાય.}$$

$$\therefore \alpha < \gamma < \beta \text{ સત્ય બને.}$$

$$\text{જવાબ : (D)}$$

$$(46) \text{ જો } \alpha, \beta \text{ એ સમીકરણ } x^2 + px + q = 0 \text{ નાં બીજ હોય અને } \alpha^4, \beta^4 \text{ એ સમીકરણ } x^2 - rx + s = 0 \text{ નાં બીજ હોય તો સમીકરણ } x^2 - 4qx + 2q^2 - r = 0 \text{ નાં બીજ હંમેશાં હોય.}$$

$$(IIT : 1989)$$

$$(A) \text{ ભિન્ન અને વાસ્તવિક}$$

$$(B) \text{ સમાન અને વાસ્તવિક}$$

$$(C) \text{ અવાસ્તવિક સંકર}$$

$$(D) \text{ એક વાસ્તવિક અને એક શુદ્ધ કાલ્પનિક}$$

$$\text{ઉકેલ : સમીકરણ } x^2 + px + q = 0 \text{ નાં બીજ } \alpha \text{ અને } \beta \text{ છે. આથી } \alpha + \beta = -p \text{ તથા } \alpha\beta = q \text{ મળે.}$$

$$\text{વળી, સમીકરણ } x^2 - rx + s = 0 \text{ નાં બીજ } \alpha^4 \text{ તથા } \beta^4 \text{ છે.}$$

$\therefore \alpha^4 + \beta^4 = r$ તેમજ $\alpha^4 \beta^4 = s$ આથી $(\alpha\beta)^4 = s$ થાય.

$\therefore$ સમીકરણ $x^2 - 4qx + 2q^2 - r = 0$ માટે,

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac &= 16q^2 - 4(2q^2 - r) \\ &= 16q^2 - 8q^2 + 4r \\ &= 8q^2 + 4r \\ &= 4(2q^2 + r) \\ &= 4[\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2] = 4(\alpha^2 + \beta^2)^2 = [2(\alpha^2 + \beta^2)]^2 > 0 \end{aligned}$$

$D > 0$ હોવાથી, ભિન્ન અને વાસ્તવિક બીજ મળે.

જવાબ : (A)

(47) ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $(\cos p - 1)x^2 + x \cos px + \sin p = 0$ ની બીજ વાસ્તવિક હોય તો, $p \in \dots\dots$

(IIT : 1990)

(A) $(0, \pi]$

(B) $(-\pi, 0)$

(C) $(0, 2\pi)$

(D) $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ઉકેલ : સમીકરણ $(\cos p - 1)x^2 + x \cos px + \sin p = 0$ ની બીજ વાસ્તવિક હોવાથી,

$$D = b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\therefore \cos^2 p - 4(\cos p - 1) \sin p \geq 0$$

$$\therefore \cos^2 p + 4 \sin p (1 - \cos p) \geq 0$$

$$\therefore \cos^2 p + 4 \sin p \left(2 \sin^2 \frac{p}{2}\right) \geq 0$$

$$\text{હવે } \cos^2 p \geq 0 \text{ તથા } \sin^2 \frac{p}{2} \geq 0 \text{ હોય જ.}$$

$$\therefore \text{જો } \sin p \geq 0 \text{ હોય તો } D \geq 0 \text{ થાય જ.}$$

$$p \in (0, \pi] \text{ હોય તો } \sin p \geq 0 \text{ થાય.}$$

$$\therefore p \in (0, \pi]$$

જવાબ : (A)

(48) $\forall x \in \mathbb{R}$ માટે જો દ્વિઘાત બહુપદી $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ હોય તો $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) \dots\dots$ થાય. $x \in \mathbb{R}$

(IIT 1990)

(A) $g(x) < 0$

(B) $g(x) > 0$

(C) $g(x) = 0$

(D) $g(x) \geq 0$

ઉકેલ : [નોંધ : જો $a > 0$ હોય તથા $D = b^2 - 4ac < 0$ હોય તો $f(x) > 0$ થાય.]

$$\text{અહીં } f(x) = ax^2 + bx + c > 0 \text{ આપેલ છે.}$$

$$\therefore f'(x) = 2ax + b \text{ અને } f''(x) = 2a$$

$$\text{વળી, } g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$$

$$= ax^2 + bx + c + 2ax + b + 2a$$

$$= ax^2 + (2a + b)x + (b + c + 2a)$$

$$\text{બહુપદી } g(x) \text{ માટે, } D = (2a + b)^2 - 4a(b + c + 2a)$$

$$= 4a^2 + \cancel{4ab} + b^2 - \cancel{4ab} - 4ac - 8a^2 = b^2 - 4a^2 - 4ac = (b^2 - 4ac) - 4a^2$$

$$\text{આથી } a > 0 \text{ તથા } D < 0 \text{ હોવાથી, } g(x) > 0 \text{ સત્ય બને. } \forall x \in \mathbb{R}$$

જવાબ : (B)

- (49) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $(x - a)(x - b) - k = 0$ નાં બીજ c તથા d હોય તો a તથા b બીજવાળું દ્વિઘાત સમીકરણ મળે. (IIT : 1992)

- (A) $(x - c)(x - d) + k = 0$ (B) $(x + c)(x + d) - k = 0$
(C) $(x - c)(x - d) - k = 0$ (D) $(x + c)(x + d) + k = 0$

ઉકેલ : સમીકરણ $(x - a)(x - b) - k = 0$ આપેલ છે.

$$\therefore x^2 - ax - bx + ab - k = 0$$

$$\therefore x^2 - (a + b)x + ab - k = 0 \text{ નાં બીજ } c \text{ તથા } d \text{ છે.}$$

$$\therefore \text{બીજનો સરવાળો} = c + d = (a + b) \text{ તથા બીજનો ગુણાકાર} = cd = (ab - k)$$

આથી હવે a તથા b બીજવાળા દ્વિઘાત સમીકરણ માટે, બીજનો સરવાળો $a + b = c + d$ તથા $ab = cd + k$

$$\text{માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ : } x^2 - (c + d)x + cd + k = 0$$

$$\therefore (x - c)(x - d) + k = 0 \quad \text{જવાબ : (A)}$$

- (50) જો સમીકરણો $x^2 + ax + b = 0$ અને $x^2 + bx + a = 0$ નું એક બીજ સમાન હોય તો $a + b$ ની કિંમત હોય.

$$(a \neq b)$$

(IIT : 1986)

- (A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણો $x^2 + ax + b = 0$ તથા $x^2 + bx + a = 0$ નું એક સામાન્ય બીજ α છે.

$$\therefore \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \quad \text{તથા} \quad \alpha^2 + b\alpha + a = 0 \quad (1)$$

$$\therefore \alpha^2 + a\alpha + b = \alpha^2 + b\alpha + a$$

$$\therefore a\alpha - b\alpha = a - b$$

$$\therefore \alpha(a - b) = (a - b)$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$(a \neq b)$$

$$\alpha = 1 \text{ સમીકરણ (1) માં મૂકતાં, } 1 + b + a = 0$$

$$\therefore a + b = -1 \text{ મળે.}$$

જવાબ : (B)

- (51) સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$; $p, q \in R$ નું એક બીજ $2 + \sqrt{3}i$ હોય તો; (IIT : 1982)

- (A) $p = -4, q = 7$ (B) $p = 4, q = 7$ (C) $p = 4, q = -7$ (D) $p = -4, q = -7$

ઉકેલ : સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નું એક બીજ $\alpha = 2 + \sqrt{3}i$ હોય તો $\beta = 2 - \sqrt{3}i$ હોય.

$$\text{તેથી બીજનો સરવાળો} = \alpha + \beta = -p = 2 + \sqrt{3}i + 2 - \sqrt{3}i. \text{ આથી } p = -4$$

$$\text{તથા બીજનો ગુણાકાર} = q = \alpha\beta = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)$$

$$= 4 - 3i^2 = 4 + 3 = 7 \quad (i^2 = -1)$$

$$\therefore p = -4 \text{ અને } q = 7$$

જવાબ : (A)

- (52) શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c એવી મળે કે જેથી

$$\int_0^1 (1 + \cos^8 x)(ax^2 + bx + c) dx = \int_0^2 (1 + \cos^8 x)(ax^2 + bx + c) dx \text{ હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ } ax^2 + bx + c = 0 \text{ ને}$$

.....

(IIT : 1982)

- (A) (0, 2) માં એક પણ બીજ ન હોય. (B) (1, 2) માં ઓછામાં ઓછું એક બીજ હોય જ.
(C) (0, 2) માં બે બીજ હોય. (D) બે અવાસ્તવિક સંકર બીજ હોય.

ઉકેલ : ધારો કે વિધેય, $f(t) = \int_0^t (1 + \cos^8 x)(ax^2 + bx + c) dx$ છે.

વિધેય f $[1, 2]$ પર સતત તથા $(1, 2)$ પર વિકલનીય હોય જ. વળી $f(1) = f(2)$ આથી, રોલના પ્રમેય પરથી કોઈ $k \in (1, 2)$ એવો મળે જ કે જેથી $f'(k) = 0$ થાય.

$$\text{હવે, } f(t) = \int_0^t (1 + \cos^8 x)(ax^2 + bx + c) dx$$

$$\therefore f'(x) = (1 + \cos^8 x)(ax^2 + bx + c)$$

$$\therefore f'(k) = (1 + \cos^8 k)(ak^2 + bk + c) = 0$$

$$\therefore ak^2 + bk + c = 0$$

$\therefore k$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ થાય.

પરંતુ $k \in (1, 2)$ હોવાથી, દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ને $(1, 2)$ માં ઓછામાં ઓછું એક બીજ હોય જ.

જવાબ : (B)

(53) દ્વિઘાત સમીકરણ $3x^2 + 2x + p(p-1) = 0$ નાં બીજ વિષમચિહ્ન હોય તો p ની કિંમતોનો ગણ હોય. (IIT : 1992)

(A) $(-\infty, 0)$

(B) $(0, 1)$

(C) $(1, \infty)$

(D) $(0, \infty)$

ઉકેલ : દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ વિષમ ચિહ્ન હોય તો બીજનો ગુણાકાર ઋણ જ થાય. આથી $\alpha \beta < 0$

$$\therefore \frac{p(p-1)}{3} < 0. \text{ આથી } 0 < p < 1 \text{ એટલે કે } p \in (0, 1)$$

જવાબ : (B)

(54) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + x + 1 = 0$ નાં બીજ α અને β હોય, તો જેનાં બીજ α^{19} તથા β^7 હોય તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ હોય. (IIT : 1994)

(A) $x^2 - x - 1 = 0$

(B) $x^2 - x + 1 = 0$

(C) $x^2 + x - 1 = 0$

(D) $x^2 + x + 1 = 0$

ઉકેલ : $x^2 + x + 1 = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

$$\therefore \alpha, \beta = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \omega \text{ અને } \omega^2$$

$$(w^3 - 1 = 0 \text{ હોય તો } (w - 1)(w^2 + w + 1) = 0)$$

ધારો કે $\alpha = w$ તથા $\beta = w^2$ લઈએ તો,

$$\alpha^{19} + \beta^7 = w^{19} + (w^2)^7 = w^{19} + w^{14}$$

$$= (w^3)^6 \cdot w + (w^3)^4 \cdot w^2$$

$$= w + w^2$$

$$= -1$$

$$(w^3 = 1)$$

$$(1 + w + w^2 = 0)$$

$$\text{બીજનો ગુણાકાર } \alpha^{19} \cdot \beta^7 = w^{19} \cdot w^{14} = w^{33} = (w^3)^{11} = 1$$

$$\therefore \text{ માંગેલ સમીકરણ : } x^2 - (-1)x + 1 = 0$$

$$\therefore x^2 + x + 1 = 0$$

જવાબ : (D)

- (55) જો p, q, r ધન હોય અને સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $px^2 + qx + r = 0$ ની બીજ વાસ્તવિક હોવા માટે હોવું જોઈએ. (IIT : 1995)

(A) $\left| \frac{r}{p} - 7 \right| \geq 4\sqrt{3}$ (B) $\left| \frac{p}{r} - 7 \right| < 4\sqrt{3}$ (C) $\left| \frac{p}{r} + 7 \right| < 4\sqrt{3}$ (D) $\frac{p^2}{r} = 7 + 4\sqrt{3}$

ઉકેલ : p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી, $2q = p + r$ (1)

સમીકરણ $px^2 + qx + r = 0$ ની બીજ વાસ્તવિક હોવા માટે, $D = b^2 - 4ac \geq 0$ હોય.

$$\therefore q^2 - 4pr \geq 0$$

$$\therefore \left(\frac{p+r}{2} \right)^2 - 4pr \geq 0 \quad (1) \text{ પરથી}$$

$$\therefore (p+r)^2 - 16pr \geq 0$$

$$\therefore p^2 + r^2 - 14pr \geq 0$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{r}{p} \right)^2 - \frac{14r}{p} \geq 0 \quad (p^2 \neq 0) \quad (2)$$

$$\text{હવે, } \left(\frac{r}{p} \right)^2 - 14 \left(\frac{r}{p} \right) + 1 = 0 \text{ માટે, } \frac{r}{p} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4(1)(1)}}{2} = 7 \pm \frac{\sqrt{192}}{2} = 7 \pm \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{r}{p} = 7 \pm 4\sqrt{3}$$

$$\therefore (2) \text{ પરથી, } \frac{r}{p} \leq 7 - 4\sqrt{3} \text{ અથવા } \frac{r}{p} \geq 7 + 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{r}{p} - 7 \leq -4\sqrt{3} \text{ કે } \frac{r}{p} - 7 \geq 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \left| \frac{r}{p} - 7 \right| \geq 4\sqrt{3} \quad \text{જવાબ : (A)}$$

- (56) બે દ્વિઘાત સમીકરણો $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ અને $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ ને એક બીજ સામાન્ય (સમાન) હોય તો $(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1)$ ની કિંમત હોય. (IIT 1992)

(A) $-(a_1c_2 - a_2c_1)^2$ (B) $(a_1a_2 - c_1c_2)^2$ (C) $(a_1c_1 - a_2c_2)^2$ (D) $(a_1c_2 - a_2c_1)^2$

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણો $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ અને $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ નું એક સામાન્ય બીજ α છે.

$$\therefore a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0 \text{ તથા } a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ b_1 & c_1 & 0 \\ b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\therefore \alpha^2 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad \alpha = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \left(\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)^2$$

$$\therefore (b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1) = (a_1c_2 - a_2c_1)^2 \quad \text{જવાબ : (D)}$$

(57) દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + px + 8 = 0$ નાં બે બીજ વચ્ચેનો તફાવત 2 હોય, તો p ની કિંમત હોય.
(IIT 1992)

- (A) ± 2 (B) ± 4 (C) ± 6 (D) ± 8

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + px + 8 = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

$$\therefore \alpha + \beta = -p \text{ તથા } \alpha\beta = 8. \text{ વળી, } \alpha - \beta = 2 \text{ આપેલ છે.}$$

$$\therefore 2\alpha = 2 - p. \text{ આથી } \alpha - 2 = \beta \text{ પરથી } \frac{2-p}{2} - 2 = \beta.$$

$$\text{આથી } \frac{-p-2}{2} = \beta$$

$$\text{હવે } \alpha\beta = 8 \text{ માં } \alpha \text{ તથા } \beta \text{ની કિંમતો મૂકતાં, } \left(\frac{2-p}{2} \right) \left(\frac{-p-2}{2} \right) = 8$$

$$\therefore (p+2)(p-2) = 32$$

$$\therefore p^2 - 4 = 32 \text{ આથી } p^2 = 36. \text{ આથી } p = \pm 6$$

જવાબ : (C)

(58) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ નાં બે બીજ સમાન હોય તો a, b, c શ્રેણીમાં હોય.
(IIT : 1993)

- (A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : $\alpha = 1$ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આથી $\beta = 1$. આથી $\alpha\beta = 1$

$$\therefore \frac{c(a-b)}{a(b-c)} = 1$$

$$\therefore ca - bc = ab - ac$$

$$\therefore 2ac = b(a+c)$$

$$\therefore b = \frac{2ac}{a+c}$$

$$\therefore a, b, c \text{ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય.}$$

જવાબ : (C)

(59) k ની કિંમત માટે દ્વિઘાત સમીકરણ $kx^2 + 1 = kx + 3x - 11x^2$ નાં બીજ વાસ્તવિક તથા સમાન હોય.

(IIT : 1993)

- (A) $-11, -3$ (B) $5, 7$ (C) $5, -7$ (D) $7, -5$

ઉકેલ : સમીકરણ $kx^2 + 1 = kx + 3x - 11x^2$ આપેલ છે.

$$\therefore (11+k)x^2 - (k+3)x + 1 = 0 \text{ નાં બીજ વાસ્તવિક તથા સમાન છે.}$$

$$\therefore D = (k+3)^2 - 4(k+11) = 0$$

$$\therefore k^2 + 2k - 35 = 0$$

$$\therefore (k+7)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = -7 \text{ અથવા } 5$$

જવાબ : (C)

- (60) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - bx + c = 0$ નાં બીજ બે ક્રમિક પૂર્ણાંકો હોય, તો $b^2 - 4c = \dots$ (AIEEE : 2005)
 (A) -2 (B) 2 (C) 3 (D) 1

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - bx + c = 0$ નાં બીજ α અને β છે, જે બે ક્રમિક પૂર્ણાંકો છે.

$\therefore \beta = \alpha + 1, \quad \alpha \in \mathbb{Z}$	બીજ રીત : $ \alpha - \beta = 1$ $\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$ $\Rightarrow b^2 - 4c = 1$
વળી, $\alpha + \beta = b$ $\alpha\beta = c$	
$\therefore \alpha + \alpha + 1 = b$ તથા $\alpha(\alpha + 1) = c$	
$\therefore 2\alpha + 1 = b$	

$\therefore b^2 - 4c = (2\alpha + 1)^2 - 4\alpha(\alpha + 1) = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 - 4\alpha^2 - 4\alpha = 1$ **જવાબ : (D)**

- (61) દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - (a - 2)x - a - 1 = 0$ નાં બીજનાં વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ કિંમત ધારણ કરે તો $a = \dots$ (AIEEE : 2005)
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - (a - 2)x - a - 1 = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

$\alpha^2 + \beta^2$ ન્યૂનતમ કિંમત ધારણ કરે છે.

અહીં $\alpha + \beta = a - 2$ તથા $\alpha\beta = -(a + 1)$ છે.

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (a - 2)^2 + 2(a + 1) \\ &= a^2 - 2a + 6 = (a - 1)^2 + 5 \geq 5 \end{aligned}$$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2$ ની ન્યૂનતમ કિંમત જો $a - 1 = 0$ હોય તો 5 થાય.

$\therefore a = 1$ **જવાબ : (B)**

- (62) ΔPQR માં જો $m\angle R = \frac{\pi}{2}$, હોય તથા સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ (જ્યાં $a \neq 0$) નાં બીજ $\tan\left(\frac{P}{2}\right)$ તથા $\tan\left(\frac{Q}{2}\right)$ હોય, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ? (AIEEE : 2005)
 (A) $a = b + c$ (B) $b = c$ (C) $b = a + c$ (D) $c = a + b$

ઉકેલ : અહીં સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\tan\left(\frac{P}{2}\right)$ અને $\tan\left(\frac{Q}{2}\right)$ છે.

$$\therefore \tan\left(\frac{P}{2}\right) + \tan\left(\frac{Q}{2}\right) = \frac{-b}{a}; \text{ તથા } \left(\tan\left(\frac{P}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{Q}{2}\right)\right) = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{P}{2}\right) + \tan\left(\frac{Q}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{P}{2}\right)\tan\left(\frac{Q}{2}\right)} = \frac{\frac{-b}{a}}{1 - \frac{c}{a}} = \frac{-b}{a - c} \quad (1)$$

હવે, ΔPQR માં $m\angle P + m\angle Q + m\angle R = \pi$

$$\therefore m\angle P + m\angle Q = \pi - \frac{\pi}{2} \quad (m\angle R = \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore m\angle P + m\angle Q = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\therefore (1) \text{ અને } (2) \text{ પરથી, } \tan \frac{P+Q}{2} = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{-b}{a-c}$$

$$\therefore 1 = \frac{-b}{a-c}$$

$$\therefore a - c = -b$$

$$\therefore c = a + b$$

જવાબ : (D)

(63) જો x કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો $\frac{3x^2+9x+17}{3x^2+9x+7}$ ની મહત્તમ કિંમત હોય. (AIEEE : 2006)

(A) $\frac{1}{4}$

(B) 1

(C) 41

(D) $\frac{17}{7}$

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{3x^2+9x+17}{3x^2+9x+7} = y$

$$\therefore 3x^2 + 9x + 17 = 3x^2y + 9xy + 7y$$

$$\therefore 3x^2 (y-1) + 9x (y-1) + 7y - 17 = 0$$

હવે x કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોવાથી, $D = b^2 - 4ac \geq 0$ હોય જ.

$$\therefore 81 (y-1)^2 - 12 (y-1) (7y-17) \geq 0$$

$$\therefore 81 (y^2 - 2y + 1) - 12 (7y^2 - 24y + 17) \geq 0$$

$$\therefore -y^2 + 42y - 41 \geq 0$$

$$\therefore y^2 - 42y + 41 \leq 0$$

$$\therefore (y-1) (y-41) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq y \leq 41$$

$$\therefore y = \frac{3x^2+9x+17}{3x^2+9x+7} \text{ ની મહત્તમ કિંમત } 41 \text{ હોય.}$$

બીજી રીત :

$$\frac{3x^2+9x+17}{3x^2+9x+7} = \frac{3x^2+9x+7+10}{3x^2+9x+7}$$

$$= 1 + \frac{10}{3x^2+9x+7}$$

$3x^2 + 9x + 7$ ની ન્યૂનતમ કિંમત

$$\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{84-81}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{માંગેલ મહત્તમ કિંમત} = 1 + \frac{10}{\frac{1}{4}} = 1+40 = 41$$

જવાબ : (C)

(64) દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ નાં બંને બીજ $m \in \dots\dots$ માટે -2 થી મોટા પરંતુ 4 થી નાનાં હોય.

(AIEEE : 2006)

(A) $(-2, 0)$

(B) $(3, \infty)$

(C) $(-1, 3)$

(D) $(1, 4)$

ઉકેલ : $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$

$$(x-m)^2 = 1 \text{ આથી } x-m \pm 1$$

$$x = m+1 \text{ અથવા } x = m-1$$

હવે $-2 < x < 4$ આપેલ છે. આથી $-2 < m-1 < m+1 < 4$

$$\therefore m > -1 \text{ તથા } m < 3$$

$$\therefore m \in (-1, 3) \text{ મળે.}$$

જવાબ : (C)

(65) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બંને બીજ અનુક્રમે $\tan 30^\circ$ તથા $\tan 15^\circ$ હોય તો $2 + q - p = \dots\dots$

(AIEEE : 2006)

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

ઉકેલ : $x^2 + px + q = 0$ નાં બંને બીજ અનુક્રમે $\tan 30^\circ$ તથા $\tan 15^\circ$ છે.

$$\therefore \tan 30^\circ + \tan 15^\circ = -p \quad \text{તથા} \quad (\tan 30^\circ)(\tan 15^\circ) = q$$

$$\text{વળી, } \tan 45^\circ = \tan (30^\circ + 15^\circ) = \frac{\tan 30^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 15^\circ}$$

$$\therefore 1 = \frac{-p}{1-q}$$

$$\therefore 1 - q = -p. \quad \text{આથી} \quad q - p = 1. \quad \text{આથી} \quad 2 + q - p = 3$$

જવાબ : (D)

(66) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $bx^2 + cx + a = 0$ નાં બીજ સંકર હોય તો બહુપદી $3b^2x^2 + 6bcx + 2c^2 = \dots\dots$ હોય.

(AIEEE 2009)

$$(A) > 4ab$$

$$(B) < 4ab$$

$$(C) > -4ab$$

$$(D) < -4ab$$

ઉકેલ : દ્વિઘાત સમીકરણ $bx^2 + cx + a = 0$ નાં બીજ સંકર છે.

$$\therefore D = c^2 - 4ab < 0. \quad \text{આથી} \quad c^2 < 4ab$$

$$\therefore -c^2 > -4ab$$

હવે, $3b^2x^2 + 6bcx + 2c^2$ માટે, $3b^2 > 0$ હોવાથી,

$$\text{બહુપદીની ન્યૂનતમ કિંમત} \frac{4(3b^2)(2c^2) - 36b^2c^2}{4(3b^2)} = \frac{24b^2c^2 - 36b^2c^2}{12b^2} = \frac{-12b^2c^2}{12b^2} = -c^2 > -4ab \quad \text{જવાબ : (C)}$$

(67) સમીકરણ $e^{\sin x} - e^{-\sin x} - 4 = 0$ ને (AIEEE : 2012)

(AIEEE : 2012)

(A) બરાબર બે વાસ્તવિક બીજ હોય.

(B) એક પણ વાસ્તવિક બીજ ન હોય.

(C) બરાબર એક જ વાસ્તવિક બીજ હોય.

(D) બરાબર ચાર વાસ્તવિક બીજ હોય.

ઉકેલ : $e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 4$ આપેલ છે.

$$\text{ધારો કે } e^{\sin x} = m$$

$$\therefore m - \frac{1}{m} = 4. \quad \text{આથી} \quad m^2 - 4m - 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-1)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore e^{\sin x} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$e^{\sin x}$ ની મહત્તમ કિંમત e એ $2 + \sqrt{5}$ તો નહિ જ થાય.

$$\text{વળી, } e^{\sin x} > 0 > 2 - \sqrt{5}$$

$\therefore$ એક પણ વાસ્તવિક બીજ ન મળે.

જવાબ : (B)

(68) સમીકરણ $2x^3 + 3x + k = 0$ ને બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ $[0, 1]$ માં હોય, તો k ની કિંમત હોય.

(JEE-main : 2013)

(A) 1 તથા 2 ની વચ્ચે

(B) 2 અને 3 ની વચ્ચે

(C) -1 અને 0 ની વચ્ચે

(D) અસ્તિત્વ ન ધરાવતી

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 2x^3 + 3x + k = 0$ આપેલ છે.

$$f'(x) = 6x^2 + 3$$

હવે સમીકરણ બે કે વધુ વાસ્તવિક બીજ ધરાવે તો રોલના પ્રમેયથી તેમની વચ્ચેના કોઈક x માટે $f'(x) = 0$ હોય.

પરંતુ $6x^2 + 3 > 0$

$\therefore k$ ની કોઈપણ કિંમત માટે બે કે વધુ ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ શક્ય ન બને.

જવાબ : (D)

- (69) સમીકરણો $x^2 + 2x + 3 = 0$ અને $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ના બંને બીજ સામાન્ય હોય તો $a : b : c =$

(JEE-main : 2013)

(A) $1 : 2 : 3$

(B) $3 : 2 : 1$

(C) $1 : 3 : 2$

(D) $3 : 1 : 2$

ઉકેલ : સમીકરણના બંને બીજ સામાન્ય હોય તો,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\therefore \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$$

$$\therefore a : b : c = 1 : 2 : 3$$

જવાબ : (A)

- (70) જો $a \in \mathbb{R}$ હોય અને સમીકરણ $-3(x - [x])^2 + 2(x - [x]) + a^2 = 0$ ને પૂર્ણાંક ઉકેલ ન હોય તો a ની શક્ય કિંમતો અંતરાલમાં હોય

(JEE-main : 2014)

(A) $(-1, 0) \cup (0, 1)$

(B) $(1, 2)$

(C) $(-2, -1)$

(D) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

ઉકેલ : $-3(x - [x])^2 + 2(x - [x]) + a^2 = 0$

$$\therefore -3\{x\}^2 + 2\{x\} + a^2 = 0$$

$$\therefore \{x\} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)a^2}}{2(-3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12a^2}}{-6} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \neq 0 \text{ કારણ કે } x \text{ પૂર્ણાંક નથી}$$

આથી $a \neq 0$

$$\text{હવે } 0 < \{x\} < 1 \text{ હોવાથી, } 0 < \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3a^2}}{3} < 1$$

$$\therefore 0 < 1 + \sqrt{1 + 3a^2} < 3$$

$$(1 - \sqrt{1 + 3a^2} < 0)$$

$$\therefore -1 < \sqrt{1 + 3a^2} < 2$$

$$\text{એટલે કે } 0 \leq \sqrt{1 + 3a^2} < 2.$$

$$\therefore 1 + 3a^2 < 4$$

$$\therefore a^2 < 1$$

$$\therefore a \in (-1, 1). \text{ વળી, } a \neq 0$$

$$\therefore a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

જવાબ : (A)

- (71) જો સમીકરણ $px^2 + qx + r = 0$ નાં બીજ α અને β હોય (જ્યાં $p \neq 0$) તથા p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તેમજ

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 4 \text{ હોય તો } |\alpha - \beta| = \dots\dots$$

(JEE-main : 2014)

(A) $\frac{\sqrt{61}}{9}$

(B) $\frac{2\sqrt{17}}{9}$

(C) $\frac{\sqrt{34}}{9}$

(D) $\frac{2\sqrt{13}}{9}$

ઉકેલ : અહીં આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $px^2 + qx + r = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-q}{p} \quad \text{તથા} \quad \alpha\beta = \frac{r}{p}$$

વળી, p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં છે. આથી $2q = p + r$ (1)

$$\text{હવે, } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 4. \quad \text{આથી } \alpha + \beta = 4\alpha\beta$$

$$\therefore \frac{-q}{p} = \frac{4r}{p}$$

$$\therefore q = -4r \quad (2)$$

$$\therefore |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{\frac{q^2}{p^2} - \frac{4r}{p}} \quad (3)$$

$$\text{હવે, (1) તથા (2) પરથી, } \frac{p+r}{2} = -4r \quad \text{આથી } p + r = -8r \quad \therefore 9r = -p$$

$$\therefore \frac{r}{p} = \frac{-1}{9} \quad (4)$$

$$(3) \text{ પરથી, } |\alpha - \beta| = \sqrt{\frac{16r^2}{p^2} - \frac{4r}{p}} = \sqrt{\frac{16+36}{81}} = \frac{2\sqrt{13}}{9} \quad \text{જવાબ : (D)}$$

(72) વાસ્તવિક સહગુણકોવાળું દ્વિઘાત સમીકરણ $p(x) = 0$ માત્ર શુદ્ધ કાલ્પનિક બીજ ધરાવે તો સમીકરણ $p(p(x)) = 0$ માટે નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ? (JEE advanced : 2014)

(A) માત્ર એક જ કાલ્પનિક બીજ થાય.

(B) બધાં જ વાસ્તવિક બીજ હોય.

(C) બે વાસ્તવિક તથા બે કાલ્પનિક બીજ હોય.

(D) ન કોઈ વાસ્તવિક કે ન કોઈ કાલ્પનિક બીજ હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $p(x) = ax^2 + b$ જ્યાં a અને b સમચિહ્ન છે.

$$\therefore p(p(x)) = a(ax^2 + b)^2 + b$$

જો $x \in \mathbb{R}$ કે $ix \in \mathbb{R}$ હોય તો $x^2 \in \mathbb{R}$

$$\therefore p(p(x)) \neq 0$$

$\therefore$ કોઈ વાસ્તવિક કે શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા $p(p(x)) = 0$ નું સમાધાન ન કરે.

$\therefore$ કોઈ વાસ્તવિક કે શુદ્ધ કાલ્પનિક બીજ ન હોય.

જવાબ : (D)

(73) સમીકરણ $x^2 - 6x - 2 = 0$ નાં બીજ α અને β છે. જો $a_n = \alpha^n - \beta^n$; $n \geq 1$ હોય તો $\frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9} = \dots\dots$

(JEE-main : 2014)

(A) 6

(B) -6

(C) 3

(D) -3

ઉકેલ : $x^2 - 6x - 2 = 0$

$$\therefore x^{10} - 6x^9 - 2x^8 = 0$$

$$\text{જો સમીકરણનાં બીજ } \alpha \text{ અને } \beta \text{ હોય, તો } \alpha^{10} - 6\alpha^9 - 2\alpha^8 = 0 \quad (1)$$

$$\text{તથા } \beta^{10} - 6\beta^9 - 2\beta^8 = 0 \quad (2)$$

(1) માંથી (2) બાદ કરતાં,

$$\alpha^{10} - \beta^{10} - 6(\alpha^9 - \beta^9) - 2(\alpha^8 - \beta^8) = 0$$

$$\therefore a_{10} - 6a_9 - 2a_8 = 0$$

$$\therefore a_{10} - 2a_8 = 6a_9$$

$$\therefore \frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9} = 3$$

જવાબ : (C)

એક કરતાં વધુ વિકલ્પો સાચા હોય તેવા બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(74) જો સમીકરણો $x^2 - ax + b = 0$ અને $x^2 + bx - a = 0$ ને એક બીજ સામાન્ય હોય, તો નીચેનામાંથી શું સત્ય બને ?

(IIT : 1986)

(A) $a = b$

(B) $a = -b$

(C) $a + b = 1$

(D) $a - b = 1$

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણો $x^2 - ax + b = 0$ તથા $x^2 + bx - a = 0$ નું સામાન્ય બીજ α છે.

$$\therefore \alpha^2 - a\alpha + b = 0 \text{ અને } \alpha^2 + b\alpha - a = 0$$

$$\therefore -a\alpha + b = b\alpha - a$$

$$\therefore a + b = (a\alpha + b\alpha)$$

$$\therefore (a + b) = \alpha(a + b)$$

$$\therefore (a + b)(1 - \alpha) = 0$$

$$\therefore a + b = 0 \text{ અથવા } \alpha = 1$$

$$\therefore a = -b \text{ અથવા } 1 - a + b = 0$$

$$\therefore a - b = 1 \text{ અથવા } a = -b$$

જવાબ : (B), (D)

(75) જો સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બીજ p અને q હોય, તો p ની કિંમત હોઈ શકે.

(IIT : 1995)

(A) 1

(B) 0

(C) $\frac{-1}{2}$

(D) -2

ઉકેલ : સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બીજ p તથા q છે.

$$\therefore p^2 + p^2 + q = 0 \text{ તથા } q^2 + pq + q = 0$$

$$\therefore 2p^2 + q = 0 \text{ અને } q(p + q + 1) = 0$$

$$\therefore 2p^2 + q = 0 \text{ અને } (q = 0 \text{ અથવા } q = -p - 1)$$

$$q = 0 \text{ લેતાં, } 2p^2 + q = 0 \text{ પરથી, } p = 0 \text{ મળે.}$$

$$q = -p - 1 \text{ લેતાં, } 2p^2 - p - 1 = 0$$

$$\therefore (2p + 1)(p - 1) = 0$$

$$\therefore p = 0, 1 \text{ અથવા } \frac{-1}{2} \text{ શક્ય બને.}$$

જવાબ : (A), (B), (C)

(76) $2^{\cos 2x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - 4$ હોય તો $x = \dots\dots$ જ્યાં $x \in [0, \pi]$

(A) 0

(B) π

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $2^{\cos 2x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - 4$ આપેલ છે.

$$\therefore 2^{2\cos^2 x - 1} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - 4$$

$$\therefore \frac{2^{2m}}{2} = 3 \cdot 2^m - 4 \quad (\cos^2 x = m \text{ ધારતી})$$

$$\therefore (2^m)^2 = 3 \cdot 2 \cdot 2^m - 8$$

$$\therefore (2^m)^2 - 6 \cdot 2^m + 8 = 0$$

$$\therefore (2^m - 2)(2^m - 4) = 0$$

$$\therefore 2^m = 2 \text{ અથવા } 2^m = 4$$

$$\therefore m = 1 \text{ અથવા } m = 2$$

$$\therefore \cos^2 x = 1 \text{ અથવા } \cos^2 x = 2 \quad \text{પરંતુ } |\cos^2 x| \leq 1$$

$$\therefore \cos^2 x = 1$$

$$\therefore \cos x = \pm 1$$

$$\therefore x = 0 \text{ કે } \pi \text{ મળે.}$$

જવાબ : (A), (B)

(77) જો $7^{\log_7(x^2 - 4x + 5)} = x - 1$ હોય તો x ની શક્ય ક્રિમતો હોય. (IIT : 1990)

(A) 2

(B) 3

(C) 7

(D) -3, -2

ઉકેલ : $7^{\log_7(x^2 - 4x + 5)} = x - 1$

$$\therefore x^2 - 4x + 5 = x - 1$$

$$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\therefore (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ અથવા } x = 3$$

જવાબ : (A), (B)

(78) જો $0 \leq x \leq \pi$ માટે $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10$ હોય તો $x = \dots\dots$

(A) $\frac{\pi}{4}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$

(D) $\frac{3\pi}{4}$

ઉકેલ : $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10$

$$\therefore 16^{\sin^2 x} + 16 \cdot 16^{-\sin^2 x} = 10$$

$$\therefore \left(16^{\sin^2 x}\right)^2 - 10 \cdot 16^{\sin^2 x} + 16 = 0$$

$$\text{ધારે } 16^{\sin^2 x} = m$$

$$\therefore m^2 - 10m + 16 = 0$$

$$\therefore (m - 8)(m - 2) = 0$$

$$\therefore m = 8 \text{ અથવા } m = 2$$

$$\therefore 16^{\sin^2 x} = 8 \text{ અથવા } 16^{\sin^2 x} = 2$$

$$\therefore 2^{4\sin^2 x} = 2^3 \text{ અથવા } 2^{4\sin^2 x} = 2$$

$$\therefore 4 \sin^2 x = 3 \text{ અથવા } 4 \sin^2 x = 1. \text{ આથી } \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ અથવા } \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{પરંતુ } x \in [0, \pi] \text{ હોવાથી, } \sin x > 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ અથવા } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ અથવા } x = \frac{\pi}{6}$$

જવાબ : (B), (C)

(79) જો $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ હોય તો $ab + bc + ca \in \dots\dots$ હોઈ શકે. (IIT : 1984)

- (A) $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ (B) $[-1, 2]$ (C) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ (D) $\left[1, \frac{1}{2}\right]$

ઉકેલ : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq 1 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\therefore \frac{-1}{2} \leq (ab + bc + ca)$$

$$\therefore ab + bc + ca \geq \frac{-1}{2}$$

$$\therefore ab + bc + ca \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \text{ અથવા } \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \text{ હોઈ શકે.}$$

જવાબ : (A), (C)

વિભાગ B

પૂર્ણાંક જવાબ હોય તેવા બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(80) જો $x = 2 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$ હોય તો $x^3 - 6x^2 + 6x$ ની કિંમત $\dots\dots$ હોય.

- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{2}{3}$ (D) 3

ઉકેલ : $x = 2 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$ આપેલ છે.

$$\therefore x - 2 = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \quad (1)$$

$$\therefore (x - 2)^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

$$\therefore x^3 - 8 - 6x(x - 2) = 2 + 2^2 + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\therefore x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 6 + 3 \cdot 2(x - 2) \quad ((1) \text{ પરથી})$$

$$\therefore x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 6 + 6x - 12$$

$$\therefore x^3 - 6x^2 + 6x = 2$$

જવાબ : (B)

(81) જો સમીકરણ $x^4 + (p - 3)x^3 - (3p - 5)x^2 + (2p - 9)x + 6 = 0$ નો એક અવયવ $x + 1$ હોય તો p ની કિંમત $\dots\dots$ હોય.

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) -4

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણનો એક અવયવ $x + 1$ હોવાથી,

$$1 - (3p - 5) + 6 = (p - 3) + (2p - 9)$$

$$\therefore 6p = 24$$

$$\therefore p = 4$$

જવાબ : (C)

(82) જો સમીકરણો $k(6x^2 + 3) + rx + 2x^2 - 1 = 0$ અને $6k(2x^2 + 1) + px + 4x^2 - 2 = 0$ નાં બંને બીજ સમાન હોય, તો $2r - p$ ની કિંમત $\dots\dots$ હોય.

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

ઉકેલ : સમીકરણો $k(6x^2 + 3) + rx + 2x^2 - 1 = 0$ આથી $(6k + 2)x^2 + rx + 3k - 1 = 0$

અને $(12k + 4)x^2 + px + 6k - 2 = 0$ નાં બંને બીજ સમાન છે.

$$\therefore \frac{6k+2}{12k+4} = \frac{r}{p} = \frac{3k-1}{6k-2} \quad \text{આથી } \frac{r}{p} = \frac{1}{2} \quad \text{આથી } 2r - p = 0$$

જવાબ : (A)

વિભાગ : C

નિષ્કર્ષ તથા કારકના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો અને બે વિધાનો હોય છે. વિધાન 1 નિષ્કર્ષ તથા વિધાન 2 કારક કહેવાય છે. વિકલ્પો (A), (B), (C) તથા (D) નીચે મુજબ હોય છે :

- (a) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.
- (b) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.
- (c) વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 અસત્ય છે.
- (d) વિધાન 1 અસત્ય છે તથા વિધાન 2 સત્ય છે.

(83) વિધાન : 1 સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજના વર્ગો એ દ્વિઘાત સમીકરણ $a^2x^2 + b^2x + c^2 = 0$ નાં બીજ છે.

વિધાન : 2 $a, b, c \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ જો $b^2 = ac$ અને $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ હોય તો a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

ઉકેલ : સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α, β હોય તો $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ તથા $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ થાય.

હવે α^2 તથા β^2 એ સમીકરણ $a^2x^2 + b^2x + c^2 = 0$ નાં બીજ છે.

$$\text{આથી } \alpha^2 + \beta^2 = \frac{-b^2}{a^2} \quad \text{તથા } \alpha^2\beta^2 = \frac{c^2}{a^2} \quad \text{થાય.}$$

$$\therefore (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{-b^2}{a^2} \quad \text{આથી } \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{-b^2}{a^2} \quad (\alpha + \beta = \frac{-b}{a}; \alpha\beta = \frac{c}{a})$$

$$\therefore \frac{2b^2}{a^2} = \frac{2ac}{a^2}$$

$$\therefore b^2 = ac$$

$\therefore a, b, c$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore$ વિધાન 1 તથા વિધાન 2 સત્ય છે તેમજ વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(84) વિધાન : 1 સમીકરણ $x^2 - px + q = 0$ α, β એ $|\alpha - \beta| = 1$ નું સમાધાન કરે છે.

વિધાન : 2 દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ના બીજનો તફાવત 1 છે.

ઉકેલ : $|\alpha - \beta| = 1$ લેતાં,

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = 1 \quad \text{આથી } (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$$

$$\therefore p^2 - 4q = 1$$

$$\therefore p^2 = 4q + 1$$

$$\therefore p^2 + 4q^2 = 4q^2 + 4q + 1 = (2q + 1)^2$$

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે.

$p = 5$ અને $q = 6$ માટે,

$$\therefore p^2 + 4q^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = (2q + 1)^2$$

$\therefore$ સમીકરણ $x^2 - 5x + 6 = 0$ નાં બીજ $|\alpha - \beta| = 1$ નું સમાધાન કરે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે તેમજ વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

