6 દ્વિપદી પ્રમેય

કેટલાક અગત્યના મુદ્દા

(1) પાસ્કલનો ત્રિકોણ $(1 + x)^n$ **માં** x^r **ના સહગુણકો** $(r = 0, 1, 2, 3.....n)$

$n = 1$					1		1				
$n = 2$				1		2		1			
$n = 3$			1		3		3		1		
$n = 4$		1		4		6		4		1	
$n = 5$	1		5		10		10		5		1
.	.	.	.	.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.	.	.	.	.			

- પ્રત્યેક હારનો પહેલો અને છેલ્લો ઘટક 1 છે તથા બાકીનો દરેક ઘટક તેની ઉપરની હારના પાસપાસેના બે ઘટકોનો સરવાળો છે.
- n મી હારમાં $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots \binom{n}{n}$ એમ $(n+1)$ ઘટકો છે.
- દરેક હારમાં ડાબી અને જમણી બાજુથી સમાન અંતરે જતાં સમાન સંખ્યા મળે છે.
- પાસ્કલના ત્રિકોણની n મી હારના ઘટકોનો સરવાળો $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ થાય છે.
- પાસ્કલના ત્રિકોણની n મી હારમાં આવેલ $r+1$ મો ઘટક $\binom{n}{r}$ નું મૂલ્ય દર્શાવે છે.

(2) દ્વિપદી પ્રમેય :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \qquad (n \in N)$$

(3) $(a + b)^n$ **ના વિસ્તરણમાં વ્યાપક પદ :**

$T_{r+1} = r + 1$ મું પદ $= \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \qquad (0 \le r \le n)$

(4) $(a + b)^n$ **ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ :**

(1) જો n યુગ્મ હોય, તો મધ્યમ પદ $= \frac{n}{2} + 1$ મું પદ $= T_{\frac{n}{2}+1} = \binom{n}{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$

(2) જો n અયુગ્મ હોય, તો મધ્યમ પદ $= \frac{n+1}{2}$ મું પદ અને $\frac{n+3}{2}$ મું પદ

$= T_{\frac{n+1}{2}} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}$ તથા $T_{\frac{n+3}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}$

અહીં બે મધ્યમ પદ મળે.

(5) $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણના ગુણધર્મો :

- વિસ્તરણમાં કુલ $n+1$ પદો છે.
- દરેક પદમાં a તથા bના ઘાતાંકોનો સરવાળો n છે.
- પદોના સહગુણકો $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots \binom{n}{n}$ છે. તેમને દ્વિપદી સહગુણકો કહે છે તથા બધા જ સહગુણકોનો સરવાળો 2^n થાય છે.
- વિસ્તરણમાં $r+1$ માં પદનો સહગુણક $= a^{n-r} b^r$ નો સહગુણક $= \binom{n}{r}$
- વિસ્તરણમાં છેલ્લેથી r મું પદ $= (b+a)^n$ ના વિસ્તરણમાં પહેલેથી r મું પદ $= \binom{n}{r-1} b^{n-r+1} a^{r-1}$

  $= (a + b)^n$ ના વિસ્તરણમાં પહેલેથી $n + 2 - r$ મું પદ
- વિસ્તરણમાં ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ જતાં a નો ઘાતાંક એક-એક ઘટે છે જ્યારે b નો ઘાતાંક એક-એક વધે છે.

(6) પરિણામો :

- $(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 - \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \dots + (-1)^r \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} a^0 b^n$
- $(a - b)^n$ ના વિસ્તરણમાં $r+1$ મું પદ $= T_{r+1} = (-1)^r \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$
- $(a - b)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$
- $(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n,\ n \in N = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$
- $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં $(r + 1)$ મું પદ $= T_{r+1} = \binom{n}{r} x^r$
- $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં $(r + 1)$ મા પદનો સહગુણક $= x^r$ નો સહગુણક $= \binom{n}{r}$
- $(1 - x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 - \binom{n}{3} x^3 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} x^n \ (n \in N)$

- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$

- $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = 2^{n-1}$

- $(a + b + c)^n$ ના વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા

  $= \Sigma (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ તથા સહગુણકોનો સરવાળો $= 3^n$

- $\binom{n}{r} : \binom{n}{r-1} = \frac{n-r+1}{r}$

- $(x + y)^n + (x - y)^n = 2\left[\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{4} x^{n-4}y^4 + ...\right]$

- $(x + y)^n - (x - y)^n = 2\left[\binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{3} x^{n-3}y^3 + \binom{n}{5} x^{n-5}y^5 + ...\right]$

(7) સંમેય ઘાતાંક માટે દ્વિપદી શ્રેઢી :

$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + ...$ અનંત પદ

જ્યાં $n \in Q$ અને $|x| < 1$

ઉદાહરણ તરીકે

$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$ અનંત પદ (અનંત ગુણોત્તર શ્રેઢીનો સરવાળો)

$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ અનંત પદ

$(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...$ અનંત પદ

$(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$ અનંત પદ

$(1 + x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + ...$ અનંત પદ

$(1 - x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + ...$ અનંત પદ

(8) વ્યાપક પદ :

(1) $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં વ્યાપક પદ

$$T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} x^r, n \in Q$$

(2) $(1 - x)^n$ ના વિસ્તરણમાં વ્યાપક પદ

$$T_{r+1} = (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} x^r, n \in Q$$

(3) $(1 + x)^{-n}$ ના વિસ્તરણમાં વ્યાપક પદ

$$T_{r+1} = (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!} x^r = x^r (-1)^r \binom{n+r-1}{r}, \text{ જ્યાં } n \in \mathrm{N}$$

(4) $(1-x)^{-n}$ ના વિસ્તરણમાં વ્યાપક પદ

$$T_{r+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!} x^r, n \in \mathrm{Q}$$

$$= \binom{n+r-1}{r} x^r, \text{ જો } n \in \mathrm{N}$$

(9) $(1+x)^n = 1 + nx, |x| < 1, n \in \mathrm{Q}, x^2, x^3 \ldots$ અવગણતાં

$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2, |x| < 1, n \in \mathrm{Q}, x^3, x^4 \ldots$ અવગણતાં

(10) દરેક વ્યક્તિને વધુમાં વધુ n વસ્તુઓ મળે તે રીતે n સમાન વસ્તુઓ r વ્યક્તિઓને વહેંચવાના પ્રકાર

= $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^r$ માં x^n નો સહગુણક

= $(1-x)^r (1+x+x^2+\ldots+x^n)^r (1-x)^{-r}$ માં x^n નો સહગુણક

= $(1-x^{n+1})^r (1-x)^{-r}$ માં x^n નો સહગુણક

= $(1-x)^{-r}$ માં x^n નો સહગુણક

= $\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$

(11) દરેક વ્યક્તિને ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુ મળે તે રીતે, n સમાન વસ્તુઓ r વ્યક્તિઓને વહેંચવાના પ્રકાર

= $(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)^r$ ના વિસ્તરણ x^n નો સહગુણક

= $(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})^r$ ના વિસ્તરણ x^{n-r} નો સહગુણક

= $(1-x)^r (1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})^r (1-x)^{-r}$ ના વિસ્તરણ x^{n-r} નો સહગુણક

= $(1-x^n)^r (1-x)^{-r}$ ના વિસ્તરણમાં x^{n-r} નો સહગુણક

= $(1-x)^{-r}$ ના વિસ્તરણમાં x^{n-r} નો સહગુણક

= $\binom{r+n-r-1}{n-r} = \binom{n-1}{n-r} = \binom{n-1}{r-1}$

(12) દરેક વ્યક્તિને ઓછામાં ઓછી m વસ્તુઓ અને વધુમાં વધુ k વસ્તુઓ મળે, તે રીતે n સમાન વસ્તુઓ r વ્યક્તિઓને વહેંચવાના પ્રકારની સંખ્યા :

= $(x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \ldots + x^k)^r$ માં x^n નો સહગુણક

સુરેખ સમીકરણના ઉકેલોની સંખ્યા

સમીકરણ $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n$ ના અનૃણ પૂર્ણાંક ઉકેલોની સંખ્યા

= $(1 + x + x^2 + \ldots + + x^n)^r$ માં x^n નો સહગુણક

= $(1-x)^r (1+x+x^2+\ldots+x^n)^r (1-x)^{-r}$ માં x^n નો સહગુણક

$= (1 - x^{n+1})^r (1 - x)^{-r}$ માં x^n નો સહગુણક

$= (1 - x)^{-r}$ માં x^n નો સહગુણક

$= \binom{n+r-1}{n}$

(13) સરવાળો n થાય તેવી r, ($r \geq 2$) પૂર્ણ સંખ્યાઓના ક્રમિત ગણોની સંખ્યા :

$(1+x + x^2 + ... + x^n)^r$ ના વિસ્તરણમાં x^nનો સહગુણક

$= (1 - x)^r (1+x + x^2 + ... + x^n)^r (1 - x)^{-r}$ માં x^n નો સહગુણક

$= (1 - x^{n+1})^r (1 - x)^{-r}$ માં x^n નો સહગુણક

$= (1 - x)^{-r}$ માં x^n નો સહગુણક

$= \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$

(14) એક પ્રકારની m_1 વસ્તુઓ, બીજા પ્રકારની m_2 વસ્તુઓ અને આ જ રીતે r મા પ્રકારની m_r વસ્તુઓના સમૂહમાંથી n વસ્તુઓ પસંદ કરવાના પ્રકાર :

$= (1 + x + x^2 +...+ x^{m_1}) \times (1+ x + x^2 +...+ x^{m_2}) \times ... \times (1 + x + x^2 +...+ x^{m_r})$ માં x^n નો સહગુણક

$= (1 - x)^{-r}$ ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક $= \binom{n+r-1}{n}$

(15) એક પ્રકારની m_1 વસ્તુઓ, બીજા પ્રકારની m_2 વસ્તુઓ અને આ જ રીતે r મા પ્રકારની m_r વસ્તુઓના સમૂહમાંથી દરેક પ્રકારની ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુ પસંદ થાય જ એ રીતે n વસ્તુઓ પસંદ કરવાના પ્રકાર :

$= (x + x^2 +...+ x^{m_1}) (x + x^2 +...+ x^{m_2}) \times ... \times (x + x^2 +...+ x^{m_r})$ માં x^n નો સહગુણક

$= x^r (1+x + x^2 + ... + x^{m_1 -1}) (1+x + x^2 + ... + x^{m_2 -1}) \times ... \times (1+x + x^2 + ... + x^{m_r -1})$ માં x^n નો સહગુણક

$= (1+x + x^2 + ... + x^{m_1 -1}) (1+x + x^2 + ... + x^{m_2 -1}) \times ... \times (1+x + x^2 + ... + x^{m_r -1})$ માં x^{n-r} નો સહગુણક

$= (1 - x)^{-r}$ ના વિસ્તરણમાં x^{n-r} નો સહગુણક

$= \binom{r+n-r-1}{n-r} = \binom{n-1}{n-r} = \binom{n-1}{r-1}$

(16) બહુપદી પ્રમેય :

$(a_1 + a_2 +...+ a_m)^n = \sum \frac{n!}{n_1 ! n_2 ! ... n_m !} a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_m^{n_m}$ જ્યાં $n_1 + n_2 + n_3 + ...+ n_m = n$ તથા

$n_1, n_2, n_3, ... n_m$ અનૃણ પૂર્ણાંકો છે.

અહીં વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા $= \binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$

- $(a + b + c)^n$ ના વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા $= \binom{n+3-1}{3-1} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \sum (n+1)$

(17) દ્વિપદી સહગુણકો માટેનાં પરિણામો :

- જો દ્વિપદી સહગુણકો $\binom{n}{r-1}, \binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $r = \frac{1}{2}\left(n+\sqrt{n+2}\right)$
- $(1 + x)^{2n}$ માં x^n નો સહગુણક
  $= 2 \times \{(1 + x)^{2n-1}$ માં x^n નો સહગુણક$\}$
- $(ax + by)^n$ ના વિસ્તરણમાં $x = y = 1$ લેતાં સહગુણકોનો સરવાળો $(a + b)^n$ મળે.
- $(x + y)^n$, $n \in N$, $x > 0$, $y > 0$ ના વિસ્તરણમાં મોટામાં મોટું પદ

  $T_m = T_{m+1}$ જો $m = \frac{(n+1)y}{x+y}$ ધન પૂર્ણાંક હોય, તો

  $T_{[m]+1}$, જો $m = \frac{(n+1)y}{x+y}$ ધન પૂર્ણાંક ન હોય, તો
- $(ax + by + cz)^n$ ના વિસ્તરણમાં $x = y = z = 1$ લેતાં સહગુણકોનો સરવાળો $(a + b + c)^n$ મળે.

બહુ વિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) $(1 + x)^{-n}$ $(n \in N)$ ના વિસ્તરણમાં x^r નો સહગુણક ..... છે. $(|x| < 1)$

(A) $\binom{n+r-1}{n+1}$ (B) $\binom{n+r-1}{r-1}$ (C) $\binom{n+r-1}{r}$ (D) $(-1)^r \binom{n+r-1}{r}$

ઉકેલ : $(1 + x)^{-n}$ ના વિસ્તરણમાં વ્યાપક પદ

$$T_{r+1} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-r+1)}{r!}x^r$$

$$= \frac{(-1)^r\ n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}x^r$$

$$= (-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r$$

$\therefore$ x^r નો સહગુણક $(-1)^r \binom{n+r-1}{r}$ **જવાબ :** (D)

(2) $(1 - x)^{-n}$ $(n \in N)$ ના વિસ્તરણમાં x^r નો સહગુણક ..... છે. $(|x| < 1)$

(A) $\binom{n+r-1}{r}$ (B) $\binom{n-r+1}{r}$ (C) $\binom{n+r-1}{n}$ (D) $(-1)^r \binom{n+r-1}{r}$

ઉકેલ : $(1 - x)^{-n}$ ના વિસ્તરણમાં વ્યાપક પદ

$$T_{r+1} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-r+1)}{r!}(-x)^r$$

$$= \frac{(-1)^r\ n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)(-1)^r}{r!}x^r$$

$= \binom{n+r-1}{r} x^r$ $\qquad n \in N$

$\therefore$ x^r નો સહગુણક $= \binom{n+r-1}{r}$ **જવાબ :** (A)

(3) $(1 + 2x)^{-7}$ ના વિસ્તરણમાં x^{10} નો સહગુણક ..... છે.

(A) $2^{10}\binom{17}{10}$ (B) $2^{10}\binom{16}{10}$ (C) $2^{10}\binom{16}{9}$ (D) $\binom{16}{6}$

ઉકેલ : અહીં $T_{r+1} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r} (2x)^r$

$T_{11} = (-1)^{10} \binom{7+10-1}{10} 2^{10} x^{10}$ $\qquad [n = 7, r = 10]$

$= 2^{10}\binom{16}{10} x^{10}$

$\therefore$ x^{10} નો સહગુણક $= 2^{10}\binom{16}{10}$ **જવાબ :** (B)

(4) જો $(1 - x + x^2)^{-3} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ તો $\sum_{r=0}^{6} a_r = ...$ $(|x| < 1)$

(A) 38 (B) 10 (C) –10 (D) –7

ઉકેલ : $(1 - x + x^2)^{-3} = (1 + x)^3 (1 + x)^{-3} (1 - x + x^2)^{-3}$

$= (1 + x)^3 (1 + x^3)^{-3}$

$= (1 + 3x + 3x^2 + x^3) (1 - 3x^3 + 6x^6 - ...)$

$\therefore \sum_{r=0}^{6} a_r = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$= 1 + 3 + 3 + (-3 + 1) + 3(-3) + 3(-3) + (-3 + 6) = -10$ **જવાબ :** (C)

(5) $(1 + x)^{40}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{40}$ ના વિસ્તરણમાં x^{-2} નો સહગુણક ...... છે.

(A) $\binom{107}{38}$ (B) $\binom{80}{37}$ (C) $\frac{80!}{38!}$ (D) $\binom{80}{38}$

ઉકેલ : $(1 + x)^{40}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{40}$ ના વિસ્તરણમાં x^{-2} નો સહગુણક

$= x^{-40} (1 + x)^{80}$ ના વિસ્તરણમાં x^{-2} નો સહગુણક

$= (1 + x)^{80}$ ના વિસ્તરણમાં x^{38} નો સહગુણક $= \binom{80}{38}$ **જવાબ :** (D)

(6) $\sum_{r=0}^{n} r \binom{n}{r} \left(\frac{2}{7}\right)^{r} \left(\frac{5}{7}\right)^{n-r} = ...$

(A) 1 (B) $\frac{5n}{7}$ (C) $\frac{2n}{7}$ (D) 0

ઉકેલ : $\sum_{r=0}^{n} r \binom{n}{r} \left(\frac{2}{7}\right)^{r} \left(\frac{5}{7}\right)^{n-r}$

$$= \sum_{r=0}^{n} r \frac{n!}{(n-r)!r!} \left(\frac{2}{7}\right)^{r} \left(\frac{5}{7}\right)^{n-r}$$

$$= n \times \frac{2}{7} \sum_{r=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} \left(\frac{2}{7}\right)^{r-1} \left(\frac{5}{7}\right)^{n-r}$$

$$= \frac{2n}{7} \sum_{r=0}^{n} \binom{n-1}{r-1} \left(\frac{2}{7}\right)^{r-1} \left(\frac{5}{7}\right)^{n-r}$$

$$= \frac{2n}{7} \left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)^{n-1} = \frac{2n}{7}$$

જવાબ : (C)

નોંધ : વ્યાપકરૂપે જો $a + b = 1$ તો $\sum_{r=0}^{n} r \binom{n}{r} a^r b^{n-r} = na$

(7) જો $x > 0, y > 0$ તો $\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2x+3y}\right)^{r-1} = ...$

(A) $\frac{2x+3y}{2x+y}$ (B) $\frac{2x+3y}{x+3y}$ (C) $\frac{2x}{x+3y}$ (D) $\frac{3y}{2x+3y}$

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{x}{2x+3y} = a$ તો $0 < a < 1$ કારણ કે $x > 0, y > 0$

હવે $\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2x+3y}\right)^{r-1} = \sum_{r=1}^{\infty} a^{r-1} = a^0 + a^1 + a^2 + ...$ અનંત પદ

$$= \frac{1}{1-a} \qquad 0 < a < 1$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2x+3y}\right)}$$

$$= \frac{2x+3y}{2x+3y-x}$$

$$= \frac{2x+3y}{x+3y}$$

જવાબ : (B)

(8) $(a + 2b)^3 (2a - b)^4$ ના વિસ્તરણમાં a^3b^4 નો સહગુણક ...... છે.

(A) 15 (B) –15 (C) –16 (D) 593

ઉકેલ : $(a + 2b)^3 (2a - b)^4 = (a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3) \times (16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4)$

$\therefore$ a^3b^4 નો સહગુણક $= 1 \times 1 + 6 \times (-8) + 12 \times 24 + 8(-32)$

$= 1 - 48 + 288 - 256 = -15$ **જવાબ :** (B)

(9) $\sum_{r=0}^{70} \binom{70}{r} (x-5)^{70-r} 4^r$ ના વિસ્તરણમાં x^9 નો સહગુણક ...... છે.

(A) $-\binom{70}{8}$ (B) $\binom{70}{9}$ (C) $-\binom{70}{61}$ (D) 0

ઉકેલ : $\sum_{r=0}^{70} \binom{70}{r} (x-5)^{70-r} \cdot 4^r$

$= (x - 5 + 4)^{70} = (x-1)^{70} = (1-x)^{70}$ ના વિસ્તરણમાં વ્યાપક પદ T_{r+1} હોય તો,

$\therefore \quad T_{r+1} = \binom{70}{r} (-x)^r$

$r = 9$ લેતાં, $T_{10} = \binom{70}{9} (-x)^9 = -\binom{70}{61} x^9$

$\therefore$ x^9 નો સહગુણક $= -\binom{70}{61}$ **જવાબ :** (C)

(10) $1 \cdot \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + 2 \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + 3 \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}} + \ldots + 31 \frac{\binom{n}{31}}{\binom{n}{30}} = \ldots\ldots$

(A) $30n - 465$ (B) $15(2n - 31)$ (C) $31n - 15$ (D) $31(n - 15)$

ઉકેલ : $r \cdot \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = r \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} \times \frac{(n-r+1)!(r-1)!}{n!} = n - r + 1$

માગેલ સરવાળો $= \sum_{r=1}^{31} r \cdot \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = \sum_{r=1}^{31} (n - r + 1)$

$= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + (n-30) = \frac{1}{2}(31)(n - 30 + n)$

$= (31)(n - 15)$ **જવાબ :** (D)

(11) $\dfrac{\binom{2n}{1}}{n} + \dfrac{\binom{2n}{2}}{n^2} + \dfrac{\binom{2n}{3}}{n^3} + \ldots$ $2n$ પદ = ...

(A) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} - 1$ (B) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$ (C) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} - 1$ (D) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1} - 1$

ઉકેલ : $(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$

$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}\frac{1}{n} + \binom{2n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{2n}{2n}\frac{1}{n^{2n}}$

$\therefore \dfrac{\binom{2n}{1}}{n} + \dfrac{\binom{2n}{2}}{n^2} + \dfrac{\binom{2n}{3}}{n^3} + \ldots$ $2n$ પદ $= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} - 1 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} - 1$ **જવાબ :** (A)

(12) જો $|x|$ એટલો નાનો હોય કે જેથી $\left(\frac{1+3x}{1-2x}\right)^2 = 1 + kx$, તો $k =$ ......

(A) 2 (B) –10 (C) 10 (D) –2

ઉકેલ : $\left(\frac{1+3x}{1-2x}\right)^2 = (1 + 3x)^2 (1 - 2x)^{-2}$

$= (1 + 6x + 9x^2)(1 + 4x + \ldots)$

k = વિસ્તરણમાં x નો સહગુણક $= 1 \times 4 + 6 \times 1 = 10$ **જવાબ :** (C)

(13) જો ...... તો $\frac{1}{\sqrt[5]{7-3x}}$ નું x ની ઘાતના સ્વરૂપમાં વિસ્તરણ થઈ શકે.

(A) $|x| < \frac{7}{3}$ (B) $|x| < \frac{11}{3}$ (C) $|x| > \frac{7}{3}$ (D) $|x| > \frac{3!}{7}$

ઉકેલ : $\frac{1}{\sqrt[5]{7-3x}} = 7^{\frac{-1}{5}}\left(1-\frac{3x}{7}\right)^{\frac{-1}{5}}$ નું x ની ઘાતના સ્વરૂપમાં વિસ્તરણ થઈ શકે, તે માટેની શરત $\left|\frac{3x}{7}\right| < 1$ છે.

એટલે કે $|x| < \frac{7}{3}$ **જવાબ :** (A)

(14) જો $(1 + x)^n = \sum_{r=0}^{n} c_r\, x^r$ તો $\sum_{r=0}^{200} \frac{c_r}{r+1} =$ ......

(A) $\frac{2^{201}+1}{201}$ (B) $\frac{2^{200}-1}{200}$ (C) $\frac{2^{201}}{201}$ (D) $\frac{2^{201}-1}{201}$

ઉકેલ : $(1+x)^{200} = \sum_{r=0}^{200} c_r\ x^r$

$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + + c_{200} x^{200}$

$\therefore \int_0^1 (1+x)^{200}\, dx = \int_0^1 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{200} x^{200})\, dx$

$\therefore \left[\frac{(1+x)^{201}}{201}\right]_0^1 = \left[c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3} + ... + + c_{200} \frac{x^{201}}{201}\right]_0^1$

$\therefore \frac{2^{201}}{201} - \frac{1}{201} = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + ... + \frac{c_{200}}{201}$

$\therefore \sum_{r=0}^{200} \frac{c_r}{r+1} = \frac{2^{201}-1}{201}$ **જવાબ :** (D)

(15) $(1+x)^5 + (1+x)^6 + (1+x)^7 + ... + (1+x)^{50}$ માં x^{25} નો સહગુણક ...... છે.

(A) $\binom{50}{25}$ (B) $\binom{51}{26}$ (C) $\binom{51}{25} - 1$ (D) $\binom{46}{25}$

ઉકેલ : અહીં સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં 46 પદોનો સરવાળો છે. પ્રથમ પદ $(1+x)^5$ તથા સામાન્ય ગુણોત્તર $1+x$ છે.

$\therefore$ માંગેલ સહગુણક = $\frac{(1+x)^5 \{(1+x)^{46} - 1\}}{(1+x)-1}$ માં x^{25} નો સહગુણક

= $(1+x)^{51} - (1+x)^5$ માં x^{26} નો સહગુણક

= $\binom{51}{26} - 0 = \binom{51}{26}$ **જવાબ :** (B)

નોંધ : વ્યાપકરૂપે $\sum_{i=r}^{n} (1+x)^i$ માં x^m નો સહગુણક = $\binom{n+1}{m+1}$ જ્યાં $r \le m \le n$

(16) $(1-2x)^{-2}$ ના વિસ્તરણમાં x^7 નો સહગુણક ...... છે.

(A) 128 (B) 1024 (C) – 1024 (D) 512

ઉકેલ : $T_{r+1} = \frac{(-2)(-3)(-4)...(-2-r+1)}{r!} (-2x)^r$

$= \frac{(-1)^r (2)(3)(4)...(r+1)(-1)^r 2^r x^r}{r!}$

$= \frac{(-1)^{2r} (r+1) r! 2^r}{r!} x^r$

$= (r+1)\, 2^r x^r$

r = 7 લેતાં, $T_8 = (7+1)\, 2^7 x^7 = 8 \times 128 x^7 = 1024\ x^7$

x^7 નો સહગુણક = 1024 **જવાબ :** (B)

(17) $\dfrac{1}{\binom{101}{0}} - \dfrac{1}{\binom{101}{1}} + \dfrac{1}{\binom{101}{2}} - \dfrac{1}{\binom{101}{3}} + ...+ \dfrac{(-1)^{101}}{\binom{101}{101}}$ = ...

(A) $\dfrac{100}{\binom{101}{50}}$ (B) –1 (C) 1 (D) 0

ઉકેલ : S $= \left\{\dfrac{(-1)^0}{\binom{101}{0}} + \dfrac{(-1)^{101}}{\binom{101}{101}}\right\} + \left\{\dfrac{(-1)^1}{\binom{101}{1}} + \dfrac{(-1)^{100}}{\binom{101}{100}}\right\} + ... + \left\{\dfrac{(-1)^{50}}{\binom{101}{50}} + \dfrac{(-1)^{51}}{\binom{101}{51}}\right\}$

$= \left\{\dfrac{1-1}{\binom{101}{0}}\right\} + \left\{\dfrac{-1+1}{\binom{101}{1}}\right\} + ...+ \left\{\dfrac{1-1}{\binom{101}{50}}\right\} = 0 + 0 + ...+ 0 = 0$ **જવાબ :** (D)

નોંધ : વ્યાપકરૂપે $\sum\limits_{r=0}^{n} \dfrac{(-1)^r}{\binom{n}{r}} = 0$ (જો n અયુગ્મ હોય તો,)

(18) $2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + ...$ = ...

(A) $n \times 2^{n+1}$ (B) $n\, 2^{n-1}$ (C) $n \times 2^{n-2}$ (D) $n \times 2^{n+2}$

ઉકેલ : $2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + ...$

$= 2\,\dfrac{n(n-1)}{2} + 4\,\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + ...$

$= n\left[(n-1) + \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{120} + ...\right]$

$= n\left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{5} + ...\right] = n \times 2^{n-2}$

નોંધ : $\sum\limits_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2r\binom{n}{2r} = n \cdot 2^{n-2} \Rightarrow \sum\limits_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} r\binom{n}{2r} = n \cdot 2^{n-3}$ **જવાબ :** (C)

(19) $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં $\binom{n}{0}\binom{n}{r} + \binom{n}{1}\binom{n}{r+1} + ... + \binom{n}{n-r}\binom{n}{n}$ = ...

(A) $\binom{2n}{r-1}$ (B) $\binom{2n}{r}$ (C) $\binom{2n}{n-r}$ (D) $\binom{2n}{n-r+1}$

ઉકેલ : $(1 + x)^n \times (x + 1)^n = (1 + x)^{2n}$

$$\therefore \quad \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n \right] \times$$

$$\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n}x^0 \right]$$

$$= \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \ldots + \binom{2n}{r} x^r + \ldots + \binom{2n}{2n} x^{2n}$$

બંને બાજુ x^{n-r} ના સહગુણકો સરખાવતાં

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r} + \binom{n}{1}\binom{n}{r+1} + \ldots + \binom{n}{n-r}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n-r}$$

જવાબ : (C)

(20) $\binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + 3\binom{n}{3}^2 + \ldots + + n\binom{n}{n}^2 = \ldots\ldots$

(A) $\dfrac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$ (B) $n\binom{2n}{n}$ (C) $\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!}$ (D) $\dfrac{(2n-1)!}{n!}$

ઉકેલ : ધારો કે $S = 0\binom{n}{0}^2 + 1\binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + \ldots + + n\binom{n}{n}^2$ (1)

$$\therefore S = n\binom{n}{n}^2 + (n-1)\binom{n}{n-1}^2 + (n-2)\binom{n}{n-2}^2 + \ldots + 0\binom{n}{0}^2$$

$$= n\binom{n}{0}^2 + (n-1)\binom{n}{1}^2 + (n-2)\binom{n}{2}^2 + \ldots + 0\binom{n}{n}^2 \quad (2)$$

$$\therefore 2S = n\left[\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2\right]$$

$= n \times [(1 + x)^n (x + 1)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક]

$= n \times [(1 + x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક]

$$= n \times \binom{2n}{n}$$

$$= n \times \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$\therefore S = \frac{n \times 2n(2n-1)!}{2 \times n(n-1)!n(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$$

જવાબ : (A)

(21) જો $(1 + x)^{100} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{100}x^{100}$ તો $2^1 \frac{c_0}{1} + 2^2 \frac{c_1}{2} + 2^3 \frac{c_2}{3} + ... + 2^{101} \frac{c_{100}}{101} = ...$

(A) $\frac{2^{101} - 1}{101}$ (B) $\frac{3^{101} - 1}{101}$ (C) $\frac{3^{101}}{101}$ (D) $\frac{3^{101} + 1}{101}$

ઉકેલ : $\int_0^2 [c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{100}x^{100}]\, dx = \int_0^2 (1 + x)^{100}\, dx$

$$\therefore \left[c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3} + ... + c_{100} \frac{x^{101}}{101}\right]_0^2 = \left[\frac{(1+x)^{101}}{101}\right]_0^2$$

$$\therefore 2\, c_0 + \frac{2^2}{2} c_1 + \frac{2^3}{3} c_2 + ... + \frac{2^{101}}{101} c_{100} = \frac{3^{101} - 1}{101}$$

જવાબ : (B)

(22) $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r (a - r) \binom{n}{r} = ...$

(A) a (B) na (C) 0 (D) $a + 1$

ઉકેલ : $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r (a - r) \binom{n}{r} = (a - 0) \binom{n}{0} - (a - 1) \binom{n}{1} + (a - 2) \binom{n}{2} + ... + (-1)^n (a - n) \binom{n}{n}$

$$= a \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n \binom{n}{n}\right] + \left[\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - ... + (-1)^n n \binom{n}{n}\right] \quad \text{(i)}$$

હવે $(1 - x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - ... + (-1)^n \binom{n}{n} x^n$ (ii)

$x = 1$ લેતાં, $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n \binom{n}{n}$ (iii)

સમીકરણ (ii)નું બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$-n(1 - x)^{n-1} = -\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x - 3x^2 \binom{n}{3} + ... + (-1)^n nx^{n-1} \binom{n}{n}$$

$x = 1$ લેતાં, $0 = -\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + ... + (-1)^n n \binom{n}{n}$

$$\therefore 0 = \binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - ... - (-1)^n n \binom{n}{n} \quad \text{(iv)}$$

પરિણામ (i), (iii), (iv) પરથી

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r (a - r) \binom{n}{r} = a(0) + 0 = 0$$

જવાબ : (C)

(23) જો $\binom{n+1}{1}\binom{n+1}{2}\binom{n+1}{3}\ldots\binom{n+1}{n} = \ldots\ldots$

(A) $(n+1)^n \binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\binom{n}{n}$ (B) $n^n \binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\binom{n}{n}$

(C) $\frac{(n+1)^n}{n!}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\binom{n}{n}$ (D) $\frac{(n-1)^n}{n!}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\binom{n}{n}$

ઉકેલ : $\binom{n+1}{r} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = \frac{(n+1)\ n!}{(n+1-r)(n-r)!r!}$

$$= \frac{n+1}{n+1-r} \times \binom{n}{r}$$

$\therefore \binom{n+1}{1}\binom{n+1}{2}\binom{n+1}{3}\ldots\binom{n+1}{n}$

$= \frac{n+1}{n}\binom{n}{1} \times \frac{n+1}{n-1}\binom{n}{2} \times \frac{n+1}{n-2}\binom{n}{3} \times \ldots \times \frac{n+1}{1}\binom{n}{n}$

$= \frac{(n+1)^n}{n!} \times \binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\binom{n}{n}$ **જવાબ :** (C)

(24) જો $(1 + x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$ તો $c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}c_n = \ldots\ldots$

(A) $\frac{2}{n+1}$ (B) $\frac{2^{n+1}+1}{n+1}$ (C) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ (D) $\frac{1}{n+1}$

ઉકેલ : $c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}c_n$

$= \binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$

$= 1 - \frac{1}{2}n + \frac{n(n-1)}{6} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{n+1}\left[(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \ldots + (-1)^n\right]$

$= \frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} - \ldots + (-1)^n\binom{n+1}{n+1}\right]$

$$= \frac{1}{n+1}\left[1-\left\{\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}[1-(1-1)^{n+1}]$$

$$= \frac{1}{n+1}[1-0]$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

જવાબ : (D)

→ **બીજી રીત :**

$$(1-x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}x^n$$

$$= c_0 - c_1x + c_2x^2 - \ldots + (-1)^n c_nx^n$$

$$\therefore \int_0^1 (1-x)^n\, dx = \int_0^1 (c_0 - c_1x + c_2x^2 - \ldots + (-1)^n c_nx^n)\, dx$$

$$\therefore \left[\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[c_0\, x - c_1\frac{x^2}{2} + c_2\frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n\, \frac{c_nx^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\therefore 0 + \frac{1}{n+1} = c_0 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\therefore c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

જવાબ : (D)

(25) એક પરીક્ષક કોઈપણ પ્રશ્નમાં 2 થી ઓછા ગુણ આપ્યા સિવાય, 8 પ્રશ્નમાં 25 ગુણ કેટલી રીતે આપી શકે ?

(A) $\binom{16}{8}$ (B) ${}_{16}P_7$ (C) $\binom{17}{9}$ (D) $\binom{16}{7}$

ઉકેલ : માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા

= સરવાળો 25 થાય તેવી 1 કરતાં મોટી આઠ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ શોધવાના પ્રકારોની સંખ્યા

= $(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^8$ માં x^{25} નો સહગુણક

= $x^{16}(1 + x + x^2 + \ldots)^8$ માં x^{25} નો સહગુણક

= $(1 + x + x^2 + \ldots)^8$ માં x^9 નો સહગુણક

= $(1-x)^{-8}$ માં x^9 નો સહગુણક $(1 + x + x^2 + \ldots = (1-x)^{-1})$

$$= \binom{9+8-1}{9} = \binom{16}{9} = \binom{16}{7}$$

જવાબ : (D)

(26) 12 સમાન પેનો 5 વિદ્યાર્થીઓને કુલ કેટલી રીતે વહેંચી શકાય ?

(A) $\binom{11}{4}$ (B) $\binom{16}{4}$ (C) $\binom{16}{5}$ (D) ${}_{16}P_4$

ઉકેલ : માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા

= જેમનો સરવાળો 12 થાય તેવી 5 પૂર્ણ સંખ્યાઓ શોધવાના પ્રકારોની સંખ્યા

= $(1 + x + x^2 + ...+ x^{12})^5$ માં x^{12} નો સહગુણક

= $(1 - x)^5 (1 + x + x^2 + ...+ x^{12})^5 (1 - x)^{-5}$ માં x^{12} નો સહગુણક

= $(1 - x^{13})^5 (1 - x)^{-5}$ માં x^{12} નો સહગુણક

= $(1 - x)^{-5}$ માં x^{12} નો સહગુણક $[(1 - x^{13})^5 = 1 - 5x^{13} + 10x^{26} ...]$

= $\binom{12+5-1}{12}$ $[(1 - x)^{-r}$ માં x^n નો સહગુણક $= \binom{n+r-1}{n}, r \in N]$

= $\binom{16}{12} = \binom{16}{4}$ **જવાબ :** (B)

(27) એક રૂપિયાના 20 સિક્કા, બે રૂપિયાના 15 સિક્કા અને પાંચ રૂપિયાના 10 સિક્કામાંથી 4 સિક્કા કુલ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(A) 21 (B) 20 (C) 30 (D) 15

ઉકેલ : માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા

= $(1 + x + x^2 + ... + x^{20}) \times (1 + x + x^2 + ... + x^{15}) \times (1 + x + x^2 + ... + x^{10})$ માં x^4નો સહગુણક

= $\frac{(1-x^{21})}{1-x} \times \frac{(1-x^{16})}{1-x} \times \frac{(1-x^{11})}{1-x}$ માં x^4નો સહગુણક

= $(1 - x^{21}) (1 - x^{16}) (1 - x^{11}) (1 - x)^{-3}$ માં x^4નો સહગુણક

= $(1 - x)^{-3}$ માં x^4નો સહગુણક ($(1 - x^{21}) (1 - x^{16}) (1 - x^{11})$ ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ પદ 1 આવે બાકીનાં બધાં જ પદોમાં x નો ઘાતાંક 4 કરતાં મોટો જ હોય.)

= $\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2} = 15$ **જવાબ :** (D)

(28) ગણિત, ભૌતિક અને રસાયણ વિષયનાં પુસ્તકોના સમૂહમાં દરેક વિષયનાં ઓછામાં ઓછા 10 પુસ્તકો (ધોરણ-12ના) છે. આ સમૂહમાંથી 5 પુસ્તકો કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(A) 21 (B) 6 (C) 42 (D) 24

ઉકેલ : 5 પુસ્તકો પસંદ કરવાના કુલ પ્રકાર

= $(1 + x + x^2 + ...)^3$ માં x^5 નો સહગુણક

= $(1 - x)^{-3}$ માં x^5 નો સહગુણક $(1 + x + x^2 + ... = (1 - x)^{-1})$

$$= \binom{5+3-1}{5}$$

$$= \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$$

જવાબ : (A)

(29) અસંખ્ય લાલ, સફેદ, કાળા અને લીલા દડાઓમાંથી દરેક રંગના દડા આવે તે રીતે 11 દડા પસંદ કરવાના પ્રકાર કેટલા થાય ?

(A) 165 (B) 120 (C) 330 (D) અસંખ્ય

ઉકેલ : માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા

= $(x + x^2 + x^3 + ...)^4$ માં x^{11} નો સહગુણક

= $(1 + x + x^2 + ...)^4$ માં x^7 નો સહગુણક

= $(1 - x)^{-4}$ માં x^7 નો સહગુણક

$$= \binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

જવાબ : (B)

(30) એક વિદ્યાર્થી ત્રણ વિષયની પરીક્ષા આપે છે. દરેક વિષયના પેપર મહત્તમ n ગુણના છે. તે $2n$ ગુણ કેટલી રીતે મેળવી શકે ?

(A) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (B) $\frac{n(n+1)}{2}$ (C) $\binom{3n}{2n}$ (D) $n(n+1)(n+2)$

ઉકેલ : માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા

= $(1 + x + x^2 + ...+ x^n)^3$ માં x^{2n} નો સહગુણક

= $(1 - x)^3 (1 + x + x^2 + ...+ x^n)^3 (1 - x)^{-3}$ માં x^{2n} નો સહગુણક

= $(1 - x^{n+1})^3 (1 - x)^{-3}$ માં x^{2n} નો સહગુણક

= $(1 - 3x^{n+1} + ...)(1 - x)^{-3}$ માં x^{2n} નો સહગુણક

= $(1 - x)^{-3}$ માં x^{2n} નો સહગુણક $-3 \times (1 - x)^{-3}$ માં x^{2n-n-1} નો સહગુણક

$$= \binom{2n+3-1}{2n} - 3\binom{n-1+3-1}{n-1}$$

$$= \binom{2n+2}{2n} - 3\binom{n+1}{n-1} = \binom{2n+2}{2} - 3\binom{n+1}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2} - 3\,\frac{(n+1)n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)}{2}(4n + 2 - 3n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

જવાબ : (A)

(31) જો a અને b ધન પૂર્ણાંકો હોય, તો $\binom{a}{r} + \binom{a}{r-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{r-2}\binom{b}{2} + \ldots + \binom{b}{r} = \ldots\ldots$

(A) $\binom{a+b}{r+1}$ (B) $\binom{a+b}{r}$ (C) $\frac{(a+b)!}{r!}$ (D) $\frac{a!b!}{r!}$

ઉકેલ : $(1 + x)^a (1 + x)^b = (1 + x)^{a+b}$ નું બંને બાજુ વિસ્તરણ કરતાં,

$$\left[\binom{a}{0}+\binom{a}{1}x+\binom{a}{2}x^2+\ldots+\binom{a}{a}x^a\right]\left[\binom{b}{0}+\binom{b}{1}x+\binom{b}{2}x^2+\ldots+\binom{b}{b}x^b\right]$$

$$= \binom{a+b}{0} + \binom{a+b}{1}x + \binom{a+b}{2}x^2 + \ldots + \binom{a+b}{a+b}x^{a+b}$$

બંને બાજુ x^r નો સહગુણક સરખાવતાં,

$$\therefore \binom{a}{r}\binom{b}{0} + \binom{a}{r-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{r-2}\binom{b}{2} + \ldots + \binom{a}{0}\binom{b}{r} = \binom{a+b}{r}$$

$\therefore$ માંગેલ સરવાળો $= \binom{a+b}{r}$ **જવાબ :** (B)

(32) અસંખ્ય લાલ, પીળા અને વાદળી રંગના સમાન દડામાંથી 12 દડા પસંદ કરવાના પ્રકાર ...... છે.

(A) 105 (B) 55 (C) 91 (D) અસંખ્ય

ઉકેલ : માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા

$= (1 + x + x^2 + \ldots)^3$ માં x^{12} નો સહગુણક

$= (1 - x)^{-3}$ માં x^{12} નો સહગુણક ($1 + x + x^2 + \ldots$ અનંત પદ $= (1 - x)^{-1}$)

$= \binom{12+3-1}{12} = \binom{14}{12} = \binom{14}{2} = \frac{14\times13}{2} = 91$ **જવાબ :** (C)

(33) શબ્દ ASSASSINATION શબ્દના અક્ષરોમાંથી 4 અક્ષરો કુલ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(A) 60 (B) 72 (C) 80 (D) 71

ઉકેલ : S, A, N, I, T, O માંથી ચાર ભિન્ન અક્ષરો પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$

(ઉદાહરણ તરીકે SANI, AITO વગેરે.)

બે સમાન અને બે ભિન્ન અક્ષરો પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{4}{1}\binom{5}{2} = 40$

(ઉદાહરણ તરીકે SSAN, AATO, NIIO વગેરે.)

બે સમાન અક્ષરોની બે જોડ પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{4}{2} = 6$

(ઉદાહરણ તરીકે SSAA, NNII, AANN વગેરે.)

ત્રણ સમાન અક્ષરો અને એક અક્ષર અન્ય હોય તેવી પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા = $\binom{2}{1}\binom{5}{1} = 10$

(ઉદાહરણ તરીકે SSSA, AAAI, AAAN વગેરે.)

પસંદગીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા = 15 + 40 + 6 + 10 + 1 = 72 (1 ચારેય સમાન અક્ષર માટે) **જવાબ :** (B)

(34) $\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{12}\right) + \ldots$ અનંત પદ = ...

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $2\cdot\sqrt{2}+1$ (C) $2\cdot\sqrt{2}-1$ (D) $2\cdot\sqrt{2}$

ઉકેલ : $(1+x)^n - 1 = nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots$ અનંત પદ

$$= \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{12}\right) \ldots \text{ અનંત પદ}$$

$\therefore nx = \frac{3}{4}$ .... (i) અને $\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{15}{32}$ (ii)

(ii) ÷ (i) નો વર્ગ કરતાં, $\frac{n(n-1)x^2}{2n^2x^2} = \frac{15}{32}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{n-1}{n} = \frac{5}{3}$

$\therefore 3n - 3 = 5n.$ આથી $2n = -3 \Rightarrow n = -\frac{3}{2}$

(i) માં $n = -\frac{3}{2}$ મૂકતાં $\left(-\frac{3}{2}\right)x = \frac{3}{4}$. આથી $x = \frac{-1}{2}$

$\therefore (1+x)^n - 1 = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{2}} - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{2}} - 1 = 2^{\frac{3}{2}} - 1 = 2\cdot\sqrt{2} - 1$ **જવાબ :** (C)

(35) $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^3$ના વિસ્તરણમાં x^5 નો સહગુણક ...... છે.

(A) 15 (B) 18 (C) 21 (D) 24

ઉકેલ : $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^3 = \frac{(1-x)^3(1+x+x^2+x^3+x^4)^3}{(1-x)^3}$

$= (1 - x^5)^3 (1 - x)^{-3}$

$\therefore$ માંગેલ x^5 નો સહગુણક = [$(1 - x^5)^3$ માં x^5 નો સહગુણક] × [$(1 - x)^{-3}$ માં x^0 નો સહગુણક] + [$(1 - x^5)^3$ માં x^0 નો સહગુણક] × [$(1 - x)^{-3}$ માં x^5 નો સહગુણક]

$= -\binom{3}{1}\times(1) + (1)\times\binom{5+3-1}{5}$

[$\because (1-x)^{-k}, k \in N$ માં x^r નો સહગુણક $\binom{k+r-1}{r}$]

$= -3 + \binom{7}{5} = -3 + \binom{7}{2} = -3 + 21 = 18$ **જવાબ :** (B)

(36) સમીકરણ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 31$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in W$ ના ઉકેલોની સંખ્યા ...... છે.

(A) $\binom{34}{4}$ (B) $\binom{34}{3}$ (C) $\binom{35}{4}$ (D) $\binom{33}{2}$

ઉકેલ : માંગેલ ઉકેલોની સંખ્યા $= (1 + x + x^2 + ...+ x^{31})^4$ ના વિસ્તરણમાં x^{31} નો સહગુણક

$= \frac{(1-x)^4 (1+x+x^2+...+x^{31})^4}{(1-x)^4}$ માં x^{31} નો સહગુણક

$= (1 - x^{32})^4 (1 - x)^{-4}$ માં x^{31} નો સહગુણક

$= (1 - x)^{-4}$ માં x^{31} નો સહગુણક

$= \binom{31+4-1}{31}$ $\quad (1 - x)^{-n}$ માં x^r નો સહગુણક $= \binom{n+r-1}{r}$

$= \binom{34}{31} = \binom{34}{3}$ **જવાબ :** (B)

(37) સમીકરણ $x + y + z = 20$, $x \ge 1$, $y \ge 2$, $z \ge 3$, $x, y, z \in W$ ના ઉકેલોની સંખ્યા ...... છે.

(A) 210 (B) 136 (C) 120 (D) 124

ઉકેલ : માંગેલ ઉકેલોની સંખ્યા

$= (x^1 + x^2 + ...+ x^{20}) (x^2 + x^3 + ... + x^{20}) (x^3 + x^4 + ... + x^{20})$ માં x^{20} નો સહગુણક

$= x^6 (1 + x + ...+ x^{19}) (1 + x + ... + x^{18}) (1 + x + ... + x^{17})$ માં x^{20} નો સહગુણક

$= (1 + x + ...+ x^{19}) (1 + x + ... + x^{18}) (1 + x + ... + x^{17})$ માં x^{14} નો સહગુણક

$= \left(\frac{1-x^{20}}{1-x}\right) \left(\frac{1-x^{19}}{1-x}\right) \left(\frac{1-x^{18}}{1-x}\right)$ માં x^{14} નો સહગુણક

$= (1 - x^{20}) (1 - x^{19}) (1 - x^{18}) (1 - x)^{-3}$ માં x^{14} નો સહગુણક

$= (1 - x)^{-3}$ માં x^{14} નો સહગુણક

$= \binom{3+14-1}{14} = \binom{16}{14} = \binom{16}{2} = \frac{16 \times 15}{2} = 120$ **જવાબ :** (C)

(38) અસમતા $x + y + z \le 30$, ના અનૃણ પૂર્ણાંક ઉકેલોની સંખ્યા ...... છે.

(A) 5465 (B) 5456 (C) 5654 (D) 5646

ઉકેલ : અસમતા $x + y + z \le 30$, ના અનૃણ પૂર્ણાંક ઉકેલોની સંખ્યા $= x + y + z + a = 30$, ના અનૃણ પૂર્ણાંક ઉકેલોની સંખ્યા= $(1 + x^1 + x^2 + ...+ x^{30})^4$ માં x^{30} નો સહગુણક $= (1 - x)^4 \ (1 + x^1 + x^2 + ...+ x^{30})^4 (1 - x)^{-4}$ માં x^{30} નો સહગુણક

$= (1-x^{31})^4 (1-x)^{-4}$ માં x^{30} નો સહગુણક

$= (1-x)^{-4}$ માં x^{30} નો સહગુણક

$= \binom{4+30-1}{30} = \binom{33}{30} = \binom{33}{3} = \frac{33\times32\times31}{6} = 5456$ **જવાબ :** (B)

(39) 15 સમાન વસ્તુઓને ત્રણ પેટીમાં કુલ કેટલી રીતે મૂકી શકાય ? (દરેક પેટીમાં વધુમાં વધુ 15 વસ્તુ આવી શકે.)

(A) 91 (B) $_{15}P_3$ (C) 3^{15} (D) 136

ઉકેલ : અહીં દરેક પેટીમાં 0 અથવા 1 અથવા 2 ... અથવા 15 વસ્તુઓ મૂકી શકાય.

માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા

$= (1 + x + x^2 + ...+ x^{15})^3$ માં x^{15} નો સહગુણક

$= (1-x)^3 \ (1 + x + x^2 + ...+ x^{15})^3 (1-x)^{-3}$ માં x^{15} નો સહગુણક

$= (1-x^{16})^3(1-x)^{-3}$ માં x^{15} નો સહગુણક

$= (1-x)^{-3}$ માં x^{15} નો સહગુણક

$= \binom{15+3-1}{15} = \binom{17}{15} = \binom{17}{2} = \frac{17\times16}{2} = 136$ **જવાબ :** (D)

(40) જો $c_r = \binom{30}{r}$ તો $\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 + 8\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 + 27\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 + ... + 30^3\left(\frac{c_{30}}{c_{29}}\right)^2 = ...$

(A) 76808 (B) 76080 (C) 75880 (D) 76880

ઉકેલ : $\frac{c_r}{c_{r-1}} = \frac{\binom{30}{r}}{\binom{30}{r-1}} = \frac{30!}{(30-r)!r!} \times \frac{(30-r+1)!(r-1)!}{30!} = \frac{31-r}{r}$

માગેલ સરવાળો $= \sum_{r=1}^{30} r^3\left(\frac{c_r}{c_{r-1}}\right)^2$

$= \sum_{r=1}^{30} r^3\left(\frac{31-r}{r}\right)^2$

$= \sum_{r=1}^{30} (961 - 62r + r^2)$

$= \sum_{r=1}^{30} (961\,r - 62\,r^2 + r^3)$

$= \left[961\frac{n(n+1)}{2} - 62\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]_{n=30}$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\left(961 - \frac{124n}{3} - \frac{62}{3} + \frac{n^2+n}{2}\right)\right]_{n=30}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{5766 - 248n - 124 + 3n^2 + 3n}{6}\right)\right]_{n=30}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{12}\left(3n^2 - 245n + 5642\right)\right]_{n=30}$$

$= \frac{155}{2}(8342 - 7350) = \frac{155}{2}(992) = 155 \times 496 = 76880$ **જવાબ :** (D)

(41) $\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n}{r}\right) = ...$

(A) $n \cdot 2^{n-1}$ (B) $n \cdot 2^{n}$ (C) $2^{n-1} + n$ (D) $(n+1)\, 2^{n-1}$

ઉકેલ : $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + + \binom{n}{n}x^n$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2x\binom{n}{2} + ... + nx^{n-1}\binom{n}{n}$$

$x = 1$ લેતાં, $n \cdot 2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + ... + n\binom{n}{n}$

$$= \binom{n}{n-1} + 2\binom{n}{n-2} + ... + (n-1)\binom{n}{1} + n\binom{n}{0}$$

$$= n\binom{n}{0} + (n-1)\binom{n}{1} + ... + 2\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}$$

$$= \binom{n}{0} + \left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right) + \left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right) ... + \left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n-1}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{m-1}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n}{r}\right)$$

જવાબ : (A)

(42) $\sum_{r=0}^{9}\left\{(x+4)^{9-r}\cdot(x+3)^r\right\}$ માં x^5 નો સહગુણક ...... છે.

(A) $781 \cdot \binom{10}{5}$ (B) $780\binom{9}{5}$ (C) 781 (D) $\binom{10}{5}$

ઉકેલ : અહીં $k = \sum_{r=0}^{9}\left\{(x+4)^{9-r}\cdot(x+3)^{r}\right\}$ માં x^5 નો સહગુણક

$= (x + 4)^9 + (x + 4)^8 (x + 3) + (x + 4)^7 (x + 3)^2 + ... + (x + 3)^9$ માં x^5 નો સહગુણક

$= (x + 4)^9 \dfrac{\left[1-\left(\frac{x+3}{x+4}\right)^{10}\right]}{1-\left(\frac{x+3}{x+4}\right)}$ માં x^5 નો સહગુણક, $\left[a=(x+4)^9, r=\frac{x+3}{x+4}, n=10\right]$

$= (x + 4)^{10}\left[1-\left(\frac{x+3}{x+4}\right)^{10}\right]$ માં x^5 નો સહગુણક

$= (x + 4)^{10} - (x + 3)^{10}$ માં x^5નો સહગુણક $= \binom{10}{5}4^5 - \binom{10}{5}3^5 = \binom{10}{5}\cdot 781$ **જવાબ :** (A)

(43) જો $n \in \mathrm{N} - \{1\}$ તો, $\sum_{r=0}^{n}\left\{(-1)^r(100-r)\binom{n}{r}\right\} = ...$

(A) 100 (B) $100\ (2^n)$ (C) $2^n - 1$ (D) 0

ઉકેલ : $\sum_{r=0}^{n}\left\{(-1)^r(100-r)\binom{n}{r}\right\} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,100\binom{n}{r} - \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,r\binom{n}{r}$

$= 100\left\{\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}\right\} - \left\{-\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}-3\binom{n}{3}+...+(-1)^n n\binom{n}{n}\right\}$

$= 100\ \{0\} + \left\{\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-...+(-1)^{1+n}n\binom{n}{n}\right\}$ .... (1)

હવે, $(1 - x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \binom{n}{3}x^3 + ... + (-1)^n x^n$ નું બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$n(1 - x)^{n-1}(-1) = -\binom{n}{1} + 2x\binom{n}{2} - 3x^2\binom{n}{3} + ... + (-1)^n nx^{n-1}$

$x = 1$ લેતાં $0 = -\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + ... + (-1)^n n$

$\therefore 0 = \binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - ... + (-1)^{n+1} n$ .... (2)

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી માગેલ સરવાળો = 0 **જવાબ :** (D)

(44) જો $C_r = \binom{n}{r}$ તો $\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{r=0}^{m} C_r\right)$ = ...

(A) $(n + 2) \cdot 2^n$ (B) $(n + 1) \cdot 2^{n-1}$ (C) $n \cdot 2^{n-1}$ (D) $(n + 2) \cdot 2^{n-1}$

ઉકેલ : માંગેલ સરવાળો = $\sum_{m=0}^{n} (C_0 + C_1 + C_2 + ... + C_m)$

$= C_0 + (C_0 + C_1) + (C_0 + C_1 + C_2) + ... + (C_0 + C_1 + C_2 + ... + C_n)$

$= (n+1) \cdot C_0 + n \cdot C_1 + (n - 1) \cdot C_2 + (n - 2) \cdot C_3 + ... + C_n$

$= (n+1) \cdot C_n + n \cdot C_{n-1} + (n - 1) \cdot C_{n-2} + ... + 3 \cdot C_2 + 2 \cdot C_1 + C_0$

$= (C_0 + C_1 + C_2 + ... + C_n) + (C_1 + 2 \cdot C_2 + ... + n \cdot C_n)$

$= 2^n + n \cdot 2^{n-1} = (n + 2) \cdot 2^{n-1}$

[$(1 + x)^n$ નું વિસ્તરણ કરીને x ને સાપેક્ષ વિકલન કરી $x = 1$ મૂકતાં,

$C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 + ... + n \cdot C_n = n \cdot 2^{n-1}$ મળે.] **જવાબ :** (D)

(45) જો $S_k = \sum_{r=1}^{n} r^k$ તો $\sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+1}{r} S_{k+1-r}$ = ...

(A) $(n + 1)^{k+1} - 1$ (B) $(n + 1)^{k+1}$ (C) $n^{k+1} - 1$ (D) $(n + 1)^k - 1$

ઉકેલ : માંગેલ સરવાળો

$$= \sum_{r=0}^{k+1}\left[\binom{k+1}{r} S_{k+1-r}\right] - \binom{k+1}{0} S_{k+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1}\left[\binom{k+1}{r}\left\{1^{k+1-r} + 2^{k+1-r} + 3^{k+1-r} + ... + n^{k+1-r}\right\}\right] - S_{k+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} 1^{k+1-r} + \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} 2^{k+1-r} + \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} 3^{k+1-r} + ... + \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} n^{k+1-r} - S_{k+1}$$

$= 2^{k+1} + 3^{k+1} + 4^{k+1} + ... + (n + 1)^{k+1} - (1^{k+1} + 2^{k+1} + 3^{k+1} + ... + n^{k+1})$

$= (n + 1)^{k+1} - 1$ **જવાબ :** (A)

(46) જો n એ 3 નો ગુણક હોય, તો $\sum_{r=0}^{\frac{n}{3}} \binom{n}{3r}$ = ...

(A) $\frac{1}{3}(2^n + (-1)^n 2)$ (B) 0 (C) $2^n - 2(-1)^n$ (D) $2^n + 2(-1)^n$

ઉકેલ : $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$ માં $x = 1$, $x = w$ અને $x = w^2$ અનુક્રમે લેતાં, (જ્યાં $1 + w + w^2 = 0$)

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$$

$$(1+w)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} w^r$$

$$(1+w^2)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} w^{2r}$$

$$\therefore\ 2^n + (1+w)^n + (1+w^2)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (1 + w^r + w^{2r})$$

$$\therefore\ 2^n + (-w^2)^n + (-w)^n = \binom{n}{0}(1+1+1) + \binom{n}{1}(1+w+w^2) + \ldots + \binom{n}{n}(1+w^n+w^{2n})$$

$$\therefore\ 2^n + (-1)^n w^{2n} + (-1)^n (w)^n = 3\binom{n}{0} + \binom{n}{1}(0) + \binom{n}{2}(0) + \binom{n}{3}(3) + \ldots + \binom{n}{n}(3)$$

$$\therefore\ 2^n + (-1)^n(1) + (-1)^n(1) = 3\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots+\binom{n}{n}\right]$$ ($n = 3k$ હોવાથી $w^n = 1$)

$\therefore\ \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} = \sum_{r=0}^{\frac{n}{3}} \binom{n}{3r}$. આથી $\sum_{r=0}^{\frac{n}{3}} \binom{n}{3r} = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^n 2)$ **જવાબ :** (A)

(47) $\sum_{r=0}^{40} [(r+1)\, x^r (1+x)^{40-r}]$ માં x^5 નો સહગુણક ...... છે.

(A) $\binom{40}{5}$ (B) $\binom{42}{5}$ (C) $\binom{41}{5}$ (D) $\binom{39}{5}$

ઉકેલ : $S = \sum_{r=0}^{40} [(r+1)\, x^r (1+x)^{40-r}]$

$$= (1+x)^{40} \sum_{r=0}^{40} \left[(r+1)\left(\frac{x}{1+x}\right)^r\right]$$

$$= (1+x)^{40} \sum_{r=0}^{40} (r+1)\, p^r$$ $(\frac{x}{1+x} = p)$

$$\therefore S = (1+x)^{40}\ [1 + 2p + 3p^2 + ... + 41\ p^{40}] \qquad (1)$$

$$p\,S = (1+x)^{40}\ [p + 2p^2 + ... + 40\ p^{40} + 41\ p^{41}] \qquad (2)$$

$(1) - (2) \Rightarrow$

$$(1-p)\,S = (1+x)^{40}\ [1 + p + p^2 + ... + p^{40} - 41\ p^{41}]$$

$$= (1+x)^{40}\ [1\ \frac{(1-p^{41})}{1-p} - 41\ p^{41}]$$

$$\left(1 - \frac{x}{1+x}\right) S = (1+x)^{40} \left[\frac{1-\left(\frac{x}{1+x}\right)^{41}}{1-\frac{x}{1+x}} - 41\left(\frac{x}{1+x}\right)^{41}\right]$$

$$S = (1+x)^{41} \left[\frac{(1+x)^{42} - x^{41}(1+x)}{(1+x)^{41}} - 41\ \frac{x^{41}}{(1+x)^{41}}\right]$$

$$= (1+x)^{42} - x^{41}(1+x) - 41 \cdot x^{41} = (1+x)^{42} - 42 \cdot x^{41} - x^{42}$$

$\therefore$ S માં x^5 નો સહગુણક $= (1+x)^{42}$ માં x^5 નો સહગુણક $= \binom{42}{5}$ **જવાબ :** (B)

(48) $(1 + x + x^2 + + x^3 + ...)^2$ ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક ...... છે. (જ્યાં $|x| < 1$) (AIEEE : 2002)

(A) n (B) $n + 2$ (C) $n - 1$ (D) $n + 1$

ઉકેલ : $|x| < 1$ હોવાથી $1 + x + x^2 + + x^3 + ...$ અનંત પદ $= \frac{1}{1-x}$

$\therefore$ $(1 + x + x^2 + + x^3 + ...)^2$ માં x^n નો સહગુણક

$= (1-x)^{-2}$ માં x^n નો સહગુણક $= \binom{n+2-1}{n} = \binom{n+1}{1} = n + 1$ **જવાબ :** (D)

(49) $(1 + 0.0001)^{10^3}$ થી મોટો પ્રથમ ધન પૂર્ણાંક ...... છે. (AIEEE : 2002)

(A) 4 (B) 5 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $m = (1 + 0.0001)^{1000} = (1 + 10^{-4})^{1000}$

$= 1 + 1000\ (10^{-4})^1 + \frac{1000 \times 999}{2}\ (10^{-4})^2 + ...$ 1001 પદ સુધી

$< 1 + \frac{1}{10} + 1000 \times 1000 \times 10^{-8} + ...$ અનંત પદ

$\le 1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + ...$ અનંત પદ

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \qquad (a = 1, r = \frac{1}{10})$$

$$= \frac{10}{9}$$

$\therefore \quad m < \frac{10}{9}$. વળી $m > 1$ તો છે જ.

$\therefore \quad m$ થી મોટો પ્રથમ ધન પૂર્ણાંક = 2 **જવાબ :** (C)

(50) $(1+2x+3x^2+...)^{\frac{-3}{2}}$ માં x^5 નો સહગુણક ...... છે. (AIEEE : 2002)

(A) 21 (B) 25 (C) 26 (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $(1+2x+3x^2+...)^{\frac{-3}{2}} = \left\{(1-x)^{-2}\right\}^{\frac{-3}{2}}$

$$= (1-x)^3$$

$$= \binom{3}{0} - \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3$$

$\therefore \quad x^5$ નો સહગુણક = 0

$\therefore$ આપેલા વિકલ્પો (A), (B), (C) પૈકી એક પણ વિકલ્પ સાચો નથી. **જવાબ :** (D)

(51) જો $x > 0$, તો $(1+x)^{\frac{27}{5}}$ ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ઋણ પદ ...... છે. (AIEEE : 2003)

(A) 7 મું પદ (B) 5 મું પદ (C) 8 મું પદ (D) 6 ઠ્ઠું પદ

ઉકેલ : $T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} \times x^r$

$$= \frac{\frac{27}{5}\left(\frac{27}{5}-1\right)\left(\frac{27}{5}-2\right)...\left(\frac{27}{5}-r+1\right)}{r!} \times x^r$$

જો છેલ્લો અવયવ ઋણ હોય તો T_{r+1} ઋણ થાય.

$\therefore \frac{27}{5} - r + 1 < 0$

$\therefore \frac{32}{5} < r$

$\therefore r$ ની નાનામાં નાની કિંમત = 7

$\therefore$ પ્રથમ ઋણ પદ = T_{r+1} મું પદ = T_8 મું પદ

નોંધ : $r = 6$ માટે $\frac{27}{5}\left(\frac{27}{5}-1\right)........\left(\frac{27}{5}-6+1\right) > 0$ **જવાબ :** (C)

(52) $\left(\sqrt{3}+\sqrt[8]{5}\right)^{256}$ માં પૂર્ણાંક પદોની સંખ્યા ...... છે. (AIEEE : 2003)

(A) 35 (B) 33 (C) 34 (D) 32

ઉકેલ : અહીં $T_{r+1} = \binom{256}{r} \left(\sqrt{3}\right)^{256-r} \left(\sqrt[8]{5}\right)^{r} = \binom{256}{r} (3)^{\frac{256-r}{2}} (5)^{\frac{r}{8}}$

T_{r+1} ધન પૂર્ણાંક હોવા માટે $\frac{256-r}{2}$ અને $\frac{r}{8}$ બંને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોવી જોઈએ.

આથી r એ 8 નો ગુણક છે. વળી $\frac{256-r}{2}$ પણ પૂર્ણાંક જ થાય.

આથી $0 \le r \le 256$ હોવાથી r ની મહત્તમ કિંમત 256 છે.

જરૂરી r એ 8 નો ગુણક હોવાથી $r = 0, 8, 16......256$

$\therefore T_1, T_9, T_{17}..........T_{257}$ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore 257 = 1 + 8(n-1)$

$\therefore n = 33$

પૂર્ણાંક પદોની સંખ્યા 33 છે. **જવાબ :** (B)

(53) $(1+x)(1-x)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક ...... છે. (AIEEE : 2003)

(A) $n-1$ (B) $(-1)^n (n+1)$ (C) $(-1)^{n-1} n$ (D) $(-1)^n (1-n)$

ઉકેલ : $(1+x)(1-x)^n$

$$= (1+x)\left\{1-nx+\binom{n}{2}x^2-...+\binom{n}{n-1}(-x)^{n-1}+\binom{n}{n}(-x)^n\right\}$$

$\therefore$ વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક

$$= (1)\times\binom{n}{n}(-1)^n + (1)\times\binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} = (-1)^n + n(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}(-1+n) = (-1)^n(1-n)$$

જવાબ : (D)

(54) જો $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)^{2x} = e^2$, તો a અને b ની કિંમતો ...... છે. (AIEEE : 2004)

(A) $b=2, a\in R$ (B) $a=1, b\in R$ (C) $a, b\in R$ (D) $a=1, b=2$

ઉકેલ : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)^{2x} = e^2$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} 2x \log\left(1+\frac{ax+b}{x^2}\right) = 2\log_e e$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} 2x\left\{\frac{ax+b}{x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{ax+b}{x^2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{ax+b}{x^2}\right)^3+...\infty\right\} = 2$$

$[\because \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \infty]$

$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} \left\{\frac{ax+b}{x} - \frac{1}{2}\frac{(ax+b)^2}{x^3} + \frac{1}{3}\frac{(ax+b)^3}{x^5} - \ldots\infty\right\} = 2$

$\therefore \lim_{x\to\infty} 2 \left\{a + \frac{b}{x} - \frac{1}{2x}\left(a+\frac{b}{x}\right)^2 + \frac{1}{3x^2}\left(a+\frac{b}{x}\right)^3 - \ldots\infty\right\} = 2$

$\therefore 2\{a + 0 - 0(a+0)^2 + 0(a+0)^3 - \ldots\infty\} = 2$

$\therefore 2a = 2$

$\therefore a = 1, b \in R$ **જવાબ :** (B)

(55) $(1+\alpha x)^4$ અને $(1-\alpha x)^6$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદોના સહગુણકો સમાન હોય, તો શૂન્યેતર α = ... (AIEEE : 2004)

(A) $\frac{-3}{10}$ (B) $\frac{-5}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{10}{3}$

ઉકેલ : $(1+\alpha x)^4$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદનો સહગુણક = $(1-\alpha x)^6$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદનો સહગુણક

$\therefore \binom{4}{2}\alpha^2 = \binom{6}{3}(-\alpha)^3$

$\therefore 6\alpha^2 = -20\alpha^3$

$\therefore \alpha = \frac{-3}{10}$ $(\alpha \neq 0)$ **જવાબ :** (A)

(56) જો x એટલો નાનો હોય કે જેથી x^3 અને xની 3 કરતાં મોટી ઘાતવાળાં પદો અવગણી શકાય, તો

$\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - \left(1+\frac{x}{2}\right)^3}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ નું લગભગ મૂલ્ય ...... છે. (AIEEE : 2005)

(A) $3x + \frac{3}{8}x^2$ (B) $1 - \frac{3}{8}x^2$ (C) $\frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2$ (D) $-\frac{3}{8}x^2$

ઉકેલ : અહીં $\left\{(1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+\frac{x}{2})^3\right\}(1-x)^{\frac{-1}{2}}$

$= \left\{\left(1+\frac{3}{2}x + \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)x^2\right) - \left(1+\frac{3x}{2}+(3)\frac{x^2}{4}\right)\right\}(1-x)^{\frac{-1}{2}}$ [x^3, x^4, x^5 ... અવગણતાં]

$= \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x^2\right)\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{2}x^2\right)$ $\because x^3, x^4, x^5$ ... અવગણતા

$= \left(\frac{-3x^2}{8}\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}\right)$

$= \frac{-3x^2}{8} - \frac{3x^3}{16} - \frac{9x^4}{64} = \frac{-3x^2}{8}$ [x^3, x^4 વાળાં પદો અવગણતાં] **જવાબ :** (D)

(57) જો $\left(ax^2+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ માં x^7નો સહગુણક અને $\left(ax-\frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ માં x^{-7} નો સહગુણક સમાન હોય, તો ......

(AIEEE : 2005)

(A) $a - b = 1$ (B) $a + b = 1$ (C) $ab = 1$ (D) $a = b$

ઉકેલ : $\left(ax^2+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ માં $(r + 1)$ મું પદ $= \binom{11}{r} (ax^2)^{11-r} \left(\frac{1}{bx}\right)^r$

$= \binom{11}{r} \frac{a^{11-r}}{b^r} \times x^{22-2r-r}$ પરથી x^7 ના સહગુણક માટે

$22 - 3r = 7$. આથી $r = 5$

તથા $\left(ax^2-\frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ માં $(r + 1)$ મું પદ $= \binom{11}{r} (ax)^{11-r} \left(\frac{-1}{bx}\right)^r$

$= \binom{11}{r} \frac{a^{11-r}}{b^r} \times (-1)^r x^{11-3r}$ ને x^{-7} સાથે સરખાવતાં

$r = 6$

અનુક્રમે $r = 5$ અને $r = 6$ લેતાં

$\therefore \binom{11}{5} \frac{a^6}{b^5} = \binom{11}{6} \frac{a^5}{b^6} (-1)^6$

$\therefore a^6 b^6 = a^5 b^5$

$\therefore ab = 1$ **જવાબ :** (C)

(58) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ m, n માટે જો $(1 - y)^m (1 + y)^n = 1 + a_1y + a_2y +...$ અને $a_1 = a_2 = 10$, તો $(m, n) =$ ...... (ALEEE : 2006)

(A) (20, 45) (B) (35, 20) (C) (45, 35) (D) (35, 45)

ઉકેલ : $(1 - y)^m (1 + y)^n = \left(1 - my + \binom{m}{2}y^2 - \binom{m}{3}y^3 + ... (m+1) \text{ પદ}\right) \times$

$\left(1 + ny + \binom{n}{2}y^2 + \binom{n}{3}y^3 + ... (n+1) \text{ પદ}\right)$

$= 1 + (n - m)y + \left(\binom{m}{2} + \binom{n}{2} - mn\right)y^2 + ...$

$\therefore n - m = a_1 = 10, \binom{m}{2} + \binom{n}{2} - mn = a_2 = 10$

$\therefore n - m = 10, \frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} - mn = 10$

$\therefore n - m = 10, m^2 - m + n^2 - n - 2mn = 20$

$\therefore n - m = 10, (m - n)^2 - (m + n) = 20$

$\therefore n - m = 10, 100 - (m + n) = 20$

$\therefore n - m = 10, m + n = 80$

$\therefore n = 45, m = 35$

$\therefore (m, n) = (35, 45)$ **જવાબ :** (D)

(59) જો $(a - b)^n$, $n \geq 5$ ના દ્વિપદી વિસ્તરણમાં પાંચમા અને છઠ્ઠા પદોનો સરવાળો 0 હોય, તો $\frac{a}{b}$ = ...

(AIEEE : 2007)

(A) $\frac{6}{n-5}$ (B) $\frac{5}{n-4}$ (C) $\frac{n-5}{6}$ (D) $\frac{n-4}{5}$

ઉકેલ : $T_5 + T_6 = 0$

$$\therefore \binom{n}{4} a^{n-4} (-b)^4 = -\binom{n}{5} a^{n-5} (-b)^5$$

$$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} a = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} b$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{n-4}{5}$$

જવાબ : (D)

(60) જો $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ નું x ના ઘાતમાં વિસ્તરણ $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$ હોય, તો a_n = ...

(AIEEE : 2006)

(A) $\frac{a^n - b^n}{b-a}$ (B) $\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{b-a}$ (C) $\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$ (D) $\frac{b^n - a^n}{b-a}$

ઉકેલ : $(1 - ax)^{-1} (1 - bx)^{-1} = (1 + ax + a^2x^2 + ...) \times (1 + bx + b^2x^2 + ...)$

a_n = x^n નો સહગુણક

$$= b^n + ab^{n-1} + a^2b^{n-2} + ... + a^n$$

$$= b^n \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + ... + \frac{a^n}{b^n}\right)$$

$$= b^n \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} - 1}{\frac{a}{b} - 1}\right) = b^n \left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}\right) \frac{b}{b^{n+1}} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$$

જવાબ : (C)

(61) $\binom{20}{0} - \binom{20}{1} + \binom{20}{2} - \binom{20}{3} + ... + \binom{20}{10}$ = ... (AIEEE : 2007)

(A) $-\binom{20}{10}$ (B) $\frac{1}{2}\binom{20}{10}$ (C) 0 (D) $\binom{20}{10}$

ઉકેલ : $(1 + x)^{20} = \binom{20}{0} + \binom{20}{1}x + \binom{20}{2}x^2 + \binom{20}{3}x^3 + ... + \binom{20}{10}x^{10} + ... + \binom{20}{20}x^{20}$

$x = -1$ લેતાં, $0 = \binom{20}{0} - \binom{20}{1} + \binom{20}{2} - ... - \binom{20}{9} + \binom{20}{10} - \binom{20}{11} + ... + \binom{20}{20}$

$$= \binom{20}{0} - \binom{20}{1} + \dots - \binom{20}{9} + \binom{20}{10} - \binom{20}{9} + \binom{20}{8} - \dots + \binom{20}{0}$$

$$\binom{20}{10} = 2\binom{20}{0} - 2\binom{20}{1} + \dots - 2\binom{20}{9} + \binom{20}{10} + \binom{20}{10}$$ (બંને બાજુ $\binom{20}{10}$ ઉમેરતાં)

$$\binom{20}{10} = 2\left\{\binom{20}{0} - \binom{20}{1} + \dots - \binom{20}{9} + \binom{20}{10}\right\}$$

$$\therefore \binom{20}{0} - \binom{20}{1} + \dots - \binom{20}{9} + \binom{20}{10} = \frac{1}{2}\binom{20}{10}$$

જવાબ : (B)

(62) $8^{2n} - (62)^{2n+1}$ ને 9 વડે ભાગતાં ...... શેષ મળે. (AIEEE : 2009)

(A) 0 (B) 2 (C) 7 (D) 8

ઉકેલ : $8^{2n} - (62)^{2n+1} = (1 + 63)^n - (63 - 1)^{2n+1}$

$$= (1 + 63)^n + (1 - 63)^{2n+1}$$

$$= \left[1 + 63n + \binom{n}{2}(63)^2 + \dots + (63)^n\right] + \left[1 - (2n+1)\,63 + \binom{2n+1}{2}(63)^2 - \dots - (63)^{2n+1}\right]$$

$$= 2 + 63\left[n + \binom{n}{2}(63) + \dots + (63)^{n-1} - (2n+1) + \binom{2n+1}{2}(63) - \dots - (63)^{2n}\right]$$

જેને 9 વડે ભાગતાં શેષ 2 વધે.

જવાબ : (B)

બીજી રીત : $8^{2n} - (62)^{2n+1} \equiv (-1)^{2n} - (-1)^{2n+1} \pmod 9 = 1 + 1 = 2$

(63) $\left\{x + (x^3-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^5 + \left\{x - (x^3-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^5$ એ x માં ...... ઘાતની બહુપદી છે. (IIT-JEE : 1992)

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $(x + a)^n + (x - a)^n = 2\left[x^n + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + + \binom{n}{4}x^{n-4}a^4 + \dots\right]$

$a = (x^3-1)^{\frac{1}{2}}$ અને $n = 5$ લેતાં, $\left\{x + (x^3-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^5 + \left\{x - (x^3-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^5$

$$= 2\left[x^5 + \binom{5}{2}x^3(x^3-1) + \binom{5}{4}x(x^3-1)^2\right]$$

પ્રથમ પદની ઘાત 5, બીજા પદની ઘાત 6, ત્રીજા પદની ઘાત 7.

આ 7 ઘાતની બહુપદી છે.

જવાબ : (C)

(64) જો n ધન પૂર્ણાંક હોય, તો $(\sqrt{3}+1)^{2n}-(\sqrt{3}-1)^{2n}$ ...... છે. (AIEEE-2012)

(A) એક અસંમેય સંખ્યા (B) એક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક

(C) એક યુગ્મ ધન પૂર્ણાંક (D) એક ધન પૂર્ણાંક સિવાયની સંમેય સંખ્યા

ઉકેલ : $(\sqrt{3}+1)^{2n}-(\sqrt{3}-1)^{2n}=(4+2\sqrt{3})^n-(4-2\sqrt{3})^n$

$$= 2^n\,[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n]$$

$$= 2^n\cdot 2\left[\binom{n}{1}2^{n-1}\sqrt{3}+\binom{n}{3}2^{n-3}\left(\sqrt{3}\right)^3+\ldots\right]$$

$$= 2^{n+1}\sqrt{3}\left[\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{3}2^{n-3}\cdot 3+\ldots\right]$$ એક અસંમેય સંખ્યા છે. **જવાબ :** (A)

(65) આપેલ ધન પૂર્ણાંક $r>1$, $n>2$ માટે $(1+x)^{2n}$ ના દ્વિપદી વિસ્તરણમાં $(3r)$ માં અને $(r+2)$ માં પદોના સહગુણકો સમાન હોય તો ...... (IIT-JEE : 1983)

(A) $n=2r$ (B) $n=2r+1$ (C) $n=3r$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $(1+x)^{2n}$ ના દ્વિપદી વિસ્તરણમાં T_{3r} અને T_{r+2} ના સહગુણકો સમાન છે.

$$\therefore \binom{2n}{3r-1}=\binom{2n}{r+1}$$

$\therefore$ $3r-1=r+1$ અથવા $(3r-1)+(r+1)=2n$

$\therefore$ $2r=2$ અથવા $4r=2n$

$\therefore$ $r=1$ અથવા $2r=n$

પરંતુ $r>1$ આપેલ છે. આથી $n=2r$ **જવાબ :** (A)

JEE Main અને Advanced માં પૂછાયેલા પ્રશ્નો

(66) $$\left(\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{x-1}{x-x^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$$ ના વિસ્તરણમાં અચળ પદ ...... છે. (JEE- MAIN : 2013)

(A) 4 (B) 120 (C) 210 (D) 310

ઉકેલ : $$\left[\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{x-1}{x-x^{\frac{1}{2}}}\right]^{10}$$

$$=\left[(x^{\frac{1}{3}}+1)-\frac{(x^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{2}}+1)}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-1)}\right]^{10}\qquad \left(x+1=(x^{\frac{1}{3}}+1)\,(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)\right)$$

$$= \left[\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)-\left(1+x^{\frac{-1}{2}}\right)\right]^{10} = \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{-1}{2}}\right)^{10}$$

હવે $T_{r+1} = \binom{10}{r} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{10-r} \left(-x^{\frac{-1}{2}}\right)^{r} = \binom{10}{r} x^{\frac{10-r}{3}} x^{\frac{-r}{2}} (-1)^r$

$$= \binom{10}{r}(-1)^r x^{\frac{20-5r}{6}}$$

અચળ પદ માટે $\frac{20-5r}{6} = 0$. આથી $r = 4$

$\therefore T_5 = \binom{10}{4} (-1)^4 = \frac{10\times9\times8\times7}{24} = 210$ **જવાબ :** (C)

(67) $(10 + 3x)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં $x = 4$ હોય, ત્યારે મોટામાં મોટું પદ ...... છે. તથા તેનું મૂલ્ય ...... છે.

(A) $T_8, \binom{12}{5} (120)^5 \times 144$ (B) $T_7, \binom{12}{7} 10^5 \times 12^8$

(C) $T_7 = T_8, \binom{12}{8} 10^5 \cdot 12^7$ (D) $T_7, \binom{12}{5} 10^5 \times 12^7$

ઉકેલ : $(10 + 3x)^{12}$ ને $(x + y)^n$ સાથે સરખાવતાં, $x = 10$, $y = 3x$, $n = 12$

હવે $m = \frac{(n+1)y}{x+y} = \frac{(12+1)3x}{10+3x} = \frac{13\times3\times4}{10+12} = \frac{156}{22} = \frac{78}{11}$ પૂર્ણાંક નથી માટે મોટામાં મોટું પદ

$$T_{[m]+1} = T_{7+1} = T_8$$

તથા $T_8 = \binom{12}{7} (10)^5 \times (3x)^7 = \binom{12}{5} 10^5 \times 12^7 = \binom{12}{5} 120^5 \times 144$ **જવાબ :** (A)

→ **અન્ય રીત :** $T_{r+1} \geq T_r \Rightarrow \binom{12}{r} 10^{12-r} (3x)^r \geq \binom{12}{r-1} 10^{12-r+1} (3x)^{r-1}$

$$\Rightarrow \frac{3x}{r} \geq \frac{10}{13-r}$$

$$\Rightarrow r \leq \frac{78}{11} \qquad (x = 4)$$

$\therefore r$ ની મોટામાં મોટી પૂર્ણાંક કિંમત $= 7$

$\therefore$ મોટામાં મોટું પદ $= T_{r+1} = T_8 = \binom{12}{5} 10^5 \times 12^7$

$$= \binom{12}{5} (120)^5 \times 144$$ **જવાબ :** (A)

(68) $(1-2\sqrt{x})^{50}$ ના દ્વિપદી વિસ્તરણમાં x ના પૂર્ણાંક ઘાતાંકવાળાં પદોના સહગુણકોનો સરવાળો ...... છે.

(JEE-MAIN : 2015)

(A) $\frac{1}{2}(3^{50}+1)$ (B) $\frac{1}{2}(3^{50})$ (C) $\frac{1}{2}(3^{50}-1)$ (D) $\frac{1}{2}(2^{50}+1)$

ઉકેલ : $(1-2\sqrt{x})^{50} = \binom{50}{0} - \binom{50}{1}(2\sqrt{x})^1 + \binom{50}{2}(2\sqrt{x})^2 - \binom{50}{3}(2\sqrt{x})^3 + \ldots$

k = x ના પૂર્ણાંક ઘાતાંકવાળાં પદોના સહગુણકોનો સરવાળો

$$= \binom{50}{0} + \binom{50}{2}(2)^2 + \binom{50}{4}(2)^4 + \ldots + \binom{50}{50}2^{50}$$

હવે $(1+x)^{50} = \binom{50}{0} + \binom{50}{1}x + \binom{50}{2}x^2 + \binom{50}{3}x^3 + \binom{50}{4}x^4 + \ldots + \binom{50}{50}x^{50}$ (1)

(1) માં $x = 2$ લેતાં $3^{50} = \binom{50}{0} + \binom{50}{1}2 + \binom{50}{2}2^2 + \binom{50}{3}2^3 + \binom{50}{4}2^4 + \ldots + \binom{50}{50}2^{50}$ (2)

(1) માં $x = -2$ લેતાં

$1^{50} = \binom{50}{0} - \binom{50}{1}2 + \binom{50}{2}2^2 - \binom{50}{3}2^3 + \binom{50}{4}2^4 - \ldots + \binom{50}{50}2^{50}$ (3)

(2) + (3) કરતાં.

$$3^{50}+1 = 2\left[\binom{50}{0} + \binom{50}{2}2^2 + \binom{50}{4}2^4 + \ldots + \binom{50}{50}2^{50}\right]$$

$$\frac{3^{50}+1}{2} = \left[\binom{50}{0} + \binom{50}{2}2^2 + \binom{50}{4}2^4 + \ldots + \binom{50}{50}2^{50}\right] = k$$

$\therefore k = \frac{3^{50}+1}{2}$ **જવાબ :** (A)

(69) $(1+ax+bx^2)(1-2x)^{18}$ નું x ની ઘાતના સ્વરૂપમાં વિસ્તરણ કરતાં x^3 અને x^4 ના સહગુણકો 0 હોય, તો (a, b) = ...

(JEE-MAIN : 2014)

(A) $\left(16, \frac{251}{3}\right)$ (B) $\left(14, \frac{251}{3}\right)$ (C) $\left(14, \frac{272}{3}\right)$ (D) $\left(16, \frac{272}{3}\right)$

ઉકેલ : $(1+ax+bx^2)(1-2x)^{18}$

$$= (1+ax+bx^2)\left(1-\binom{18}{1}2x+\binom{18}{2}(2x)^2-\binom{18}{3}(2x)^3+\binom{18}{4}(2x)^4-\ldots\right)$$

હવે x^3 નો સહગુણક $= -\binom{18}{3}2^3 + a\binom{18}{2}2^2 - b\binom{18}{1}2 = 0$ (1)

x^4 નો સહગુણક $= \binom{18}{4}2^4 + a\left(-\binom{18}{3}2^3\right) + b\binom{18}{2}2^2 = 0$ (2)

(1) પરથી $-153\,a + 9b + 1632 = 0$ આથી $-51\,a + 3b + 544 = 0$

(2) પરથી $32\,a - 3b - 240 = 0$ આથી $-19a + 304 = 0$

$\therefore a = 16.$ આથી $b = \frac{272}{3}$

$\therefore (a, b) = \left(16, \frac{272}{3}\right)$ **જવાબ :** (D)

(70) સાબિત કરો કે $7^{2n} + 2^{3n-3} \cdot 3^{n-1}$ એ 25 વડે વિભાજ્ય છે. (IIT : 1992)

ઉકેલ : $7^{2n} + 2^{3n-3} \cdot 3^{n-1} = 49^n + 2^{3(n-1)} \cdot 3^{n-1} = 49^n + 24^{(n-1)}$

$= (50-1)^n + (25-1)^{n-1}$

$= (-1)^n (1-50)^n + (-1)^{n-1}(1-25)^{n-1}$

$= (-1)^n \left\{[1 - 50n + \binom{n}{2}(50)^2 - \binom{n}{3}(50)^3 + \binom{n}{4}(50)^4 - ... + (-50)^n]\right.$

$\left. - [1 - (n-1)\,25 + \binom{n-1}{2}25^2 - \binom{n-1}{3}25^3 + ... + (-1)^{n-1}(25)^{n-1}\right\}$

$= (-1)^n \left\{- 50n + \binom{n}{2}(50)^2 - \binom{n}{3}(50)^3 + \binom{n}{4}(50)^4 - ... + (-1)^n 50^n + (n-1)\,25\right.$

$\left. -\binom{n-1}{2}25^2 + \binom{n-1}{3}25^3 - ... + (-1)^{n-1}(25)^{n-1}\right\}$

દરેક પદ 25 વડે વિભાજ્ય છે.

$7^{2n} + 2^{3n-3} \cdot 3^{n-1}$ એ 25 વડે વિભાજ્ય છે.

બીજી રીત : $7^{2n} + 2^{3n-3} \cdot 3^{n-1} = 49^n + 24^{(n-1)}$

$49 \equiv (-1) \pmod{25}$ તથા $24 \equiv (-1) \pmod{25}$

$\therefore 49^n + 24^{(n-1)} \equiv (-1)^n + (-1)^{n-1} \pmod{25} \equiv (0) \pmod{25}$

$\therefore 49^n + 24^{n-1}$ એ 25 વડે વિભાજ્ય છે.

(71) જો $(1 + x + x^2)^n$ ના સહગુણકો x ની ઘાતના ચઢતા ક્રમમાં $a_0, a_1, a_2, ... a_{2n}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + ... - a^2_{2n-1} + a^2_{2n} = a_n$ (IIT : 1994)

ઉકેલ : $(1 + x + x^2)(1 - x + x^2) = (1 + x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$

$\therefore (1 + x + x^2)^n (1 - x + x^2)^n = (1 + x^2 + x^4)^n$

હવે $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_{2n}x^{2n}$ ... (1)

(1) માં x ની જગ્યાએ $\frac{1}{x}$ મૂકતાં,

$$\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^n = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + ... + \frac{a_{2n}}{x^{2n}}$$

બંને બાજુ x^{2n} વડે ગુણતાં

$(x^2 + x + 1)^n = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + ... + a_{2n}$

x ની જગ્યાએ $-x$ લેતાં,

$(x^2 - x + 1)^n = a_0x^{2n} - a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} - ... + a_{2n}$ (2)

(1) માં x ની જગ્યાએ x^2 લેતાં

$(1 + x^2 + x^4)^n = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + ... + a_nx^{2n}$ ... (3)

(1) અને (2) નો ગુણાકાર કરતાં

$(1 + x + x^2)^n \times (1 - x + x^2)^n = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}) \times (a_0x^{2n} - a_1x^{2n-1} + ... + a_{2n})$ (4)

પરિણામ (3) અને (4) સરખાવતાં,

$a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + ... + a_{2n}x^{2n} = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}) \times (a_0x^{2n} - a_1x^{2n-1} + ... + a_{2n})$

બંને બાજુ x^{2n} નો સહગુણક સરખાવતાં,

$a_n = a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 ... + a_{2n}^2$

$\therefore a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 ... + a_{2n}^2 = a_n$

(72) જો $R = (5\sqrt{5} + 11)^{2n+1}$ અને $f = R - [R]$ તો સાબિત કરો કે $R \cdot f = 4^{2n+1}$ જ્યાં [ ] એ મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય છે. (IIT : 1988)

ઉકેલ : પૂર્ણાંક I માટે ધારો કે $I < R < I + 1$ આથી $[R] = I$ (R પૂર્ણાંક નથી.)

$0 < R - [R] < 1.$ આથી $0 < f < 1$ તથા $R = f + I$

હવે $121 < 125 < 144 \Rightarrow 11 < 5\sqrt{5} < 12 \Rightarrow 0 < 5\sqrt{5} - 11 < 1$

$$\Rightarrow 0 < (5\sqrt{5} - 11)^{2n+1} < 1$$

$\therefore 0 < f' < 1$ જ્યાં $f' = (5\sqrt{5} - 11)^{2n+1}$

$\therefore I + f - f' = (5\sqrt{5} + 11)^{2n+1} - (5\sqrt{5} - 11)^{2n+1}$

$$= 2\left\{\binom{2n+1}{1}(5\sqrt{5})^{2n}11 + \binom{2n+1}{3}(5\sqrt{5})^{2n-2} \cdot 11^3 + ...\right\}$$

= યુગ્મ પૂર્ણાંક

$\therefore\ f - f' =$ પૂર્ણાંક (I પૂર્ણાંક છે.)

પરંતુ $0 < f < 1,\ 0 < f' < 1 \Rightarrow -1 < f - f' < 1$

$\therefore f - f' = 0 \Rightarrow \quad f = f'$

$\therefore\ R\cdot f = R \cdot f' = (5\sqrt{5} + 11)^{2n+1} \cdot (5\sqrt{5} - 11)^{2n+1}$

$= \{(5\sqrt{5} + 11)(5\sqrt{5} - 11)\}^{2n+1} = (125 - 121)^{2n+1} = 4^{2n+1}$

(73) જો $\sum_{r=0}^{2n} a_r (x-2)^r = \sum_{r=0}^{2n} b_r (x-3)^r$ અને બધા જ $k \ge n$ માટે $a_k = 1$ તો સાબિત કરો કે,

$b_n = \binom{2n+1}{n+1}$ (IIT : 92)

ઉકેલ : $x - 3 = y$ મૂકતાં,

$$\sum_{r=0}^{2n} a_r (1+y)^r = \sum_{r=0}^{2n} b_r y^r$$

$\therefore a_0 + a_1 (1+y) + a_2 (1+y)^2 + ... + 1 (1+y)^n + 1 (1+y)^{n+1} + 1 (1+y)^{n+2} + ... +$

$1 (1+y)^{2n} = b_0 + b_1 y + ... + b_n y^n + ... + b_{2n} y^{2n} \qquad (a_n, a_{n+1} \ ... = 1)$

બંને બાજુ y^n નો સહગુણક સરખાવતાં,

$$1 + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{n+n}{n} = b_n$$

$$\therefore b_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{2n}{n}$$

$$= \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + ... + \binom{2n}{n}$$

$$= \binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} + ... + \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n}{n}$$

$$= \binom{n+4}{3} + ... + \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-2} + \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n}{n}$$

$$= \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$$

(74) સાબિત કરો કે $\dfrac{3!}{2(n+3)} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \dfrac{{}_nC_r}{{}_{r+3}C_r}$ (I.I.T. : 1997)

ઉકેલ : $\dfrac{{}_nC_r}{{}_{r+3}C_r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} \times \dfrac{r!3!}{(r+3)!} = \dfrac{3!(n+3)!}{(n+1)(n+2)(n+3)(n-r)!(r+3)!}$

$$= \frac{3!}{{}_{n+3}P_3} \times \binom{n+3}{r+3}$$

જ.બા. $= \sum_{r=0}^{n} \left\{ \frac{(-1)^r\ 3!}{{}_{n+3}P_3} \times \binom{n+3}{r+3} \right\} = \frac{-3!}{{}_{n+3}P_3} \sum_{r=0}^{n} \left\{ (-1)^{r+3} \binom{n+3}{r+3} \right\}$

$$= \frac{-3!}{{}_{n+3}P_3} \left\{ (-1)^3 \binom{n+3}{3} + (-1)^4 \binom{n+3}{4} + (-1)^5 \binom{n+3}{5} + \ldots + (-1)^{n+3} \binom{n+3}{n+3} \right\}$$

$$= \frac{-3!}{{}_{n+3}P_3} \left\{ (-1)^0 \binom{n+3}{0} + (-1)^1 \binom{n+3}{1} + (-1)^2 \binom{n+3}{2} + (-1)^3 \binom{n+3}{3} + \ldots + (-1)^{n+3} \binom{n+3}{n+3} - \binom{n+3}{0} + \binom{n+3}{1} - \binom{n+3}{2} \right\}$$

$$= \frac{-3!}{{}_{n+3}P_3} \left\{ (1-1)^{n+3} - \binom{n+3}{0} + \binom{n+3}{1} - \binom{n+3}{2} \right\}$$

$$= \frac{-3!}{{}_{n+3}P_3} \left\{ 0 - 1 + n + 3 - \frac{(n+3)(n+2)}{2} \right\}$$

$$= \frac{-3!}{(n+3)(n+2)(n+1)} \times \left\{ \frac{-2 + 2n + 6 - n^2 - 5n - 6}{2} \right\}$$

$$= \frac{-3!}{(n+3)(n+2)(n+1)} \times \left(\frac{-n^2 - 3n - 2}{2} \right) = \frac{3!}{2(n+3)} = \text{ડા.બા.}$$

(75) જ્યારે $m =$ ...... ત્યારે સરવાળો $\sum_{i=0}^{m} \binom{10}{i} \binom{20}{m-i}$ મહત્તમ છે. (જ્યાં જો $p < q$ તો $\binom{p}{q} = 0$)

(IIT-JEE : 2002)

(A) 15 (B) 5 (C) 20 (D) 10

ઉકેલ : $\sum_{i=0}^{m} \binom{10}{i} \binom{20}{m-i} = \binom{10}{0}\binom{20}{m} + \binom{10}{1}\binom{20}{m-1} + \ldots + \binom{10}{m}\binom{20}{0}$

$= (1+x)^{10} (x+1)^{20}$ ના વિસ્તરણમાં x^m નો સહગુણક

$= (1+x)^{30}$ ના વિસ્તરણમાં x^m નો સહગુણક

$= \binom{30}{m}$ જે મહત્તમ હોવા માટે $m = 15$ હોવો જોઈએ. **જવાબ :** (A)

(76) $(1 + t^2)^{12} (1 + t^{12}) (1 + t^{24})$ માં t^{24} નો સહગુણક ...... છે. (IIT-JEE : 2003)

(A) $\binom{12}{6}$ (B) $\binom{12}{6} + 3$ (C) $\binom{12}{6} + 2$ (D) $\binom{12}{6} + 1$

ઉકેલ : $(1 + t^2)^{12} (1 + t^{12}) (1 + t^{24})$

$= (1 + t^{12} + t^{24} + t^{36}) (1 + t^2)^{12}$

$$= \quad (1 + t^{12} + t^{24} + t^{36}) \left[\binom{12}{0}+\binom{12}{1}t^2+\binom{12}{2}t^4+\ldots+\binom{12}{12}t^{24}\right]$$

t^{24} નો સહગુણક $= 1 \times \binom{12}{12} + 1 \times \binom{12}{6} + 1 \times \binom{12}{0}$

$= 1 + \binom{12}{6} + 1$

$= \binom{12}{6} + 2$ **જવાબ :** (C)

(77) $\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ માં x^4 નો સહગુણક ...... છે. (IIT-JEE : 2003)

(A) $\frac{450}{263}$ (B) $\frac{405}{256}$ (C) $\frac{504}{259}$ (D) આ પૈકી એકપણ નહિ

ઉકેલ : અહીં $T_{r+1} = \binom{10}{r}\left(\frac{x}{2}\right)^{10-r}\left(\frac{-3}{x^2}\right)^r = \binom{10}{r} x^{10-3r} \frac{(-1)^r 3^r}{2^{10-r}}$

x^4 ના સહગુણક માટે $10 - 3r = 4 \Rightarrow r = 2$

x^4 નો સહગુણક $= \binom{10}{2} \frac{(-1)^2 3^2}{2^8} = \frac{45\times 9}{256}$

$= \frac{405}{256}$ **જવાબ :** (B)

(78) $(1 + x)^{n+5}$ નાં ત્રણ ક્રમિક પદોના સહગુણકોનો ગુણોત્તર 5:10:14 હોય, તો $n =$ ......

(JEE- Advanced : 2013)

ઉકેલ : ધારો કે $(1 + x)^{n+5}$ ના ત્રણ ક્રમિક પદો T_{r-1}, T_r, T_{r+1} છે. તેમનાં સહગુણકો $\binom{n+5}{r-2}$, $\binom{n+5}{r-1}$ અને $\binom{n+5}{r}$ 5:10:14 ના પ્રમાણમાં છે.

$$\therefore \frac{\binom{n+5}{r-2}}{5} = \frac{\binom{n+5}{r-1}}{10} \Rightarrow \frac{2(n+5)!}{(n-r+7)!(r-2)!} = \frac{(n+5)!}{(n-r+6)!(r-1)!}$$

$\therefore \; 2(r-1) = n - r + 7$

$\therefore \; n - 3r + 9 = 0$ (1)

તથા $\frac{\binom{n+5}{r-1}}{10} = \frac{\binom{n+5}{r}}{14} \Rightarrow \frac{7(n+5)!}{(n-r+6)!(r-1)!} = \frac{5(n+5)!}{(n-r+5)!\,r!}$

$\Rightarrow \; 7r = 5(n - r + 6)$

$\Rightarrow \; 5n - 12r + 30 = 0.$ વળી $4n - 12r + 36 = 0$

$\therefore \; n - 6 = 0.$ આથી $n = 6$ **જવાબ : $n = 6$**

(79) $(1 + x^2)^4\ (1 + x^3)^7\ (1 + x^4)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં x^{11} નો સહગુણક ...... છે. (JEE- Advanced : 2014)

(A) 1051 (B) 1106 (C) 1113 (D) 1120

ઉકેલ : અહીં $(x^2)^a \cdot (x^3)^b \cdot (x^4)^c = x^{11}$

$\therefore\ x^{2a + 3b + 4c} = x^{11}$

$\therefore\ 2a + 3b + 4c = 11$

$\therefore\ (a, b, c) = (0,1, 2), (1, 3, 0), (2, 1, 1), (4, 1, 0)$

$\therefore\ x^{11}$ નો સહગુણક $= \binom{4}{0}\binom{7}{1}\binom{12}{2} + \binom{4}{1}\binom{7}{3}\binom{12}{0} + \binom{4}{2}\binom{7}{1}\binom{12}{1} + \binom{4}{4}\binom{7}{1}\binom{12}{0}$

$= (1 \times 7 \times 66) + (4 \times 35 \times 1) + (6 \times 7 \times 12) + (1 \times 7 \times 1)$

$= 462 + 140 + 504 + 7 = 1113$ જવાબ : (C)

(80) $(a + b + c)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં $a^3\ b^4\ c^5$ નો સહગુણક ...... છે.

(A) $\frac{(12)!}{3!\,4!\,5!}$ (B) $\binom{12}{5} \times \binom{7}{3}$ (C) $\binom{12}{3}\binom{12}{4}\binom{12}{5}$ (D) $\binom{12}{4} \times \binom{8}{3}$

ઉકેલ : $(a + b + c)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં વ્યાપક પદ $= \frac{(12)!}{p!\,q!\,r!}\ a^p\ b^q\ c^r = \frac{(12)!}{3!\,4!\,5!}\ a^3\ b^4\ c^5$

$\therefore$ માંગેલ સહગુણક $= \frac{(12)!}{3!\,4!\,5!} = \frac{(12)!}{7!\,5!} \times \frac{7!}{3!\,4!}$

$= \binom{12}{5} \times \binom{7}{3}$

$= \frac{(12)!}{8!\,4!} \times \frac{8!}{3!\,5!}$

$= \binom{12}{4} \times \binom{8}{3}$ જવાબ : (A), (B), (D)

(81) $\left\{(9^{x-1}+7)^{\frac{1}{2}} + (3^{x-1}+1)^{\frac{-1}{5}}\right\}^7$ નાં વિસ્તરણમાં $T_6 = 84$ તો $x =$ ......

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 1 અથવા 2

ઉકેલ : $T_6 = \binom{7}{5}\ \left(9^{x-1}+7\right)^{\frac{2}{2}}\ \left(3^{x-1}+1\right)^{\frac{-5}{5}} = 84$

$\therefore\ 21\ (9^{\,x-1} + 7) = 84\ (3^{\,x-1} + 1)$

$\therefore\ \frac{3^{2x}}{9} + 7 = 4\left(\frac{3^x}{3}+1\right)$

$\therefore\ 3^{2x} + 63 = 12 \cdot 3^x + 36$

$\therefore\ (3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

$\therefore\ (3^x - 3)\ (3^x - 9) = 0$

$\therefore\ 3^x = 3$ અથવા $3^x = 9$

$\therefore\ x = 1$ અથવા $x = 2$ જવાબ : (B), (C), (D)

(82) $(5x + 6y - 7z)^n$ નાં વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા ...... છે.

(A) $\binom{n+2}{3}$ (B) $\Sigma\,(n + 2)$ (C) $\binom{n+2}{2}$ (D) $\Sigma\,(n + 1)$

ઉકેલ : પદોની સંખ્યા $= \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+3-1}{n} = \binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$\therefore$ પદોની સંખ્યા $= \Sigma\,(n + 1)$ **જવાબ :** (C), (D)

(83) $(1 - 3x^2 + 10x^5)^n$ અને $(1 + x^7)^n$ ના વિસ્તરણમાં સહગુણકોનો સરવાળો અનુક્રમે p અને q હોય, તો ......$(n > 1)$

(A) $p : q = 4$ (B) $p + q = pq$ (C) $p = q^3$ (D) $pq = 4^{2n}$

ઉકેલ : $(1 - 3x^2 + 10x^5)^n$ અને $(1 + x^7)^n$ માં $x = 1$ લેતાં

$p = (1 - 3 + 10)^n = 8^n$ તથા $q = (1 + 1)^n = 2^n$

અહીં $q^3 = (2^n)^3 = 2^{3n} = 8^n = p,$ આથી $p = q^3.$ (C)

$pq = 8^n \cdot 2^n = 16^n = 4^{2n}$ (D)

$p : q = 8^n \cdot 2^n = 2^{3n} : 2^n = 4^n \neq 4,$ $(n \neq 1)$

$p + q = 8^n + 2^n \neq 4^{2n}$

$\therefore p + q \neq pq$

$\therefore p = q^3$ તથા $pq = 4^{2n}$ **જવાબ :** (C), (D)

(84) જો $p =$ .... તો $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^4$ ના વિસ્તરણમાં x^pનું અસ્તિત્વ છે.

(A) 6 (B) 2 (C) 5 (D) 8, 2, 5, 3

ઉકેલ : અહીં $T_{r+1} = \binom{4}{r}(x^2)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{4}{r}(x)^{8-2r} \cdot x^{-r} = \binom{4}{r}x^{8-3r}$

$\therefore p = 8 - 3r$

$\therefore r = \frac{8-p}{3}$ પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય, તો x^p નું અસ્તિત્વ હોય. વળી $0 \leq r \leq 4$

$\therefore p = 8$ અથવા $p = 2$ અથવા $p = 5$. $r = 3, 4$ તો $p = -1, -4$ જે આપેલ નથી. **જવાબ :** (B), (C)

(85) $(1 + x)^{2n + 12}$ માં મોટામાં મોટો સહગુણક ...... છે.

(A) $\binom{2n+12}{n+6}$ (B) $\frac{(2n+12)!}{[(n+6)!]^2}$ (C) $\frac{2!}{(n+6)!}$ (D) $\binom{2n+12}{n+7}$

ઉકેલ : જો n યુગ્મ હોય તો $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં મોટામાં મોટો સહગુણક $= \binom{n}{\frac{n}{2}}$

$\therefore$ માંગેલ સહગુણક $= \binom{2n+12}{n+6} = \frac{(2n+12)!}{(n+6)!(n+6)!} = \frac{(2n+12)!}{[(n+6)!]^2}$ **જવાબ :** (A), (B)

(86) $(x + 5)^6$ ના વિસ્તરણમાં $T_1 = 729$ તો ......

(A) $T_2 = 7290, x = -3$ (B) $T_3 = 30375, x = \pm 3$

(C) $x = 3, T_2 = -7290$ (D) $T_4 = \pm 67500, x = \pm 3$

ઉકેલ : $T_{r+1} = \binom{6}{r} x^{6-r} 5^r$

$\therefore T_1 = \binom{6}{0} x^6 5^0 = 729 \quad \Rightarrow x^6 = 3^6 \quad \Rightarrow x = \pm 3$

$\therefore T_2 = \binom{6}{1} x^5 5^1 = 6 (\pm 3)^5 5 = \pm 7290$

$\therefore T_3 = \binom{6}{2} x^4 5^2 = 15 \times (\pm 3)^4 \times 25 = 30375$

અને $T_4 = \binom{6}{3} x^3 5^3 = 20 (\pm 3)^3 (125) = \pm 67500$ **જવાબ :** (B), (D)

(87) જો n = ... તો $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં T_5, T_6 અને T_7 ના સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

(A) 13 (B) 7 (C) 14 (D) 7, 14

ઉકેલ : T_5, T_6 અને T_7 ના સહગુણકો $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ અને $\binom{n}{6}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. $\Leftrightarrow \binom{n}{4} + \binom{n}{6} = 2\binom{n}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} + \frac{n!}{6!(n-6)!} = \frac{2n!}{5!(n-5)!}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(n-4)(n-5)} + \frac{1}{6 \times 5} = \frac{2}{5(n-5)}$

$\Leftrightarrow 30 + (n-4)(n-5) = 12(n-4)$

$\Leftrightarrow 30 + n^2 - 9n + 20 = 12n - 48$

$\Leftrightarrow n^2 - 21n + 98 = 0$

$\Leftrightarrow (n-7)(n-14) = 0$

$\Leftrightarrow n = 7$ અથવા $n = 14$ **જવાબ :** (B), (C), (D)

નિષ્કર્ષ તથા કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાન આપેલાં હોય છે. આ બંને વિધાનો પૈકી સ્વતંત્ર રીતે એક સત્ય અને બીજું અસત્ય હોઈ શકે અથવા બંને સત્ય હોય તો વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી છે માટે પર્યાપ્ત છે કે નહિ તે નક્કી કરવાનું રહે છે.

વિધાન 1 : નિષ્કર્ષ

વિધાન 2 : કારક

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં 4 વિકલ્પો (A), (B), (C) તથા (D) નીચે પ્રમાણે હોય છે :

(A) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે તથા વિધાન 2 સત્ય છે.

(88) **વિધાન 1 :** $2^{3n} - 7n$ ને 49 વડે ભાગતાં શેષ 1 મળે.

વિધાન 2 : $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r, \forall n \in N$

ઉકેલ : $2^{3n} = 8^n = (1+7)^n$

$= 1 + 7n + \binom{n}{2} 7^2 + \binom{n}{3} 7^3 + ... + \binom{n}{n} 7^n$

$\therefore 2^{3n} - 7n = 1 + 49 \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3} 7 + ... + 7^{n-2}\right]$

$= 1 + 49\,m$ જ્યાં m એ ધન પૂર્ણાંક છે.

$\therefore$ $2^{3n} - 7n$ ને 49 વડે ભાગતાં શેષ 1 મળે.

$\therefore$ વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(89) **વિધાન 1 :** $(1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5)^{50}$ ના વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા 251 છે.

વિધાન 2 : $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + ... + \binom{n}{n} x^n$

ઉકેલ : $(1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5)^{50}$

$= [(1+x)^5]^{50} = (1+x)^{250}$ નાં વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા $250 + 1 = 251$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન 2 પણ સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ :** (A)

(90) **વિધાન 1 :** $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^{50}$ ના વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા 101 છે.

વિધાન 2 : $(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r)^n$ ના વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા $\binom{n+r-1}{n}$ છે.

ઉકેલ : $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^{50} = \frac{1}{x^{50}} (1 + x + x^2)^{50}$

$= \frac{1}{x^{50}} \left[1 + \binom{50}{1}(x + x^2) + \binom{50}{2}(x + x^2)^2 + ... + (x + x^2)^{50}\right]$

$= \frac{1}{x^{50}} [a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ... + a_{101} x^{100}]$

$\therefore$ પદોની કુલ સંખ્યા $= 100 + 1 = 101$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r)^n$ ના વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા

= સમીકરણ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_r = n$ના અનૃણ પૂર્ણાંક ઉકેલોની સંખ્યા

= $(1 + t + t^2 + ... + t^n)^r$ માં t^n નો સહગુણક

= $(1 - t^{n+1})(1 - t)^{-r}$ માં t^n નો સહગુણક

= $(1 - t)^{-r}$ માં t^n નો સહગુણક = $\binom{n+r-1}{n}$

$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r)^n$ ના વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા $= \binom{n+r-1}{n}$

∴ વિધાન 2 પણ સત્ય છે પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ :** (B)

(91) **વિધાન 1 :** $\sum_{r=0}^{n} (r + 1) \cdot {}_nC_r = (n + 2)\, 2^{n-1}$

વિધાન 2 : $\sum_{r=0}^{n} (r + 1) \cdot {}_nC_r \cdot x^r = (1 + x)^n + nx\,(1 + x)^{n-1}$ (AIEEE : 2008)

ઉકેલ : $(1 + x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \cdot x^r$ ની બંને બાજુ x વડે ગુણતાં,

$x(1 + x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \cdot x^{r+1}$. હવે x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$(1 + x)^n + nx\,(1 + x)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} (r+1)\, {}_nC_r \cdot x^r \qquad (1)$$

∴ વિધાન 2 સત્ય છે.

સમીકરણ (1) માં $x = 1$ મૂકતાં

$$2^n + n\, 2^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} (r+1) \cdot {}_nC_r$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{n} (r+1)\, {}_nC_r = (n+2)\, 2^{n-1}$$

∴ વિધાન 1 પણ સત્ય છે. તથા વિધાન 2 પરથી વિધાન 1 સાબિત કરી શકાય છે. **જવાબ :** (A)

(92) **વિધાન 1 :** $32^{32^{32}} - 4$ એ 28 વડે વિભાજ્ય છે.

વિધાન 2 : $32^{32} - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : $32^{32} = (2^5)^{32} = 2^{160} = (1 - 3)^{160}$

$$= 1 - \binom{160}{1}3 + \binom{160}{2}3^2 + ... + 3^{160}$$

$$= 1 + 3k \qquad k \in Z$$

∴ $32^{32} - 1 = 3k$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

નોંધ : $32^{32} - 1 \equiv (-1)^{32} - 1 \equiv 0 \pmod 3$

$\therefore$ $32^{32} - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે.

હવે $32^{32^{32}} = 32^{3k+1} = 2^{5(3k+1)} = 2^{15k+5}$

$$= 4 \cdot 2^{3(5k+1)}$$

$$= 4 \cdot 8^{5k+1}$$

$$= 4 \cdot (1 + 7)^{5k+1}$$

$$= 4 \left[1 + \binom{5k+1}{1} 7 + \binom{5k+1}{2} 7^2 + \ldots + 7^{5k+1}\right]$$

$$= 4(1 + 7n) \qquad n \in Z$$

$$= 4 + 28n$$

$\therefore$ $32^{32^{32}} - 4 = 28n$ એ 28 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

જવાબ : (B)

નોંધ : $32^{32^{32}}$ તથા 4 બંને 4 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $32^{32^{32}} - 4$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે.

$$32^{32^{32}} \equiv 4^{4^4} \pmod 7$$

$$\equiv 4^{16.16} \pmod 7$$

$$\equiv 4^{2.2} \pmod 7$$

$$\equiv 4^4 \equiv 256 \equiv 4 \pmod 7$$

$\therefore$ $32^{32^{32}} - 4$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $32^{32^{32}} - 4$ એ 28 વડે વિભાજ્ય છે.

●