

AJ-1144 -M.E.- CV-19
B.Sc. (Part-II)
Term End Examination, 2021-22
MATHEMATICS (Paper-I)

Time : Three hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note: Attempt all five questions. One question from each unit is compulsory. All question carry equal marks.

इकाई-I / Unit-I

1. (a) अनुक्रम को परिभाषित कीजिए। दर्शाइये कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है परन्तु इसका विलोम सामान्यतः सत्य नहीं है।

Define sequence. Prove that every convergent sequence is bounded but its converse is not true in general.

- (b) श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Check the convergent of series :

$$1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3^2 x^2}{3!} + \frac{4^3 x^3}{4!} + \dots, x > 0$$

अथवा/OR

- (a) एकान्तर श्रेणी को परिभाषित कीजिए। निम्न श्रेणी के लिए निरपेक्षतः तथा प्रतिबंधी अभिसरण का परीक्षण कीजिए—

Define alternating series. Test for absolute and conditional convergence for the following series—

$$\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots$$

- (b) रॉबी परीक्षण का कथन लिखिए। निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए—

State the statement of Rabe's test. Test for convergency of the following series:

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \dots, x > 0.$$

इकाई-II / Unit -II

- 2.(a) निम्न फलन के लिए बिन्दु $x = 0$ पर सांतत्य एवं अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए—

Test for continuity and differentiability for the following function at a point $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- (b) एक समान सांतत्य को परिभाषित कीजिए। फलन $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ के लिए अंतराल $[2, 4]$ में लैग्रांज के मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

[P.T.O.]

Define uniform continuity. Verify Lagrange's mean value theorem for the function $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ in the interval $[2, 4]$.

अथवा/OR

- (a) सिद्ध कीजिए कि कोई फलन किसी बिन्दु पर अवकलनीय है तो वह फलन उस बिन्दु पर सतत होता है परन्तु विलोम सत्य नहीं है।

Show that if a function is differentiable at a point then the function is also continuous at the point but the converse is not true.

- (b) टेलर का प्रमेय (शेषफल का लैग्रान्ज स्वरूप) को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Taylor's theorem (with Lagrange's form of remainder).

इकाई-III/Unit-III

- 3.(a) यदि $x^x y^y z^z = c$ तब सिद्ध कीजिए कि $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$ यदि $x = y = z$

If $x^x y^y z^z = c$, then show that $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$ when $x = y = z$.

- (b) दो चरों के फलन के लिए सीमा को परिभाषित कीजिए। यदि $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \tan u.$$

Define limit of two variables function. If $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$, then show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \tan u.$$

अथवा/OR

- (a) यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ तब दर्शाइये कि

$$(i) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$$

$$(ii) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = -\frac{9}{(x + y + z)^2}$$

If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ Prove that

$$(i) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$$

$$(ii) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = -\frac{9}{(x + y + z)^2}$$

- (b) यदि $x = r \cos \theta \cos \phi$, $y = r \cos \theta \sin \phi$, $z = r \sin \theta$ तब सिद्ध कीजिए कि जैकोबियन

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = -r^2 \cos \theta$$

If $x = r \cos \theta \cos \phi$, $y = r \cos \theta \sin \phi$, $z = r \sin \theta$ then prove that the Jacobian

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = -r^2 \cos \theta.$$

इकाई-IV/ Unit-IV

- 4.(a) सरल रेखा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a + a \cos \alpha \log \tan \frac{\alpha}{2}$ के अन्वालोप का समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ α -प्राचल है।

Find the equation of envelope for the straight line $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a + a \cos \alpha \log \tan \frac{\alpha}{2}$ where α is a parameter.

- (b) फलन $u = ax^3y^2 - x^4y^2 - 3x^3y^3$ के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ की विवेचना कीजिए।
Describe the maxima or minima for the function $u = ax^3y^2 - x^4y^2 - 3x^3y^3$.

अथवा/OR

- (a) अतिपरवलय $2xy = a^2$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।
Find the evaluate of the hyperbola $2xy = a^2$.
- (b) दिए गए निम्न शर्त के अधीन फलन $u = x^2 + y^2 + z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए—
 $ax + by + cz = p$
Find the minima for the function $u = x^2 + y^2 + z^2$ under the following given condition.
 $ax + by + cz = p$

इकाई-V/ Unit-V

5. (a) गामा फलन को परिभाषित करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n \pi}, 0 < n < 1$$

By defining Gamma function prove that

$$\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n \pi}, 0 < n < 1$$

- (b) मूल्यांकन कीजिए।

Evaluate : $\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx dy.$

अथवा/OR

- (a) मूल्यांकन कीजिए—

Evaluate : $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dx dy dz.$

- (b) मूल्यांकन कीजिए।

Evaluate :

(i) $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$ (ii) $\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} dx dy.$