

AJ-1108

B.A./B.Sc. (Part-I) Term End Examination, 2021-22

MATHEMATICS (Paper-III)

Time : 3 hours]

[Maximum Marks : 50

नोट- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से दो प्रश्नों को हल करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
Note : Attempt all five questions. Two questions from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

Unit-I

1. (a) निम्न सदिशों के व्युत्क्रम पद्धति के सदिश ज्ञात कीजिए—

Find the inverse vector of the following vectors :

$$2i - 3j - k, \quad i - j - 2k, \quad -i + 2j + 2k$$

- (b) फलन $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ का दिशीय अवकलज बिन्दु (1, 2, 3) पर रेखा PQ की दिशा में ज्ञात कीजिए। जहाँ Q के निर्देशांक (5, 0, 4) है।

Find the directional derivative at point (1, 2, 3) for function $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ in the direction of line PQ. Where co-ordinate of Q be (5, 0, 4).

- (c) $(r^n \vec{r})$ सदिश परिनालकीय है तो n का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of n , when vector $(r^n \vec{r})$ is solenoidal.

Unit-II

2. (a) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_S (axi + byj + czk) \cdot \hat{n} ds = \frac{4}{3} \pi (a + b + c)$$

जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ की सतह है।

Prove that $\int_S (axi + byj + czk) \cdot \hat{n} ds = \frac{4}{3} \pi (a + b + c)$ where S be the surface of sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- (b) स्टोक्स के प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2)i - 2xyj$, जबकि समाकलन को $x = \pm a$ तथा $y = 0$ & $y = b$ से बने आयत के परितः किया गया है।

Verify Stokes theorem, where $\vec{F} = (x^2 + y^2)i - 2xyj$ when integration is between the curve $x = \pm a$ & $y = 0$ to $y = b$ forms a rectangle.

- (c) $\oint_C [(xy + y^2)dx + x^2dy]$ के लिए समतल में ग्रीन प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ C , वक्र $y = x$ तथा $y = x^2$ द्वारा घिरा है।

Verify Green's theorem for $\oint_C [(xy + y^2)dx + x^2dy]$ in plane, where C is surrounded by $y = x$ and $y = x^2$.

Unit-III

3. (a) शांकव $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$ का अनुरेखण कीजिए तथा नाभि के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Trace the conic $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$ and find co-ordinate of its focus.

[P.T.O.]

- (b) सिद्ध कीजिए कि केंद्र से दो दिये गये सनाभियों पर कोई दो समांतर स्पर्श रेखाओं पर डाले गए लंबों के वर्गों का अंतर अचर होता है।

Prove that on any given confocal from centre, the difference of the square of perpendicular on any two parallel tangent lines is constant.

- (c) यदि PSP' शोकव $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ की एक नाभिगत जीवा है जिसका नाभि S है तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}.$$

If PSP' is a focal card of conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ whose focus is S , then prove that

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}$$

bdkb&IV / Unit-IV

4. (a) एक समतल बिंदु (a, b, c) से जाते हुए निर्देशांकों अक्षों को क्रमशः A, B, C पर काटता है, सिद्ध कीजिए कि गोले $OABC$ के केंद्र का बिंदुपथ का समीकरण $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ होगा।

A plane cuts the co-ordinate axis at A, B, C through (a, b, c) . Prove that the equation of locus of centre of sphere $OABC$ is $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$.

- (b) सिद्ध कीजिए कि शंकु $ayz + bzx + cxy = 0$ तथा $\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = 0$ परस्पर व्युत्क्रम शंकु है।

Prove that cones $ayz + bzx + cxy = 0$ and $\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = 0$ are mutually invertible.

- (c) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी जनक रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के समांतर है तथा वक्र $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$ से होकर जाते हैं।

Find the equation of cylinder, whose generator is parallel to $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and curve is passing through $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$.

bdkb&V / Unit-V

5. (a) दर्शाइये कि समतल $x + 2y - 2z = 4$, परवलयज $3x^2 + 4y^2 = 24z$ को स्पर्श करता है तथा स्पर्श बिन्दु ज्ञात कीजिए।

Show that plane $x + 2y - 2z = 4$ touches the paraboloid $3x^2 + 4y^2 = 24z$ and find its touching point.

- (b) अतिपरवलय $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ के बिन्दु $(-1, 0, 3)$ से जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।
Find the equation of generators for the hyperboloid $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ passing through the point $(-1, 0, 3)$.

- (c) दर्शाइये कि एक दीर्घवृत्तज के नाभिगत शोकवों की उत्केन्द्रताओं का गुणनफल इकाई होता है।
Show that the product of eccentricities of focal conics of an ellipsoid is one.