

अनुक्रमांक

नाम

131 324(FH)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all nine questions in this question paper.

- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 7\}$ तो $A \cap (B \cup C)$ का मान ज्ञात कीजिए।

ख) हल कीजिए :
 $\tan \theta + \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan \theta \tan 2\theta = \sqrt{3}$

ग) सिद्ध कीजिए कि $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1} x$.

घ) समतल $2x - y + z = 5$ के अधिलम्ब का, दिक् अनुपात ज्ञात कीजिए।

ङ) यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

1. Attempt all parts of the following :

a) If $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 7\}$

then find $A \cup (B \cap C)$.

b) Solve :

$$\tan \theta + \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan \theta \tan 2\theta = \sqrt{3}.$$

c) Prove that $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1} x$.

d) Find the direction ratio of the normal to the plane $2x - y + z = 5$.

e) Find the angle between the vectors

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ and } \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}.$$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}.$$

ख) सिद्ध कीजिए $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

ग) यदि $x = a \cos^2 2t$ तथा $y = a \sin^2 2t$ है

तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

घ) यदि $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए $(A - B)' = A' - B'$.

ङ) यदि $P(A) = 0.12$, $P(B) = 0.15$ और

$P(B/A) = 0.18$ तो ज्ञात कीजिए $P(A \cap B)$.

2. Attempt all parts of the following :

a) Evaluate $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}.$

b) Prove that $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

c) If $x = a \cos^2 2t$ and

$y = a \sin^2 2t$ then find $\frac{dy}{dx}$.

d) If $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

then show that $(A - B)' = A' - B'$.

e) If $P(A) = 0.12$, $P(B) = 0.15$ and $P(B/A) = 0.18$ then find the value of $P(A \cap B)$.

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि यदि $f: A \rightarrow B$ तथा $g: B \rightarrow C$ एकैकी है तो $g \circ f: A \rightarrow C$ भी एकैकी है। 2

ख) यदि $x = \sin y$ तो सिद्ध कीजिए

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx} . \quad 2$$

ग) क्या $f(x) = |x|$; $x = 0$ पर अवकलनीय है ? 2

घ) किसी दौड़ में A के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है तथा B के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। उस दौड़ में A और B में से कोई न जीत पाए इसकी प्रायिकता क्या है ? 2

3. Attempt all parts of the following :

a) Prove that if $f: A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ are one-to-one then $g \circ f: A \rightarrow C$ is also one-to-one. 2

b) If $x = \sin y$, then prove that

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx} . \quad 2$$

c) Is $f(x) = |x|$ differentiable at $x = 0$? 2

d) The probability of A to win the race is $\frac{1}{3}$ and that of B to win the race is $\frac{1}{4}$. Find the probability that in this race neither A nor B wins the race. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि फलन $f: Q \rightarrow Q$ सम्बन्ध

$$f(x) = 3x - 4, \quad x \in Q$$

से परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी आच्छादक फलन है जहाँ Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय है। 2

ख) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

पर प्रक्षेप ज्ञात करें। 2

- ग) एक थैले में 4 सफेद और 2 काली गेंद हैं तथा दूसरे थैले में 3 सफेद और 5 काली गेंद हैं। यदि प्रत्येक थैले से एक गेंद निकाली जाय तो दोनों गेंद काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

- घ) दर्शाइए $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$, निम्न में किसके बराबर है : 2

- i) $-\cot(xe^x) + c$
- ii) $\tan(xe^x) + c$
- iii) $\tan(e^x) + c$
- iv) $\cot(e^x) + c$

4. Attempt all parts of the following :

- a) The function $f:Q \rightarrow Q$ is defined by the relation $f(x)=3x-4$, $x \in Q$. Prove that f is one-to-one and onto mapping where Q is the set of rational numbers. 2

- b) Find the projection of vector $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ on the vector $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$. 2

- c) There are 4 white and 2 black balls in a bag and in another bag 3 white and 5 black balls. Find the probability of getting both black balls if a ball is drawn from each bag. 2

- d) Show $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$ is equal

to which of the following : 2

- i) $-\cot(xe^x) + c$
- ii) $\tan(xe^x) + c$
- iii) $\tan(e^x) + c$
- iv) $\cot(e^x) + c$

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों का हल कीजिए :

क) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

ख) दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = (abc) \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

5

ग) समतल $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब इकाई सदिश की दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए। 5

घ) $\int_0^{\pi} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx$ का मान ज्ञात करें। 5

ङ) सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक के लम्बवत् मापक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ है। 5

इ) $Z = 4x + y$ का अधिकतम मान निम्न दिये गये अवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए :

$$x + y \leq 50, 3x + y \leq 90, x \geq 0, y \geq 0.$$

5

च) दिए गये वक्र $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t$ के एक बिन्दु जहाँ $t = \frac{\pi}{2}$ है, पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

6. Attempt any five parts of the following :

a) Discuss the continuity of the function $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x \leq 1 \\ x-2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ 5

b) Differentiate $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x + x^x$ with respect to x . 5

c) Find the equation of the curve passing through the point $(1, -1)$ whose differential equation is

$$xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2).$$

5

- d) The probability of solving a question by three students A, B, C are respectively $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$ and $\frac{1}{10}$.

Find the probability of solving the question. 5

- e) Find the maximum value of $Z = 4x + y$ under the constraints given by $x + y \leq 50$, $3x + y \leq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 5

- f) Find the equation of the tangent to the curve $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ at the point where $t = \frac{\pi}{2}$. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) आव्यूह विधि से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करें :

$$x + y + z = 8$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1.$$

8

Turn over

ख) यदि $|x-5-1| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ है,

तो x का मान ज्ञात कीजिए। 8

7. Attempt any one part of the following :

- a) Solve the following system of equations by matrix method :

$$x + y + z = 8$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1.$$

8

b) If $|x-5-1| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

then determine x .

8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) एक घन का आयतन $9 \text{ cm}^3/\text{s}$ की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर को लम्बाई 10 cm है तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है ? 8

- ख) ऐसे परवलयों के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनका शीर्ष मूल बिन्दु पर है तथा जिनका अक्ष धनात्मक x -अक्ष की दिशा में है। 8

8. Attempt any one part of the following :

a) The volume of a cube is increasing at the rate of $9 \text{ cm}^3/\text{s}$. Find the rate by which its surface area is increasing if the length of the edge of the cube is 10 cm. 8

b) Find the differential equation of a family of parabolas whose vertices are at the origin and whose positive axes are in the positive side of the x-axis. 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a-x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

च) सिद्ध कीजिए कि दी गयी त्रिकोण ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ होता है। 5

5. Attempt any five parts of the following :

a) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$. 5

b) Show that

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = (abc) \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

5

c) Find the direction cosine of orthogonal unit vector drawn from the origin on the plane

$$\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0. \quad 5$$

d) Evaluate $\int_0^{\pi} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx$. 5

e) Find the normal unit vector for each of vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$

where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}. \quad 5$$

- 1) Prove that the semi-vertical angle of a cone with given slant height and maximum volume is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$. 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित फलन के सातत्य पर विचार कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{यदि } x \leq 1 \\ x-2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases} \quad 5$$

ख) x के सापेक्ष में $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x + x^x$ का अवकलन कीजिए। 5

ग) अवकल समीकरण $xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ के बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरने वाले वक्र को ज्ञात कीजिए। 5

घ) किसी प्रश्न को तीन छात्रों A, B, C के हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}$ तथा $\frac{1}{10}$ है तो प्रश्न के हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

9. Attempt any one part of the following :

a) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$. 8

b) Evaluate $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a-x}} dx$. 8

324(FH)- 95,000