(98) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - (\sin x)^{\sin x}}{1 - \sin x + \log_e(\sin x)} = ...$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) –1

ઉકેલ : ધારો કે $\sin x = t$. જો $x \to \frac{\pi}{2}$ તો $t \to 1$

$$\text{આપેલ લક્ષ} = \lim_{t \to 1} \frac{t - t^t}{1 - t + \log_e t} \qquad \left(\frac{0}{0} \quad \text{સ્વરૂપ}\right)$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{1 - t^t(1 + \log_e t)}{-1 + \frac{1}{t}} \qquad \left(\frac{0}{0} \quad \text{સ્વરૂપ}\right)$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{-t^t(1 + \log_e t)^2 - t^t \cdot \frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \frac{-1-1}{-1} = 2$$

જવાબ : (C)

(99) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sum_{r=1}^{2016} (r + x)^{2016}}{x^{2016} + 2016^{2016}} = ...$

(A) 2014 (B) 2015 (C) 2016 (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\left\{(1+x)^{2016} + (2+x)^{2016} + ... + (2016+x)^{2016}\right\}}{x^{2016} + 2016^{2016}}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^{2016}\left\{\left(\frac{1}{x}+1\right)^{2016} + \left(\frac{2}{x}+1\right)^{2016} + ... + \left(\frac{2016}{x}+1\right)^{2016}\right\}}{x^{2016}\left(1 + \left(\frac{2016}{x}\right)^{2016}\right)}$$

$$= \frac{(0+1)^{2016} + (0+1)^{2016} + ... + (0+1)^{2016}}{1+0} = 2016 \qquad \left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0\right)$$

જવાબ : (C)

(100) જો $5f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 2$ અને $y = x f(x)$, તો $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = ...$

(A) 14 (B) –1 (C) 1 (D) $\frac{7}{8}$

ઉકેલ : $5f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 2 \qquad (1)$

$5f'(x) + 3f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 \qquad (2)$

હવે, $y = x f(x)$ પરથી $\frac{dy}{dx} = f(x) + xf'(x)$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = f(1) + f'(1)$

(1) માં $x = 1$ મૂકતાં, $5 f(1) + 3f(1) = 3$. આથી $f(1) = \frac{3}{8}$

(2) માં $x = 1$ મૂકતાં, $5 f'(1) - 3f'(1) = 1$. આથી $f'(1) = \frac{1}{2}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$ **જવાબ :** (D)

(101) ધારો કે વિધેય f એ દ્વિતીય વિકલિત ધરાવતું એવું વિધેય છે, જ્યાં $f''(x) = -f(x)$ અને $f'(x) = g(x)$. જો $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$ અને $h(5) = 3$ તો $h(10) =$ ......

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $g(x) = f'(x)$

$\therefore g'(x) = f''(x) = -f(x)$

$h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$

$\therefore h'(x) = 2 f(x) f'(x) + 2 g(x) g'(x) = 2 f(x) f'(x) + 2 f'(x) (-f(x)) = 0$

$\therefore h(x)$ અચળ વિધેય છે.

$h(5) = 3$ હોવાથી, $h(10) = 3$ **જવાબ :** (D)

(102) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan\sqrt[3]{x}\,\log(1+3x)}{\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^2 (e^{5\sqrt[3]{x}}-1)} =$ ......

(A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{5}$ (D) 0

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\tan\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x} \times \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{3x}\cdot 3x}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{x}\right)^2 \times \lim_{x\to 0}\frac{e^{5\sqrt[3]{x}}-1}{5\sqrt[3]{x}}\times 5\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\cdot 3x}{x\,5\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{5}$ **જવાબ :**

(C)

(103) જો $xy = e - e^y$ તો $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} =$ ......

(A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{1}{e^3}$ (C) $\frac{1}{e^2}$ (D) e^2

ઉકેલ : $xy = e - e^y$ (1)

$x\frac{dy}{dx} + y = -e^y\frac{dy}{dx}$ (2)

$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = -e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - e^y\frac{d^2y}{dx^2}$ (3)

(1)માં $x = 0$ મૂકતાં, $0 = e - e^{y(0)}$

$\therefore e^{y(0)} = e^1$. આથી $y(0) = 1$

(2)માં $x = 0$ મૂકતાં, $y(0) = -e^{y(0)}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$

$1 = -e\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$. આથી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{1}{e}$

(3)માં $x = 0$ મૂકતાં, $2\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -e^{y(0)}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}\right]^2 - e^{y(0)}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$

$-\frac{2}{e} = -e\,\frac{1}{e^2} - e\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$

$\therefore\ \frac{1}{e^2} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$ **જવાબ :** (C)

(104) ધારો કે $f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ જો $f(x)$ એ $x = 0$ આગળ સતત હોય, પરંતુ વિકલનીય ન હોય તો

(A) $n \in (0, 1]$ (B) $n \in [1, \infty)$ (C) $n \in (-\infty, 0)$ (D) $n = 0$

ઉકેલ : $f(x)$ એ $x = 0$ આગળ સતત હોવાથી,

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x} = 0$

$\therefore n > 0$ ($n > 0$ હોય તો $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$ લઈ શકાય.)

જો $f(x)$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય હોય, તો

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ નું અસ્તિત્વ હોય.

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{x^n \sin\frac{1}{x} - 0}{x}$ નું અસ્તિત્વ હોય.

$\therefore \lim_{x\to 0} x^{n-1} \sin\frac{1}{x}$ નું અસ્તિત્વ હોય.

$\therefore n - 1 > 0$. આથી $n > 1$

જો $n \le 1$ હોય, તો $\lim_{x\to 0} x^{n-1} \sin\frac{1}{x}$ નું અસ્તિત્વ ન હોય અને તેથી $f(x)$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય ન હોય.

$\therefore$ જો $n \in (0, 1]$ હોય તો $f(x)$ એ $x = 0$ આગળ સતત હોય પરંતુ x વિકલનીય ન હોય. **જવાબ :** (A)

(105) જો $f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k |x-1|^k\right)$ જ્યાં $a_k > 0$, તો $f(x)$ એ

(A) $x = 1$ આગળ સતત નથી. (B) R પર સતત છે, પરંતુ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

(C) R પર વિકલનીય છે. (D) R પર સતત છે પરંતુ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

ઉકેલ : $|x-1|, |x-1|^2, \ldots$ એ R પર સતત છે. સતત વિધેયનો સરવાળો પણ સતત હોવાથી $f(x)$ એ R પર સતત થશે. વળી, $|x-1|, |x-1|^3, \ldots$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

$\therefore f(x)$ એ R પર સતત છે પરંતુ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી. **જવાબ :** (D)

(106) ધારો કે વાસ્તવિક વિધેય f માટે $f(x+y) = f(x) - f(y) + 2xy - 1, \forall\ x, y \in R$.
જો f એ વિકલનીય હોય અને $f'(0) = b$ હોય, તો b ની કઈ કિંમત માટે $f(x) > 0, \forall\ x$ થશે ?
(A) આવો b ન મળે. (B) $b > 0$ (C) $b < 0$ (D) $b = 0$

ઉકેલ : વિધેય f સમીકરણ $f(x+y) = f(x) - f(y) + 2xy - 1$ માં $x = 0 = y$ મૂકતાં, $f(0) = -1$ મળે.

હવે, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$

$= 2x - \lim_{x\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 2x - f'(0) = 2x - b$ $(f(0) = -1)$

$\therefore f'(x) = 2x - b$

$\therefore f(x) = x^2 - bx + c$ જ્યાં c અચળ

$x = 0$ મૂકતાં, $c = -1$. આથી $f(x) = x^2 - bx - 1$

$\forall\ x \in R$, જો $D = b^2 - 4ac = b^2 + 4 < 0$ હોય તો $f(x) > 0$ થાય. $(a = 1)$

આ b ની કોઈ પણ વાસ્તવિક કિંમત માટે શક્ય નથી. **જવાબ :** (A)

(107) જો $y = sin\ x \cdot sin\ 2x \cdot sin\ 3x \dots \cdot sin\ nx$, તો $\frac{dy}{dx} = \dots\dots$

(A) $\sum_{k=1}^{n} k\ tan\ kx$ (B) $y \sum_{k=1}^{n} k\ cot\ kx$ (C) $y \sum_{k=1}^{n} k\ tan\ kx$ (D) $\sum_{k=1}^{n} k\ cot\ kx$

ઉકેલ : $y = sin\ x \cdot sin\ 2x \cdot sin\ 3x \dots \cdot sin\ nx$

$\therefore \log y = \log sin\ x + \log sin\ 2x + \dots + \log sin\ nx$

$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = cot\ x + 2\ cot\ 2x + \dots + n\ cot\ nx$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y \sum_{k=1}^{n} k\ cot\ kx$ **જવાબ :** (B)

(108) જો $f(x+y+z) = f(x) f(y) f(z), \forall\ x, y \in R, f(4) = 4, f'(0) = 2$ તો $f'(4), f(4), f'(0)$ એ ......
(A) સમાંતર શ્રેણીમાં છે. (B) સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.
(C) સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. (D) (A), (B), (C) ત્રણેય સત્ય છે.

ઉકેલ : $f(x+y+z) = f(x) f(y) f(z)$ (1)

સમીકરણ (1)માં $x = 4, y = 0, z = 0$ મૂકતાં,

$f(4) = f(4) f(0) f(0)$

$\therefore f(0) = \pm 1$ $(f(4) = 4 \neq 0)$

ફરીથી સમીકરણ (1)માં $x = 4, y = -2, z = -2$ મૂકતાં,

$f(0) = f(4)\ [f(-2)]^2 \geq 0 = 4\left[f(-2)\right]^2 \geq 0$.

$\therefore f(0) \neq -1$ આથી $f(0) = 1$

સમીકરણ (1)માં $y = 4, z = 0$ મૂકતાં,

$f(x+4) = f(x) f(4) f(0) = 4 f(x)$

$\therefore\ f'(x+4) = 4f'(x)$. આથી $f'(4) = 4f'(0) = 8$

$\therefore\ f'(4), f(4), f'(0)$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (B)

(109) જો $\sqrt{r} = ae^{\theta \cot\alpha}$ તો $\dfrac{d^2r}{d\theta^2} - 4r\cot^2\alpha = ...(a, \alpha \in R)$

(A) r (B) $\frac{1}{r}$ (C) 1 (D) 0

ઉકેલ : $\sqrt{r} = ae^{\theta \cot\alpha}$

$\therefore r = a^2 e^{2\theta \cot\alpha}$ (1)

$\therefore \dfrac{dr}{d\theta} = a^2 \cot\alpha \cdot 2e^{2\theta\cot\alpha}$

$\therefore \dfrac{d^2r}{d\theta^2} = 4a^2\cot^2\alpha \cdot e^{2\theta\cot\alpha}$. આથી $\dfrac{d^2r}{d\theta^2} - 4r\cot^2\alpha = 0$ **જવાબ :** (D)

(110) જો $f(x) = \dfrac{\sin^2x}{1+\cot x} + \dfrac{\cos^2x}{1+\tan x}$ તો $f'(x) = ...$

(A) $\cos 2x$ (B) $-\cos 2x$ (C) $\sin 2x$ (D) $-\sin 2x$

ઉકેલ : $f(x) = \dfrac{\sin^2x}{1+\cot x} + \dfrac{\cos^2x}{1+\tan x}$

$$= \frac{\sin^2x.\tan x}{1+\tan x} + \frac{\cos^2x}{1+\tan x}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin^3x}{\cos x}+\cos^2x}{1+\tan x}$$

$$= \frac{\sin^3x+\cos^3x}{\sin x+\cos x} = \sin^2x - \sin x\cos x + \cos^2x$$

$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$. આથી $f'(x) = -\cos 2x$ **જવાબ :** (B)

(111) જો $f(x) = 1 - \cos x$ હોય, તો $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{e^{\sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right)...}}}}\right\}^{\frac{1}{\cos^{-1}\left\{1-f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}}} = ...$

(A) e (B) 1 (C) $\sqrt{e}$ (D) $\sqrt{\sqrt{e}}$

ઉકેલ : $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \cos\dfrac{1}{x^2}$ આથી $\cos\dfrac{1}{x^2} = 1 - f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$\therefore \frac{1}{x^2} = cos^{-1}\left\{1-f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}$ આથી $x^2 = \frac{1}{cos^{-1}\left\{1-f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}}$

આપેલ લક્ષ $= \lim_{x\to\infty}\left\{e^{\sqrt{(1-\cos\frac{1}{x})\sqrt{(1-\cos\frac{1}{x})\sqrt{(1-\cos\frac{1}{x})...}}}}\right\}^{x^2}$

$= \lim_{y\to 0}\left\{e^{\sqrt{(1-\cos y)\sqrt{(1-\cos y)\sqrt{(1-\cos y)...}}}}\right\}^{\frac{1}{y^2}}$ $\left(\frac{1}{x}=y\right)$

$= e^{\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{(1-\cos y)\sqrt{(1-\cos y)\sqrt{(1-\cos y)...}}}}{y^2}}$

$= e^{\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}}$ $\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}=x\right)$

$= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ **જવાબ : (C)**

(112) $f(x) = \frac{|x|}{|x|+2016}$ એ કેટલા બિંદુએ વિકલનીય નથી ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) અનંત

ઉકેલ : જો $x < 0$ તો $f(x) = \frac{-x}{-x+2016} = \frac{x}{x-2016}$

જે બધા $x < 0$ માટે વિકલનીય થશે.

જો $x > 0$ તો $f(x) = \frac{x}{x+2016}$ જે બધા $x > 0$ માટે વિકલનીય થશે.

હવે, $x = 0$ માટે વિકલનીયની ચકાસણી કરીએ.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{x+2016}}{x} = \frac{1}{2016}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-x}{-x+2016}}{x} = -\frac{1}{2016}$$ **જવાબ : (B)**

$\therefore f$ એ $x = 0$ માટે વિકલનીય નથી.

(113) જો $y = 2^{x^{2^x}}$ તો $\frac{dy}{dx} = ...$

(A) $2^{x^{2^x}}\ x^{2^x}\log_e 2\left(2^x\log_e x\log_e 2+\frac{2^x}{x}\right)$ (B) $2^{x^{2^x}}\ (1 + x\log_e 2)\ 2^x\log_e 2$

(C) $2^{x^{2^x}}\ (1 + x\log_e 2)\ 2^x(\log_e 2)^2$ (D) $2^{x^{2^x}}\ (1 - x\log_e 2)\ 2^x\log_e 2$

ઉકેલ : $y = 2^{x^{2^x}}$

$\therefore \log_e y = x^{2^x} \log 2$

$\therefore \log_e (\log_e y) = 2^x \log_e x + \log_e (\log_e 2)$

$\therefore \frac{1}{\log_e y} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2^x (\log_e 2) (\log_e x) + 2^x \frac{1}{x} + 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y \log_e y \left(2^x(\log_e 2)(\log_e x) + \frac{2^x}{x}\right)$

$= 2^{x^{2^x}} x^{2^x} \log_e 2 \left(2^x(\log_e x)(\log_e 2) + \frac{2^x}{x}\right)$ **જવાબ : (A)**

(114) વિધેય $f(x)$ માટે $f''(x) + f(x) = 0, \forall x$ અને $g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$ તથા $g(3) = 8$ તો $g(8) = ...$

(A) 0 (B) 3 (C) 5 (D) 8

ઉકેલ : $g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$

$g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x)$

$= 2f'(x)(0) = 0, \forall x$ આથી $g'(x) = 0$

$\therefore g(x) =$ અચળ

$g(3) = 8$ હોવાથી, $g(8) = 8$ **જવાબ : (D)**

(115) જો વિધેય $g(x)$ એ વિધેય $f(x)$નું પ્રતિવિધેય હોય અને $f'(x) = \frac{1}{1+x^3}$, તો $g'(x) = ...$

(A) $g(x)$ (B) $1 + g(x)$ (C) $1 + [g(x)]^3$ (D) $\frac{1}{1+[g(x)]^3}$

ઉકેલ : $[f(x)]^{-1} = g(x)$

$\therefore g(f(x)) = x$

$\therefore g'(f(x)) f'(x) = 1$

$\therefore g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = 1 + x^3$

$\therefore g'[f(f^{-1}(x))] = 1 + [f^{-1}(x)]^3$

$\therefore g'(x) = 1 + [g(x)]^3$

બીજી રીત :

વિધેય g એ વિધેય f નું પ્રતિવિધેય છે.

$\therefore f(g(x)) = x$

$\therefore f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$

$\therefore \frac{1}{1+(g(x))^3} \cdot g'(x) = 1$

$\therefore g'(x) = 1 + (g(x))^3$ **જવાબ : (C)**

(116) જો $g : (-\infty, \infty) \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $g(x) = 2\, tan^{-1} (e^x) - \frac{\pi}{2}$ અને f એ g નું પ્રતિવિધેય હોય તો $f'(0) = ...$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : અહીં $f = g^{-1}$. આથી $g^{-1}(x) = f(x)$

અહીં $g(x) = y = 2\, tan^{-1} (e^x) - \frac{\pi}{2}$

$\therefore tan^{-1} (e^x) = \frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}$

$\therefore x = \log tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$

$\therefore g^{-1}(y) = \log tan \left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)$ $(g(x) = y)$

$\therefore g^{-1}(x) = \log tan \left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

$\therefore f(x) = \log tan \left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} sec^2 \left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore f'(0) = \frac{1}{tan\frac{\pi}{4}} sec^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1$ જવાબ : (A)

(117) જો $f(x) = \lim_{n\to\infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \ldots n$ પદ$]$, તો $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots$ $|x| < 1$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots.n}{1-x}\right\}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{2n}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ $\left(\lim_{n\to\infty} x^n = 0, |x| < 1\right)$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ જવાબ : (B)

(118) જો $y = \sqrt{2x-x^2}$ માટે, $y^3 \frac{d^2y}{dx^2} + k = 0$, હોય તો $k = \ldots\ldots$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $y = \sqrt{2x-x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{y}$

$\therefore y\frac{dy}{dx} = 1-x$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = -1$ પદ સુધી

$\therefore y^3 \frac{d^2y}{dx^2} = -y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = -(1-x)^2-(2x-x^2)$

$\therefore y^3 \frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0.$ આથી $k = 1$ જવાબ : (A)

(119) જો $f(x) = |x|$, $g(x) = sin\ x$ અને $h(x) = g(x)\ f(g(x))$ તો ......

(A) $h(x)$ એ સતત વિધેય છે પરંતુ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

(B) $h(x)$ એ સતત તેમજ વિકલનીય વિધેય છે.

(C) $h(x)$ એ સતત વિધેય છે અને ફક્ત $x = 0$ આગળ વિકલનીય છે.

(D) $h(x)$ એ અસતત વિધેય છે.

ઉકેલ : $h(x) = sin\ x\ |sin\ x| = \begin{cases} sin^2 x\ , & x \ge 0 \qquad (0 \le x \le \frac{\pi}{2}) \\ -sin^2 x, & x < 0 \qquad (-\frac{\pi}{2} < x < 0) \end{cases}$

સ્પષ્ટ છે કે $h(x)$ એ સતત તેમજ વિકલનીય વિધેય છે. **જવાબ :** (B)

(120) વિધેય $f : R \to R$ માટે $f(a) = 1, f'(a) = 2$, તો $\lim_{x\to 0} \left(\frac{f^2(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}} = e^k$ તો $k =$ ......

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} \left(\frac{f^2(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}} \left(\frac{f^2(a+x)-1}{x\,f(a)}\right)$

$= e^{\lim_{x\to 0}} \left(\frac{f^2(a+x)-(f(a))^2}{x}\right) \qquad (f(a) = 1)$

$= e^{(f'(a))^2} = e^4$

$\therefore k = 4$ **જવાબ :** (D)

(121) વિધેય $f : R \to R$ માટે નીચે આપેલ પૈકી કયા વિધાન સત્ય (T) કે મિથ્યા (F) છે ?

(i) જો $|f(x) - f(y)| \le 30\ |x - y|$, $\forall\ x, y \in R$, તો f એ R પર સતત વિધેય છે.

(ii) જો $|f(x) - f(y)| \le 30\ |x - y|$, $\forall\ x, y \in R$, તો f એ R પર વિકલનીય વિધેય છે.

(iii) જો $|f(x) - f(y)| \le 21\ |x - y|^2$, $\forall\ x, y \in R$ તો f એ R પર વિકલનીય વિધેય છે.

(iv) જો $|f(x) - f(y)| \le 21\ |x - y|^2$, $\forall\ x, y \in R$ તો f એ અચળ વિધેય છે.

(A) TTTT (B) TFTT (C) FTTF (D) TFTF

ઉકેલ : વિધાન (i) સત્ય છે તે લક્ષની વ્યાખ્યા પરથી ($\delta = \frac{\varepsilon}{30}$ લો) સહેલાઈથી સાબિત કરી શકાય.

વિધાન (ii) મિથ્યા છે, તે $f(x) = |x|$ લઈને ચકાસી શકાય.

વિધાન (iii), (iv) માટે કોઈક $a \in R$ માટે $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \le 21\ |x - a|$

$\therefore f$ એ R પર વિકલનીય વિધેય છે.

જો $x \to a$ તો $|f'(a)| \le 0$

$\therefore |f'(a)| = 0$

$\therefore f$ એ અચળ વિધેય છે. આથી વિધાન (iii), (iv) સત્ય છે. **જવાબ :** (B)

(122) f એ વિકલનીય વિધેય છે તથા $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$, $x \neq 0, y \neq 0,\ f(y) \neq 0$ છે. જો $f'(1) = 2$ હોય, તો $f'(x) = ...$

(A) $2f(x)$ (B) $\frac{f(x)}{x}$ (C) $2x\,f(x)$ (D) $\frac{2f(x)}{x}$

ઉકેલ : અહીં $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$

$\therefore f\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{f(1)}{f(1)} = 1.$ આથી $f(1) = 1$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x) \lim_{h\to 0} \left\{\frac{\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1}{h}\right\}$$

$$= f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{x+h}{x}\right)-1}{h}$$

$$= \frac{f(x)}{x} \lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}} = \frac{f(x)}{x} f'(1) = \frac{2f(x)}{x} \qquad (f'(1) = 2)$$

જવાબ : (D)

(123) જો $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{x}-1\right)n$, તો $\frac{1}{f'(2012)}, \frac{1}{f'(2013)}, \frac{1}{f'(2014)}$ એ = ...

(A) સમાંતર શ્રેણીમાં હોય. (B) સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય.

(C) સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય. (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \log_e x.$ આથી $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\therefore \frac{1}{f'(2012)}, \frac{1}{f'(2013)}, \frac{1}{f'(2014)}$ એ અનુક્રમે 2012, 2013, 2014 થશે. એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય. **જવાબ :** (A)

(124) જો $a < b < c$, $f'(x)$ એ (a, c) પર ચુસ્ત રીતે વધતું વિધેય હોય અને $f(x)$ એ $[a, c]$ પર સતત હોય તો ......

(A) $(b-a)f(c) + (c-b)f(a) > (c-a)f(b)$ (B) $(b-a)f(c) + (c-b)f(a) < (c-a)f(b)$

(C) $(b-a)f(a) + (c-b)f(b) > (c-a)f(c)$ (D) $(b-a)f(a) + (c-b)f(b) > (c-a)f(c)$

ઉકેલ : $[a, b]$ તેમજ $[b, c]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\alpha)$ તથા $\frac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'(\beta)$, $\alpha \in (a, b), \beta \in (b, c)$

વળી, f' એ ચુસ્ત રીતે વધતુ વિધેય હોવાથી, $f'(\beta) > f'(\alpha)$

$\therefore \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} > \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\therefore (b-a) f(c) + (c-b) f(a) > (c-a) f(b)$ **જવાબ** : (A)

(125) વિધેય $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ માટે,

(1) $f(ab) = f(a) f(b)$ અને

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$, (જ્યાં $c \neq 0$,) પ્રકારનું છે. $f(4) = ...$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c,\ c \neq 0$

ધારો કે $a \in (0, \infty)$

$c = \lim\limits_{x\to\infty} f(ax) = \lim\limits_{x\to\infty} f(a) f(x)$

$= f(a) \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

$\therefore c = f(a)\, c$

$\therefore f(a) = 1$ $(a \in (0, \infty)), c \neq 0$

$\therefore f(4) = 1$ **જવાબ** : (A)

(126) અરિક્ત ગણ A, B માટે $f : A \to B$ અને $g : B \to A$ એવાં વિધેય છે જ્યાં $f(g(x)) = x,\ \forall\ x \in B$. નીચેનામાંથી કયા વિધાન સત્ય (T) કે મિથ્યા (F) છે ?

(i) વિધેય f એક-એક વિધેય છે. (ii) વિધેય f વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(iii) વિધેય g એક-એક વિધેય છે. (iv) વિધેય g વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(A) FTTF (B) FTFT (C) TTFF (D) TFTT

ઉકેલ : $x_1, x_2 \in B$ માટે $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g$ એક-એક વિધેય છે.
વળી, સ્પષ્ટ જોઈ શકાય છે કે f એ વ્યાપ્ત વિધેય છે. **જવાબ** : (A)
(f ડાબી બાજુનો પ્રતીપ હોવાથી એક-એક ના હોઈ શકે.)

(127) જો $3 f(x) - 2 f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, તો $f'(2) = ...$

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{7}{2}$

ઉકેલ : $3 f(x) - 2 f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ (1)

x ની જગ્યાએ $\frac{1}{x}$ મૂકતાં, $-2 f(x) + 3 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$ (2)

(1) અને (2) પરથી $f\left(\frac{1}{x}\right)$ નો લોપ કરતાં, $f(x) = \frac{1}{5}\left(3x + \frac{2}{x}\right)$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{5}\left(3 - \frac{2}{x^2}\right)$. આથી $f'(2) = \frac{1}{2}$ **જવાબ** : (B)

(128) જો $v e^{\frac{u}{v^3}} = 1$ તો ......

(A) $v \frac{d^2u}{dv^2} + 2 \frac{du}{dv} + 3v^2 = 0$ (B) $v \frac{d^2u}{dv^2} - 2 \frac{du}{dv} + 3v^2 = 0$

(C) $v \frac{d^2u}{dv^2} + 2 \frac{du}{dv} = 3v^2$ (D) $\frac{d^2u}{dv^2} - 2 \frac{du}{dv} = 3v^3$

ઉકેલ : $v e^{\frac{u}{v^3}} = 1$

$\log v + \frac{u}{v^3} = 0$. આથી $u + v^3 \log v = 0$ (1)

$\therefore \frac{du}{dv} + v^3 \frac{1}{v} + 3v^2 \log v = 0$

$\therefore v \frac{du}{dv} + v^3 + 3v^3 \log v = 0$

$\therefore v \frac{du}{dv} + v^3 + 3(-u) = 0$ ((1) પરથી)

$\therefore v \frac{d^2u}{dv^2} + \frac{du}{dv} + 3v^2 - 3 \frac{du}{dv} = 0$

$\therefore v \frac{d^2u}{dv^2} - 2 \frac{du}{dv} + 3v^2 = 0$ **જવાબ : (B)**

(129) $f : R \to R$ વિકલનીય વિધેય છે. જો $f(y) f(x - y) = f(x)$, $\forall x, y \in R$ અને $f'(0) = p$, $f'(5) = q$, $p, q \neq 0$ તો $f'(-5) =$ ......

(A) $\frac{p^2}{q}$ (B) $\frac{p}{q}$ (C) $\frac{q}{p}$ (D) q

ઉકેલ : $f(y) f(x - y) = f(x)$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં, $f(y) f'(x - y) = f'(x)$

$x = y$ મૂકતાં, $f(x) f'(0) = f'(x)$

$\therefore f'(x) = p f(x)$ $(f'(0) = p)$ (1)

$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int p\, dx + c$

$\therefore \log_e f(x) = px + c$ (2)

સમીકરણ (1)માં $x = 0$ મૂકતાં, $f'(0) = p f(0)$. આથી $p = pf(0)$. આથી $f(0) = 1$

$\therefore \log_e f(0) = c$

સમીકરણ (2) પરથી, આથી $\log_e 1 = c$. તેથી $c = 0$

$\therefore \log_e f(x) = px$

$\therefore f(x) = e^{px}$. આથી $f'(x) = pe^{px}$

$\therefore f'(5) = pe^{5p} = q$. આથી $e^{5p} = \frac{q}{p}$

$\therefore f'(-5) = pe^{-5p} = \frac{p}{q/p} = \frac{p^2}{q}$ **જવાબ : (A)**

(130) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$ = ...

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{2}{3}$

ઉકેલ : $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{1}{3}}+1^{\frac{1}{3}}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)+1}{\left(\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{1}{3}}+1}\right] \qquad \left(a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{1}{3}}+1}\right] = \frac{1}{3}$$

જવાબ : (A)

(131) જો વક્ર $xy + ax + by = 0$ ને (1, 1) આગળનો સ્પર્શક X-અક્ષ સાથે tan^{-1} 2 માપનો ખૂણો બનાવે, તો $\frac{a+b}{ab}$ = ...

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) 1

ઉકેલ : $xy + ax + by = 0$ નું વિકલન કરતાં $\left(x\frac{dy}{dx}+y+a+b\frac{dy}{dx}\right) = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{a+y}{b+x}\right)$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = -\frac{a+1}{b+1} = 2$ (આપેલ છે કે સ્પર્શક X-અક્ષ સાથે tan^{-1} 2 માપનો ખૂણો બનાવે છે.)

$\therefore a + 2b = -3$ (1)

વળી, (1, 1) એ વક્ર પરનું બિંદુ છે. આથી $1 + a + b = 0$. આથી $a + b = -1$ (2)

(1) અને (2)ને ઉકેલતાં, $a = 1, b = -2$

$\therefore \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{2}$

જવાબ : (B)

(132) R ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં અંતર્ગત ત્રિકોણની બાજુનો શૂન્યેતર વૃદ્ધિદર એ તેના સામેની બાજુના ખૂણાના વૃદ્ધિદર કરતા R ગણો છે. આ ખૂણાનું માપ ...... થાય.

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : ધારો કે ત્રિકોણની બાજુ BC = a અને તેની સામેનો ખૂણો A છે.

$\therefore a = 2R \sin A$

$\frac{da}{dt}$ = 2R cos A $\frac{dA}{dt}$.   આથી R$\frac{dA}{dt}$ = 2R cos A $\frac{dA}{dt}$ $\left(\frac{da}{dt}=R\frac{dA}{dt}\right)$

∴ cosA = $\frac{1}{2}$. આથી A = $\frac{\pi}{3}$ **જવાબ :** (C)

(133) $f(x) = sin\ x + cos\ x,\ 0 \le x \le 2\pi$ એ ...... અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(A) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ (C) $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ (D) $(0, 2\pi)$

ઉકેલ : $f(x) = sin\ x + cos\ x$

$f\,'(x) = cos\ x - sin\ x$

હવે, $f\,'(x) = 0 \Rightarrow sin\ x = cos\ x$.   આથી $x = \frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{5\pi}{4}$ $(0 \le x \le 2\pi)$

અંતરાલ	$f\,'(x)$	f **વિશે નિર્ણય**
$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$	ધન	f ચુસ્ત વધતું વિધેય
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	ઋણ	f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય
$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$	ધન	f ચુસ્ત વધતું વિધેય

આમ, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$માં f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.   **જવાબ :** (B)

(134) વર્તુળ અને ચોરસની પરિમિતિનો સરવાળો અચળ છે. તેમના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય, ત્યારે ચોરસની બાજુ તથા વર્તુળની ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર ...... છે.

(A) 1 : 2   (B) 2 : 1   (C) 1 : 3   (D) 4 : 1

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળની ત્રિજ્યા r અને ચોરસની બાજુ x છે. તેમની પરિમિતિનો સરવાળો

$2\pi r + 4x = 2k$, k અચળ

તેમના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો = $\pi r^2 + x^2$

$\therefore f(r) = \pi r^2 + \frac{(k-\pi r)^2}{4}$

$f\,'(r) = 2\pi r - 2\pi\,\frac{(k-\pi r)}{4} = 0 \Rightarrow k = \pi r + 4r$

$\therefore 2\pi r + 4x = 2\pi r + 8r$ $(2k = 2\pi r + 4x)$. આથી $x = 2r$

$\therefore \frac{x}{r} = \frac{2}{1}$

વળી, $f\,''(r) = 2\pi - \frac{\pi}{2}\,(0 - \pi) = 2\pi + \frac{\pi^2}{2} > 0$

∴ ચોરસની બાજુ તથા વર્તુળની ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર 2 : 1 હોય ત્યારે ક્ષેત્રફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ છે. **જવાબ :** (B)

(135) જો વક્ર $y = x\cos x$ તથા $y = \frac{sinx}{x}$ ના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર હોય, તો x એ અનુક્રમે ...... નાં બીજ થશે.

(A) $sin\ x = x$, $tan\ x = x$ (B) $cot\ x = x$, $sec\ x = x$
(C) $cot\ x = x$, $tan\ x = x$ (D) $tan\ x = x$, $sec\ x = x$

ઉકેલ : ધારો કે $y = f(x) = x\ cos\ x$ અને $y = g(x) = \frac{sinx}{x}$

$f'(x) = -x\ sin\ x + cos\ x$ અને $g'(x) = \frac{x cos\, x - sinx}{x^2}$

હવે, જો સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર હોય, તો $f'(x) = 0$ તથા $g'(x) = 0$ થાય. ($sin\ x = 0$, $cos\ x = 0$ શક્ય નથી કેમ?)

$\therefore cot\ x = x$ અને $tan\ x = x$ થાય. **જવાબ :** (C)

(136) સમીકરણ $e^{x-8} + 2x - 17 = 0$ ને ......

(A) બે વાસ્તવિક બીજ મળે. (B) એક વાસ્તવિક બીજ મળે.
(C) આઠ વાસ્તવિક બીજ મળે. (D) અનંત ઉકેલો મળે.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે $x = 8$ એ આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ છે. ધારો કે $\alpha \neq 8$ એ આપેલ સમીકરણનો બીજો ઉકેલ છે. $\alpha > 8$, તો અંતરાલ $[8, \alpha]$ માં રોલના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, $c \in (8, \alpha)$ એવો મળે કે જેથી $f'(c) = 0$ થાય.

$\therefore e^{c-8} + 2 = 0$. આથી $e^{c-8} = -2$ જે શક્ય નથી. જો $\alpha < 8$ તો પણ આવું જ પરીણામ મળે.

$\therefore$ આપેલ સમીકરણને $x = 8$ સિવાય બીજો ઉકેલ નથી. **જવાબ :** (B)

બીજી રીત :

$f'(x) = e^{x-8} + 2 > 0, \ \forall x$

$\therefore f$ વધતું વિધેય છે.

$\therefore f$ એક-એક વિધેય છે.

$\therefore f$ ને બે શૂન્ય ન મળે.

ઉપર રીત 1માં $\alpha < 8$ લઈએ, તો પણ f વધતું વિધેય હોવાથી, f ને બે બીજ ન મળે.

(137) વક્રો $x^2y = 1$ અને $x^3 = a^5y$ પરસ્પર કાટખૂણે છેદે તો $a^6 =$ ......

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

ઉકેલ : પ્રથમ વક્રોનું છેદબિંદુ શોધીએ.

$x^2y = 1$ અને $x^3 = a^5y$

$\therefore x^2\left(\frac{x^3}{a^5}\right) = 1$. આથી $x^5 = a^5$. આથી $x = a$

$y = \frac{x^3}{a^5}$ પરથી, $y = \frac{1}{a^2}$. આથી છેદબિંદુ P ના યામ $\left(a, \frac{1}{a^2}\right)$ છે.

વક્ર $x^2y = 1$ માટે, $2xy + x^2\frac{dy}{dx} = 0$. આથી $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$ $(x \neq 0)$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = -\frac{2}{a^3} = m_1$

વક્ર $x^3 = a^5y$ માટે, $3x^2 = a^5\frac{dy}{dx}$. આથી $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{a^5}$. આથી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{3}{a^3} = m_2$

અહીં વક્રો કાટખૂણે છેદે છે.

$\therefore m_1 m_2 = -1$. આથી $\frac{-6}{a^6} = -1$. આથી $a^6 = 6$ **જવાબ :** (C)

(138) વિધેય f એ દ્વિતીય વિકલન ધરાવે છે તથા $f''(t) < 0,\ \forall t \in R$. જો $x, y \in R$ માટે, $f'(y) + x < f(y + 1)$ હોય, તો ......

(A) $f(y) = x$ (B) $f(y) > x$ (C) $f(y) < x$ (D) $f(y) = x$

ઉકેલ : અંતરાલ $[y, y + 1]$ માં વિધેય f માટે મધ્યકમાન પ્રમેયનો ઉપયોગ $f'(c) = \frac{f(y+1) - f(y)}{y+1-y}$, $c \in (y, y + 1)$

$f''(t) < 0$. $\therefore$ આથી f' એ ઘટતુ વિધેય છે.

વળી, $y < c < y + 1$

$\therefore f'(c) < f'(y)$

$\therefore f(y + 1) - f(y) < f'(y)$

$\therefore x + f'(y) < f(y + 1) < f'(y) + f(y)$

$\therefore x < f(y)$ **જવાબ :** (B)

(139) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \int_0^x \sqrt{t^3+1}\, dt}{\int_0^x t^2 cost dt} = ...$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \int_0^x \sqrt{t^3+1}\, dt}{\int_0^x t^2 cost dt}$ $\left(\frac{0}{0}\right.$ સ્વરૂપ$\left.\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sqrt{x^3+1} + 2x\int_0^x \sqrt{t^3+1}\, dt}{x^2 cosx}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3+1}}{cosx} + 2\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sqrt{t^3+1}\, dt}{xcosx}$$ $\left(\frac{0}{0}\right.$ સ્વરૂપ$\left.\right)$

$$= 1 + 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3+1}}{cosx - x\,sinx} = 1 + 2 = 3$$ **જવાબ :** (D)

(140) ધારો કે $f(x)$એ વિકલનીય વિધેય છે અને G એ $f(x)$નો આલેખ છે. જો $P(a, f(a))$ એ G પર $(0, 0)$ થી સૌથી નજીકનું બિંદુ હોય, તો $f(a) f'(a)$ =..........

(A) a (B) $-a$ (C) 1 (D) -1

ઉકેલ : અંતર વિધેય $D(x) = x^2 + (f(x))^2$ (ન્યૂનતમ/મહત્તમ માટે વર્ગમૂળ લેવાની જરૂર નથી.)

$\therefore D'(x) = 2x + 2 f(x) f'(x)$

OP એ ન્યૂનતમ હોવાથી, $D'(a) = 0$

$\therefore a + f(a) f'(a) = 0$

$\therefore f(a) f'(a) = -a$ **જવાબ :** (B)

(141) વક્ર $y^2 - x^2 = 1$ પર બિંદુ P એવું છે કે જેનો x યામ n હોય, જ્યાં $n \in N$. જો d_n એ બિંદુ Pથી રેખા $y = x$ પરનું અંતર દર્શાવે, તો $\lim\limits_{n\to\infty}(nd_n)$ = ...

(A) 1 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : વક્ર $y^2 - x^2 = 1$ પરનું બિંદુ $P(n, \sqrt{n^2+1})$ છે, જ્યાં $n \in N$

$$d_n = \left|\frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\cdot d_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(n^2+1-n^2\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

જવાબ : (C)

(બિંદુ P(n, $-\sqrt{n^2+1}$) હોય તો ?)

(142) ધારો કે $F(x) = \begin{cases} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} & , x \neq 0 \\ e^3 & , x = 0 \end{cases}$

અને $G(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ k & , x = 0 \end{cases}$

જ્યાં $f(x)$ એ વાસ્તવિક વિધેય છે. જો F(x) એ $x = 0$ આગળ સતત હોય, તો G(x) ને $x = 0$ આગળ સતત થવા માટે log$k$ ની કિંમત ...... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : F(x) એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$$\therefore \lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = e^3$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$$

$\therefore \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\left(x + \frac{f(x)}{x}\right)} = e^3$. આથી $\lim_{x\to 0} e^{1+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}} = e^3$

આથી $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$ (1)

હવે, જો G(x) એ $x = 0$ આગળ સતત હોય તો,

$$\therefore \lim_{x\to 0} G(x) = k.$$

$\therefore \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = k.$ આથી $e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{f(x)}{x}\right)} = k$

$\therefore e^{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}} = k.$ આથી $e^2 = k$ આથી log$k = 2$ **જવાબ :** (C)

(143) ધારો કે, $f(x) = x^2 - bx + c$, જ્યાં b, c એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા તથા $f(x) = 0$ નાં બંને બીજ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. જો $b + c = 35$ હોય, તો $f(x)$નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે.

(A) $-\frac{183}{4}$ (B) $\frac{173}{16}$ (C) $-\frac{81}{4}$ (D) $\frac{81}{4}$

ઉકેલ : ધારો કે, α , β એ $f(x) = 0$ નાં બીજ છે.

$\therefore \alpha + \beta = b$

α , β અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે તથા b એ અયુગ્મ ધન સંખ્યા હોવાથી $\alpha = 2$ લો. $f(2) = 0$.

$\therefore 2b - c = 4$ (1)

$\therefore b + c = 35$ (2) (આપેલ છે.)

$\therefore b = 13, \ c = 22$

$f'(x) = 2x - b$, આથી $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{2} = \frac{13}{2}$

$\therefore f''(x) = 2 > 0$

$\therefore$ f નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f\left(\frac{13}{2}\right) = -\frac{81}{4}$

નોંધ : ન્યૂનતમ $= \dfrac{4ac-b^2}{4a} = \dfrac{88-169}{4} = -\dfrac{81}{4}$ **જવાબ :** (C)

(144) વિધેય $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & , \ -2 < x \le -1 \\ x^{\frac{2}{3}} - 1 & , \ -1 < x \le 1 \\ -(x-1)^2 & , \ 1 < x < 2 \end{cases}$

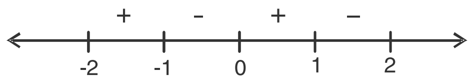
ને કેટલાં બિંદુઓએ સ્થાનીય મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યોનું અસ્તિત્વ હોય ?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

ઉકેલ : $f'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2, -2 < x < -1 \\ \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \ , \ (-1 < x < 1) - \{0\} \\ -2(x-1), \ 1 < x < 2 \end{cases}$

f' એ -2 થી -1 માં ધન છે.
f' એ -1 થી 0 માં ઋણ છે.
f' એ 0 થી 1 માં ધન છે.
f' એ 1 થી 2 માં ઋણ છે.

$x = -1, 0, 1$ બિંદુએ $f'(x)$નું અસ્તિત્વ નથી.



$\therefore$ f ને કુલ ત્રણ બિંદુએ સ્થાનીય મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે. **જવાબ :** (B)

(145) વક્ર $y = [\,|\,sinx\,| + |\,cosx\,|\,]$ અને $x^2 + y^2 = 5$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... છે. જ્યાં [.] એ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય છે.

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $tan^{-1} 3$ (D) $cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

ઉકેલ : $y = [\,|\,sinx\,| + |\,cosx\,|\,] = 1. \ \forall x \in R$ $(1 \le sinx + cosx \le \sqrt{2})$

$\therefore$ આપેલ વક્રો એકબીજાને બિંદુ P(2, 1) તથા Q(–2, 1) આગળ છેદશે. પ્રથમ વક્ર $y = 1$ માટે $\frac{dy}{dx} = 0 = m_1$

$x^2 + y^2 = 5$ આથી $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

બિંદુ P(2, 1) માટે $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\,1)} = -2 = m_2$

ધારો કે θ એ બે વક્રો વચ્ચેના P આગળના ખૂણાનું માપ છે.

$\therefore\ tan\theta = \left|\dfrac{0 + 2}{1 + 0}\right|$

$\therefore\ \theta = tan^{-1} 2 = cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

બિંદુ Q આગળ પણ $\theta = cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ થશે. **જવાબ :** (D)

(146) જો $a, b > 0$ તો $y = \dfrac{b^2}{a-x} + \dfrac{a^2}{x}$, $0 < x < a$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... થાય.

(A) $\dfrac{a+b}{a}$ (B) $\dfrac{ab}{a+b}$ (C) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ (D) $\dfrac{(a+b)^2}{a}$

ઉકેલ : $y = \dfrac{b^2}{a-x} + \dfrac{a^2}{x}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-b^2}{(a-x)^2}(-1) - \dfrac{a^2}{x^2}$

$\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow bx = \pm a(x - a) = \pm(ax - a^2)$

$\therefore\ x = \dfrac{a^2}{a \pm b}$

$0 < x < a$ હોવાથી, $x = \dfrac{a^2}{a + b}$ અને $a - x = \dfrac{ab}{a+b}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2a^2}{x^3} + \dfrac{2b^2}{(a - x)^3}$. આથી $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{a^2}{a+b}} > 0$

$\therefore\ x = \dfrac{a^2}{a + b}$ આગળ y નું મૂલ્ય ન્યૂનતમ થાય.

y નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= \dfrac{b^2(a+b)}{ab} + \dfrac{a^2(a+b)}{a^2} = (a+b)\left[\dfrac{b}{a}+1\right] = \dfrac{(a+b)^2}{a}$ **જવાબ :** (D)

(147) જો α, β અને γ એ સમીકરણ $x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$ નાં બીજ હોય, તો $[\alpha] + [\beta] + [\gamma] = ...$

(A) 2 (B) –3 (C) 4 (D) 5

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 1$

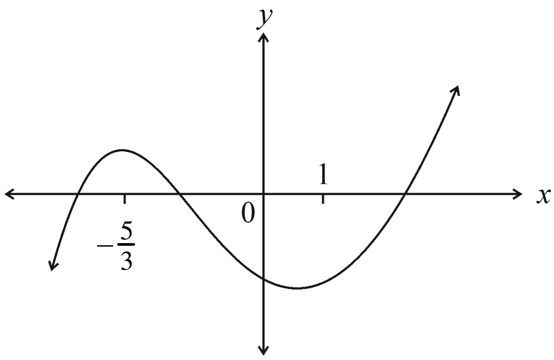
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (x - 1)(3x + 5)$

જો $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$ તો $f'(x) > 0$

અને જો $x \in \left(-\frac{5}{3}, 1\right)$, તો $f'(x) < 0$

$\therefore f$ એ $(-\infty, -\frac{5}{3})$ માં વધતું વિધેય છે, $(-\frac{5}{3}, 1)$ માં ઘટતું તથા $(1, \infty)$ માં વધતું વિધેય છે.

વળી, $f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{128}{27}$, $f(1) = -4$ અને $f(0) = -1$ કાચો આલેખ નીચે મુજબ થશે.



આકૃતિ 15.5

$f(0) = -1 < 0$. $f(1) = -4 < 0$, $f(2) = 1 > 0$

$\therefore$ એક બીજ (1, 2)માં આવેલ છે. આથી $[\alpha] = 1$

$f(-1) = 4 > 0$

$\therefore$ એક બીજ (–1, 0)માં આવેલ છે. આથી $[\beta] = -1$

$f(-2) = 5 > 0$

$f(-3) = -4 < 0$

$\therefore$ એક બીજ (–3, –2)માં આવેલ છે. આથી $[\gamma] = -3$

$\therefore$ $[\alpha] + [\beta] + [\gamma] = -3$ **જવાબ :** (B)

(148) વક્ર $x = a\sqrt{cos2\theta}\ cos\theta$, $y = a\sqrt{cos2\theta}\ sin\theta$ નો $\theta = \frac{\pi}{6}$ આગળનો સ્પર્શક ......

(A) X - અક્ષને સમાંતર છે. (B) Y - અક્ષને સમાંતર છે.

(C) રેખા $y = x$ ને સમાંતર છે. (D) રેખા $x + y = 1$ ને સમાંતર છે.

ઉકેલ : $\frac{dx}{d\theta} = -a\sqrt{cos2\theta}\,sin\theta + \left(\frac{-a\,cos\theta\ sin2\theta}{\sqrt{cos2\theta}}\right)$

$$= -a\frac{(cos2\theta\ sin\theta + cos\theta\ sin2\theta)}{\sqrt{cos2\theta}} = \frac{-asin3\theta}{\sqrt{cos2\theta}}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\sqrt{cos2\theta}\,cos\theta\left(\frac{-a\,sin\theta\ sin2\theta}{\sqrt{cos2\theta}}\right) = \frac{a\,cos3\theta}{\sqrt{cos2\theta}}$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -cot3\theta$ આથી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 0$

સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર છે અથવા, X-અક્ષ છે. **જવાબ :** (A)

(149) જો $f(x) = \frac{x}{sinx}$ અને $g(x) = \frac{x}{tanx}$, $0 < x < 1$, તો આ અંતરાલમાં

(A) $f(x)$ અને $g(x)$ બંને વધતાં વિધેય છે. (B) $f(x)$ અને $g(x)$ બંને ઘટતાં વિધેય છે.

(C) $f(x)$ વધતું વિધેય છે અને $g(x)$ ઘટતું વિધેય છે. (D) $g(x)$ વધતું વિધેય છે અને $f(x)$ ઘટતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f'(x) = \frac{sinx - xcosx}{sin^2x}$, $g'(x) = \frac{tanx - xsec^2x}{tan^2x}$

ધારો કે $u(x) = sinx - xcosx$

$\therefore u'(x) = xsinx > 0$ $(0 < x < 1)$

$\therefore$ u એ (0, 1) પર વધતું વિધેય છે. વળી, $u(0) = 0$

$\therefore$ $u(x) > u(0)$. આથી $u(x) > 0$. આથી $\sin x > x \cos x$

$\therefore$ $f'(x) > 0$ $\quad (0 < x < 1)$

$\therefore$ f એ (0, 1) પર વધતું વિધેય છે.

ધારોકે, $v(x) = \tan x - x\sec^2 x$

$\therefore$ $v'(x) = -2x \sec^2 x \tan x < 0$

$\therefore$ $v(x) < v(0) = 0$

$\therefore$ $g'(x) < 0$ $\quad (0 < x < 1)$

$\therefore$ g એ (0, 1) પર ઘટતું વિધેય છે. **જવાબ :** (C)

(150) વિધેય $g(x) = \tan x \cdot e^x e^{x^2} \dfrac{\log(\pi + x)}{\log(e + x)}$ $(x \geq 0)$ એ, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$

(A) $[0, \infty)$ પર વધતું વિધેય છે.

(B) $[0, \infty)$ પર ઘટતું વિધેય છે.

(C) $\left[0, \frac{\pi}{e}\right]$ પર વધતું તથા $\left[\frac{\pi}{e}, \infty\right)$ પર ઘટતું વિધેય છે.

(D) $\left[0, \frac{\pi}{e}\right]$ પર ઘટતું તથા $\left[\frac{\pi}{e}, \infty\right)$ પર વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $\tan x$, e^x, e^{x^2} એ $[0, \infty)$ પર વધતાં વિધેય છે. (વિધેય tan તેના પ્રદેશમાં)

ધારો કે $f(x) = \dfrac{\log(\pi + x)}{\log(e + x)}$

$$f'(x) = \frac{\log(e + x)(e + x) - (\pi + x)\log(\pi + x)}{(\pi + x)(e + x)\left(\log(e + x)\right)^2}$$

log વિધેય એ વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ $e < \pi \Rightarrow \log(e + x) < \log(\pi + x)$

$\therefore$ $(e + x)\log(e + x) < (e + x)\log(\pi + x) < (\pi + x)\log(\pi + x)$, $\forall x \geq 0$

$\therefore$ $f'(x) < 0$, $\forall x \geq 0$

$\therefore$ f એ $[0, \infty)$ પર ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore$ g એ $[0, \infty)$ પર ઘટતું વિધેય છે. **જવાબ :** (B)

(151) નીચેનામાંથી કયા અંતરાલમાં a ની કિંમત આવે તો

$f(x) = \sin x - a\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2ax$ એ R પર વધતું વિધેય થાય?

(A) $[0, \infty)$ (B) $(0, \infty)$ (C) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ (D) $[1, \infty)$

ઉકેલ : $f'(x) = \cos x - 2a\cos 2x - \cos 3x + 2a$

$= \cos x - 2a(2\cos^2 x - 1) - (4\cos^3 x - 3\cos x) + 2a$

$= 4a + 4\cos x - 4a\cos^2 x - 4\cos^3 x$

$= 4a\sin^2 x + 4\cos x\sin^2 x$

$= 4\sin^2 x\,(a + \cos x)$

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq a + \cos x \leq a + 1$. જો $a \geq 1$ હોય તો, $f'(x) \geq 0$ થાય.

$\therefore$ જો f એ R પર વધતું વિધેય હોય, તે માટે $a \in [1, \infty)$ પર્યાપ્ત છે. **જવાબ :** (D)

(152) વક્ર $4x^2 + a^2y^2 = 4a^2$, $4 < a^2 < 8$ પરનું ...... બિંદુ એ $(0, -2)$થી સૌથી દૂરનું બિંદુ છે.

(A) (0, 1) (B) (0, –1) (C) (0, 2) (D) (0, –2)

ઉકેલ : આપેલ વક્ર $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ પરના બિંદુનું પ્રચલ સ્વરૂપ $P(a\cos\theta, 2\sin\theta)$ છે. બિંદુ $(0, -2)$થી Pના અંતરનો વર્ગ

$$r^2 = (a\cos\theta - 0)^2 + (2\sin\theta + 2)^2 = a^2\cos^2\theta + 4(1 + \sin\theta)^2$$

$$\frac{d(r)^2}{d\theta} = -2a^2\sin\theta\cos\theta + 8(1 + \sin\theta)\cos\theta$$

$$= \cos\theta\{(8 - 2a^2)\sin\theta + 8\}$$

$\frac{d(r)^2}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$ અથવા $\sin\theta = \frac{4}{a^2-4}$

$4 < a^2 < 8$ હોવાથી, $\frac{4}{a^2-4} > 1$. આથી $\sin\theta > 1$ જે શક્ય નથી.

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

વળી, $\left[\frac{d}{d\theta^2}r^2\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = (4 - a^2)2\cos2\theta - 8\sin\theta = 2a^2 - 8 - 8 < 0$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$ માટે r^2 નું મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ (0, 2) છે. **જવાબ :** (C)

(153) O કેન્દ્રવાળો ઉપવલય છે. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ પર P કોઈ એક બિંદુ છે. કેન્દ્ર O માંથી દોરેલ P પરના સ્પર્શક પર દોરેલ લંબનો લંબપાદ N છે. ધારો કે A_{max} એ ΔOPN નું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ છે. $\frac{a^2-b^2}{A_{max}}$ ની કિંમત ......

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

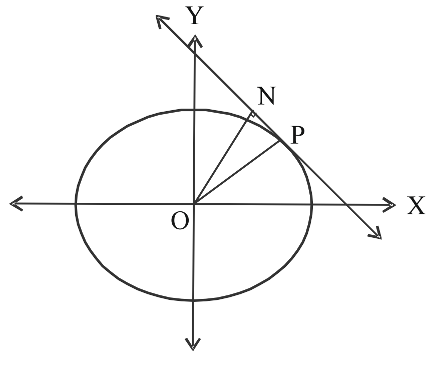
ઉકેલ : બિંદુ P ના યામ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ લો.

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_P = \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta} = \frac{-b}{a}\cot\theta$$

P બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$bx\cos\theta + ay\sin\theta = ab$

$$ON = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$$



આકૃતિ 15.6

કાટકોણ ΔONPમાં

$PN^2 = OP^2 - ON^2$

$$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{a^4\sin^2\theta\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta\cos^2\theta + a^2b^2\left(\sin^4\theta + \cos^4\theta\right) - a^2b^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2 sin^2\theta cos^2\theta}{a^2 sin^2\theta + b^2 cos^2\theta}$$

$$\therefore \text{PN} = \frac{\left(a^2 - b^2\right) sin\theta cos\theta}{\sqrt{a^2 sin^2\theta + b^2 cos^2\theta}}$$

$$\text{A} = \frac{1}{2} \text{PN} \times \text{ON} = \frac{ab\left(a^2 - b^2\right) sin\theta cos\theta}{2\left(a^2 sin^2\theta + b^2 cos^2\theta\right)}$$

$$= \frac{ab\left(a^2 - b^2\right)}{2\left(a^2 tan\theta + b^2 cot\theta\right)} \qquad (1)$$

A ને મહત્તમ થવા માટે, $f(\theta) = a^2 \, tan\theta + b^2 cot\theta$ ન્યૂનતમ થાય.

$$\frac{d(f(\theta))}{d\theta} = a^2 sec^2\theta - b^2 cosec^2\theta, \; f''(\theta) = 2a^2 sec^2 a \, tan\theta + 2b^2 cosec^2 a \, cot\theta$$

$$\frac{d(f(\theta))}{d\theta} = 0 \Rightarrow tan\theta = \pm \frac{b}{a}$$

$$\left.\frac{d^2(f(\theta))}{d\theta^2}\right|_{tan\theta = \frac{b}{a}} > 0$$

$\therefore f(\theta)$ એ $tan\theta = \frac{b}{a}$ હોય ત્યારે ન્યૂનતમ થાય. આથી ન્યૂનતમ $f(\theta) = a^2 \frac{b}{a} + b^2 \frac{a}{b} = 2ab$

$$\therefore \text{A}_{max} = \frac{ab\left(a^2 - b^2\right)}{2.\, 2ab} = \frac{a^2 - b^2}{4}$$

$$\therefore \frac{a^2 - b^2}{\text{A}_{max}} = 4$$

જવાબ : (C)

(154) $f'(x) = \begin{cases} xe^{ax}, & x \le 0 \\ x + ax^2 - x^3, & x > 0 \end{cases}$

જ્યાં $a > 0$. જે અંતરાલમાં $f'(x)$ ચુસ્ત વધતું વિધેય હોય તેની લંબાઈ $L(a)$ છે. $\frac{1}{L'(3)}$ = ...

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

ઉકેલ : $f'(x) = \begin{cases} (1 + ax)e^{ax}, & x < 0 \\ 1 + 2ax - 3x^2, & x > 0 \end{cases}$

$$f''(x) = \begin{cases} (2 + ax)a \, e^{ax}, & x < 0 \\ 2a - 6x, & x > 0 \end{cases}$$

જો $f'(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય હોય, તો $f''(x) > 0$

$\therefore 2 + ax > 0 \; (x < 0)$ અને $2a - 6x > 0 \; (x > 0)$

$\therefore\ x > \frac{-2}{a}$ $(x < 0)$ અને $x < \frac{a}{3}$ $(x > 0)$

$\therefore\ \frac{-2}{a} < x < \frac{a}{3}$

$\therefore\ L(a) = \frac{a}{3} + \frac{2}{a}$. આથી $L'(a) = \frac{1}{3} - \frac{2}{a^2}$

$\therefore\ L'(3) = \frac{1}{9}$. આથી $\frac{1}{L'(3)} = 9$ **જવાબ :** (C)

(155) વિધેય $2tan^3x - 3tan^2x + 12tanx + 3$ એ ....

(A) વધતું વિધેય છે. (B) ઘટતું વિધેય છે.

(C) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$માં વધતું તથા $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$માં ઘટતું વિધેય છે. (D) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$માં ઘટતું તથા $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$માં વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : ધારોકે $f(x) = 2tan^3x - 3tan^2x + 12tanx + 3$

$f'(x) = (6tan^2x - 6tanx + 12)\ sec^2x$

$= 6sec^2x\ (tan^2x - tanx + 2) = 6sec^2x \left[\left(\tan x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right] > 0$

$\therefore\ f(x)$ એ વધતું વિધેય છે. **જવાબ :** (A)

(156) વિધેય $f(x) = \sum_{k=1}^{2015}(x-k)^2$ ને x ની કઈ કિંમત માટે ન્યૂનતમ મળે?

(A) 0 (B) 1008 (C) 1000 (D) 2015

ઉકેલ : $f'(x) = \sum_{k=1}^{2015} 2(x-k) = 2[(x-1) + (x-2) + ... + (x-2015)]$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2015x - \frac{(2015)(2016)}{2} = 0$

$x = 1008$. વળી $f''(x) = 4030 > 0$

$\therefore\ x = 1008$ માટે f ને ન્યૂનતમ કિંમત મળે. **જવાબ :** (B)

(157) a કયા ગણનો સભ્ય હોય તો વિધેય

$f(x) = \left(\frac{\sqrt{a+4}}{1-a} - 1\right) x^5 - 3x + \log 5$ એ R પર ઘટતું વિધેય થશે?

(A) $\left(-3, \frac{5-\sqrt{27}}{2}\right) \cup (2, \infty)$ (B) $\left[-4, \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right] \cup (1, \infty)$ (C) $(-\infty, \infty)$ (D) $(1, \infty)$

ઉકેલ : $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{a+4}}{1-a} - 1\right) 5x^4 - 3$

$f(x)$ એ R પર ઘટતું થવા માટે, તો $f'(x) < 0,\ \forall\ x$

$\therefore\ \left(\frac{\sqrt{a+4}}{1-a} - 1\right) x^4 < \frac{3}{5},\ \forall\ x$ (1)

જો $\frac{\sqrt{a+4}}{1-a} - 1 \le 0$ હોય, તો જ અસમતા (1) શક્ય બને.

$\therefore\ a > 1$ માટે તો આ અસમતા સત્ય છે જ.

$\therefore\ a \in (1, \infty)$

વળી, $\sqrt{a+4}$ વાસ્તવિક સંખ્યા થવા માટે $a \geq -4$ (આપણે ફક્ત $a < 1$ વિશે વિચાર કરીશું.)

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{a+4}}{1-a} \leq 1.$ આથી $\sqrt{a+4} \leq 1 - a$

$\therefore\ a + 4 \leq 1 + a^2 - 2a$

$\therefore\ 0 \leq a^2 - 3a - 3.$ આથી $a \leq \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$

$\therefore\ a \in \left[-4, \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right] \cup (1, \infty)$ **જવાબ :** (B)

(158) વક્ર $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4,\ 0 \leq x \leq 5$ ના સ્પર્શકના મહત્તમ ઢાળનું મૂલ્ય ...... છે.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 24

ઉકેલ : $m = \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$

m ના આત્યંતિક મૂલ્ય માટે $\dfrac{dm}{dx} = 0$

$\therefore\ 6x - 12 = 0$ આથી $x = 2.$ $\left[\dfrac{d^2m}{dx^2}\right]_{x=2} = 6$ આથી $x = 2$ માટે ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે.

હવે, $m(0) = 9,\ m(2) = -3$ અને $m(5) = 24$

$\therefore\ m$ નું વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય 24 છે. **જવાબ :** (D)

(159) ધારો કે f એ R પર વિકલનીય વિધેય છે અને $h(x) = f(x) - (f(x))^2 + (f(x))^3,\ x \in R$ તો,

(A) જો f ઘટતું વિધેય હોય, તો h વધતું વિધેય છે.

(B) જો f વધતું વિધેય હોય, તો h ઘટતું વિધેય છે.

(C) જો f વધતું કે ઘટતું વિધેય હોય, તો અનુક્રમે h પણ વધતું કે ઘટતું વિધેય થાય.

(D) h વિશે કંઈ કહી શકાય નહિ.

ઉકેલ :
$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - 2f(x)f'(x) + 3(f(x))^2 f'(x) \\ &= f'(x)\,[1 - 2f(x) + 3(f(x))^2] \\ &= 3f'(x)\left[\left(f(x) - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right] \end{aligned}$$

જો $f'(x) \geq 0$ હોય તો $h'(x) \geq 0$ થાય તથા જો $f'(x) \leq 0$ હોય તો $h'(x) \leq 0$ થાય.

$\therefore$ જો f વધતું વિધેય હોય તો h વધતું વિધેય થશે તથા જો f ઘટતું વિધેય હોય તો h ઘટતું વિધેય થશે.

જવાબ : (C)

(160) જો વક્ર $2y^3 = ax^2 + x^3$ નો બિંદુ (a, a) આગળનો સ્પર્શક અક્ષો પર α તથા β અંતઃખંડો કાપતા હોય તથા જો $\alpha^2 + \beta^2 = 61$ હોય તો $|a| =$ ......

(A) 16 (B) 28 (C) 30 (D) 31

ઉકેલ : સ્પર્શકનો ઢાળ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2ax + 3x^2}{6y^2}.$ આથી $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(a,a)} = \dfrac{5}{6}$

$\therefore\ (a, a)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y - a = \frac{5}{6}(x - a).$

$\therefore 6y - 6a = 5x - 5a.$ આથી $5x - 6y = -a$

X - અંતઃખંડ $\alpha = -\frac{a}{5}$, Y - અંતઃખંડ $\beta = \frac{a}{6}$

$\alpha^2 + \beta^2 = 61.$ આથી $\frac{a^2}{25} + \frac{a^2}{36} = 61$

$\therefore a^2 = 25 \times 36.$ આથી $a = \pm 30.$ આથી $|a| = 30$ **જવાબ :** (C)

(161) વિધેય $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\cos 3x$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો વચ્ચેનો તફાવત ...... છે.

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{8}{7}$ (D) $\frac{9}{4}$

ઉકેલ : આપેલ વિધેય $f(x)$નું મુખ્ય આવર્તમાન 2π હોવાથી આપણે માંગેલ તફાવત $[0, 2\pi]$ માં શોધીશું.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(\sin x + \sin 2x - \sin 3x) \\ &= -\sin x + \sin 3x - \sin 2x \\ &= -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2} \\ &= 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{5x}{2} - \frac{\cos x}{2}\right) \\ &= -4\sin x \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} \end{aligned}$$

$\therefore x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi$ અને 2π એ વિવેચક બિંદુ છે.

વળી, $f(0) = \frac{7}{6}, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-13}{12}, f(\pi) = \frac{-1}{6}, f(2\pi) = \frac{7}{6}, f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-7}{\sqrt{2}}.$

$\therefore$ માંગેલ તફાવત $= \frac{7}{6} - \left(\frac{-13}{12}\right) = \frac{9}{4}$ **જવાબ :** (D)

(162) $g(x) = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}, x > 0$ તો,

(A) $1 < g(x) < 2$ (B) $-1 < g(x) < 0$ (C) $0 < g(x) < 1$ (D) $-\infty < g(x) < 0$

ઉકેલ : $x > 0$ માટે $f(x) = \log(1 + x)$ લો.

$[0, x]$ અંતરાલ પર મધ્યકમાન પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, $c \in (0, x)$ એવો મળે કે જેથી

$$\frac{\log(1+x) - \log(1+0)}{x-0} = f'(c) = \frac{1}{1+c}$$

$$\therefore \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c} < 1$$

$\log(1 + x) < x.$ આથી $\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} > 0.$ આથી $g(x) > 0$

વળી, $c \in (0, x).$ આથી $c < x$

$\therefore \frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+x}.$ આથી $\frac{\log(1+x)}{x} > \frac{1}{1+x}$

$\therefore \log(1+x) > \frac{x}{1+x}$

$\therefore \frac{1}{\log(1+x)} < \frac{1+x}{x}$.   આથી $g(x) < 1$ **જવાબ :** (C)

(163) વક્ર $y^2 = x(2-x)^2$ ના બિંદુ (1, 1) આગળનો સ્પર્શક જો વક્રને ફરીથી બિંદુ P માં મળે તો P એ ......

(A) (4, 4)   (B) (–1, 2)   (C) $\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{8}\right)$ (D) (–1, –1)

ઉકેલ : $y^2 = x(2-x)^2$

$\therefore 2y\frac{dy}{dx} = (2-x)^2 + x \cdot 2(2-x)(-1) = 3x^2 - 8x + 4$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ (1, 1) આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

આ સ્પર્શક રેખાનું આપેલ વક્ર સાથે છેદબિંદુ શોધીએ.

$\left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 = x(2-x)^2$

$\therefore x^2 - 6x + 9 = 16x + 4x^3 - 16x^2$

$\therefore 4x^3 - 17x^2 + 22x - 9 = 0$.   આથી $(x-1)(4x-9)(x-1) = 0$

$\therefore x = 1, \frac{9}{4}, 1$. આથી $x = \frac{9}{4}$ તથા $y = \frac{3}{8}$. આથી માગેલ બિંદુ $\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{8}\right)$ છે.   **જવાબ :** (C)

(164) h ઊંચાઈ તથા અર્ધશીર્ષકોણ α વાળા શંકુમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા નળાકારનું ઘનફળ ...... છે.

(A) $4\pi h^3 \tan^2 \alpha$ (B) $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \alpha$ (C) $\frac{1}{27}\pi h^3 \tan^2 \alpha$ (D) $\frac{4}{27}\pi h^2 \tan^2 \alpha$

ઉકેલ : નળાકારની ત્રિજ્યા x તથા શંકુનો અર્ધશીર્ષકોણ α હોય, તો $\tan\alpha = \frac{x}{VN}$

$\therefore VN = x \cot\alpha$

$\therefore$ નળાકારની ઊંચાઈ $MN = VM - VN = h - x\cot\alpha$

$\therefore$ નળાકારનું ઘનફળ $f(x) = \pi x^2(h - x\cot\alpha)$

$= \pi x^2 h - \pi x^3 \cot\alpha$

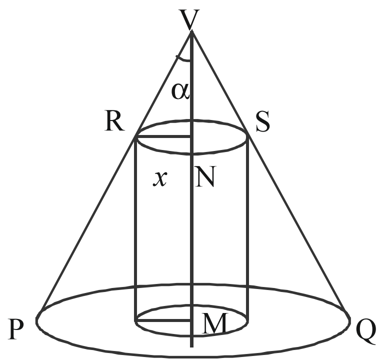
$\therefore f'(x) = 0 \Rightarrow 2\pi hx - 3\pi x^2 \cot\alpha = 0$

$\therefore x = \frac{2}{3}h\tan\alpha$

$f''(x) = 2\pi h - 6\pi x\cot\alpha$

$\therefore f''\left(\frac{2}{3}h\tan\alpha\right) = -2\pi h < 0$

$\therefore x = \frac{2}{3}h\tan\alpha$ માટે નળાકારનું ઘનફળ મહત્તમ છે.



આકૃતિ 15.7

મહત્તમ ઘનફળ $f(x) = \pi x^2 MN = \pi \frac{4}{9} h^2 \tan^2 \alpha \left(h - \frac{2}{3}h\right)$

$= \frac{4\pi}{27} h^3 \tan^2 \alpha$ **જવાબ :** (B)

(165) (1, 2) માંથી પસાર થતી કઈ રેખા પ્રથમ ચરણમાં અક્ષો સાથે ન્યૂનતમ ક્ષેત્રફળવાળો ત્રિકોણ બનાવશે ?

(A) $2x + y = 0$ (B) $2x + y = 2$ (C) $2x + y = 4$ (D) $x + 2y = 4$

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ માંગેલી રેખા છે.

$\therefore$ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $A = \frac{1}{2}ab$

રેખા (1, 2)માંથી પસાર થાય છે. આથી $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. આથી $b = \frac{2a}{a-1}$

$\therefore A = \frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2-1+1}{a-1} = a+1+\frac{1}{a-1}$

$\therefore \frac{dA}{da} = 1 - \frac{1}{(a-1)^2} = 0 \Rightarrow a = 2$ $(a \neq 0)$

$a = 0$ શક્ય નથી. આથી $a = 2$

વળી, $\frac{d^2A}{da^2} = \frac{2}{(a-1)^3}$. આથી $\left(\frac{d^2A}{da^2}\right)_{a=2} = 2 > 0$

$\therefore a = 2$ આગળ ક્ષેત્રફળ A ન્યૂનતમ છે.

હવે, $a = 2$ તો $b = \frac{2a}{a-1} = 4$. આથી માંગેલ રેખા $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ છે.

$\therefore 2x + y = 4$ **જવાબ :** (C)

નોંધ : વિકલ્પો પરથી જવાબ $2x + y = 4$ જ હોય કારણ કે (1, 2)માંથી પસાર થતી તે એક માત્ર રેખા છે.

(166) ધારો કે $P(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + ... + a_nx^{2n}$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા x માં બહુપદી છે, જ્યાં $0 < a_0 < a_1 ... < a_n$. વિધેય $P(x)$ ને

(A) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે. (B) ફક્ત એક મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

(C) ફક્ત એક ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે. (D) n મહત્તમ તથા n ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે.

ઉકેલ : $p'(x) = 2a_1x + 4a_2x^3 + ... + 2na_nx^{2n-1}$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટેની આવશ્યક શરત અનુસાર $P'(x) = 0$

$\therefore 2x(a_1 + 2a_2x^2 + ... + na_nx^{2n-2}) = 0$

$\therefore x = 0$ $(a_i > 0)$

વળી, $P''(x) = 2a_1 + 12a_2x^2 + ... + 2n(2n-1)a_nx^{2n-2}$

$\therefore P''(0) = 2a_1 > 0$

$\therefore P(x)$ ને $x = 0$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે.

નોંધ : બધા જ વર્ગ ધન હોવાથી સ્પષ્ટ છે કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય a_0 છે. **જવાબ :** (C)

(167) વિધેય $f(x) = |3 - x| + |2 + x| + |5 - x|$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે.

(A) 0 (B) 7 (C) 8 (D) 10

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} 6-3x, & x<-2 \\ 10-x, & -2\le x<3 \\ x+4, & 3\le x<5 \\ 3x-6, & x\ge 5 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} -3, & x<-2 \\ -1, & -2<x<3 \\ 1, & 3<x<5 \\ 3, & x>5 \end{cases}$

$\therefore$ f એ $(-\infty, 3)$માં ઘટતું વિધેય છે જ્યારે $(3, \infty)$માં વધતું વિધેય છે. આથી $x = 3$ આગળ વિધેય f નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(3) = 7$ છે.

જવાબ : (B)

(168) જો $y(x) = cos\ (3\ cos^{-1}x)$, $x \in [-1, 1], x \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ તો $\frac{1}{y(x)} \left\{(x^2-1)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + x\frac{dy(x)}{dx}\right\}$ = ...

(A) 1 (B) 2 (C) 8 (D) 9

ઉકેલ : $y = cos\ (3\ cos^{-1}x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3\,sin(3cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \sqrt{1-x^2}\ \frac{dy}{dx} = 3\ sin\ (3\ cos^{-1}x)$

$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\ \frac{dy}{dx} + \sqrt{1-x^2}\ \frac{d^2y}{dx^2} = 3\ cos\ (3\ cos^{-1}x) \left(\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$\therefore -x\ \frac{dy}{dx} + (1-x^2)\ \frac{d^2y}{dx^2} = -9y$

$\therefore \frac{1}{y}\left[(x^2-1)\ \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\right] = 9$

જવાબ : (D)

એક કરતાં વધુ સાચા વિકલ્પવાળા પ્રશ્નો

(169) $f(x)$ એ ત્રણ ઘાતવાળું બહુપદી વિધેય છે, જ્યાં $f(0) + 2 = 0$ અને $f'''(0) = 6$. જો $f(x) = 0$ નાં ત્રણેય બીજ ધન પૂર્ણાંક હોય, તો

(A) $f'(1) = 0$ (B) $2f'(0) + f''(0) = 0$ (C) $2f'(0) + f''(0) = 2$ (D) $f'(2) = 0$

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ કારણ કે $f'''(0) = 6,\ f(0) = -2$

ધારો કે $\alpha, \beta, \gamma \in$ N એ $f(x) = 0$ નાં બીજ છે. આથી $\alpha\beta\gamma = -\frac{-2}{1} = 2$

$\therefore$ α, β, γ માંથી ગમે તે બેની કિંમત 1 હશે, જ્યારે ત્રીજાની કિંમત 2 હશે. ધારો કે $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 2$,

$a = -(\alpha + \beta + \gamma) = -4 = \frac{f''(0)}{2}$. આથી $f''(0) = -8$

$b = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 5 = f'(0)$. આથી $f'(0) = 5$

$\therefore f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$\therefore 2f'(0) + f''(0) = 2$

વળી, 1 એ $f(x) = 0$ નાં બે બીજ હોવાથી, $f'(1) = 0$ **જવાબ :** (A), (C)

(170) જો $f'(sin\ x) < 0$ અને $f''(sin\ x) > 0$. $\forall x \in R$, તો $g(x) = f(sin\ x) + f(cos\ x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ એ

(A) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માં ઘટતું વિધેય છે.

(B) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય છે.

(C) વિધેય g ને $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મળે.

(D) વિધેય g ને $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મળે.

ઉકેલ : $g'(x) = f'(sin\ x)\ cos\ x - f'(cos\ x)\ sin\ x$

$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow f'(sin\ x)\ cos\ x = f'(cos\ x)\ sin\ x$

$\Rightarrow f'(sin\ x)\ cos\ x = f'\left(sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\therefore x = \frac{\pi}{2} - x \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$

હવે, $g''(x) = f''(sin\ x)\ cos^2 x + f''(\cos x)\ sin^2 x - \{f'(sin\ x)\ sin\ x + f'(cos\ x)\ cos\ x\}$ (1)

આપેલ છે કે $f'(sin\ x) < 0, \ \forall x \in R$

$\therefore f'(cos\ x) < 0$

(1) પરથી, $g''(x) > 0, \quad \forall x \in R$

$\therefore$ વિધેય g ને $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મળે.

$\therefore g$ એ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ અંતરાલમાં ઘટતું વિધેય છે તથા $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય છે. **જવાબ :** (A), (B), (C)

(171) a ની કઈ કિંમત માટે $f(x) = x^3 + 3(a-7)x^2 + 3(a^2-9)x - 1$ નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધન સંખ્યા માટે મળે ?

(A) $a < -3$ (B) $-1 < a < 1$ (C) $3 < a < 4$ (D) $5 < a < 6$

ઉકેલ : $f'(x) = 3x^2 + 6(a-7)x + 3(a^2-9)$

$f(x)$ જે બિંદુએ મહત્તમ હોય, ત્યાં $f'(x) = 0$.

$\therefore 3x^2 + 6(a-7)x + 3(a^2-9) = 0$

$\therefore x^2 + 2(a-7)x + (a^2-9) = 0$

$\therefore x = -(a-7) \pm \sqrt{58-14a}$ (1)

x ની કિંમત વાસ્તવિક છે. આથી $58 - 14a > 0$

આથી $a < \frac{29}{7}$ (2)

વળી, $f''(x) = 6x + 6(a-7) = 6(x + a - 7)$

જો $x_1 = -(a-7) + \sqrt{58-14a}$ હોય, તો $f''(x) = 6\sqrt{58-14a} > 0$

જો $x_2 = -(a-7) - \sqrt{58-14a}$ હોય, તો $f''(x) = -6\sqrt{58-14a} < 0$

$\therefore x_2 = -(a-7) - \sqrt{58-14a}$ આગળ f ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળશે.

આ ધન સંખ્યા હોય, તો $-(a-7) - \sqrt{58-14a} > 0$

$\therefore 7 - a > \sqrt{58-14a}$ આથી $a^2 - 9 > 0$

$\therefore a < -3$ અથવા $a > 3$ (3)

(2) અને (3) પરથી, $a < -3$ અથવા $3 < a < \frac{29}{7}$ **જવાબ :** (A), (C)

(172) $\lim_{n\to\infty} \frac{-3n+(-1)^n}{4n-(-1)^n} = ...$

(A) $\frac{-3}{4}$ (B) જો n અયુગ્મ સંખ્યા હોય તો $\frac{-3}{4}$

(C) જો n યુગ્મ સંખ્યા હોય તો $\frac{-3}{4}$ (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી

ઉકેલ : જો $n \in N$ તો

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3n+(-1)^n}{4n-(-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3\pm\frac{1}{n}}{4\pm\frac{1}{n}} = \frac{-3}{4}$$ **જવાબ :** (A), (B), (C)

(173) જો $f(x) = \begin{cases} 3x^2+12x-1, & -1 \le x < 2 \\ 37-x, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$ તો

(A) f એ $(-1, 2)$માં વધતું વિધેય છે. (B) f એ $[-1, 3]$ પર સતત વિધેય છે.

(C) $f'(2)$નું અસ્તિત્વ નથી (D) f ને $x = 2$ આગળ મહત્તમ કિંમત મળે.

ઉકેલ : f એ બહુપદી વિધેય છે. $\lim_{x\to2-} f(x) = \lim_{x\to2+} f(x) = f(2) = 35$

$\therefore f$ એ $[-1, 3]$ થી સતત વિધેય છે.

$$f'(x) = \begin{cases} 6x+12, & -1 < x < 2 \\ -1, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

$f'(2-) = 24$, $f'(2+) = -1$. આથી $f'(2)$નું અસ્તિત્વ નથી.

$f'(x) = 6x + 12 = 6(x+2) > 0$ $(-1 < x < 2)$

$\therefore f$ એ $(-1, 2)$ માં વધતું વિધેય છે.

વળી, f એ $(2, 3)$ માં ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore f$ ને $x = 2$ આગળ મહત્તમ કિંમત મળે. **જવાબ :** (A), (B), (C), (D)

(174) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\cos \pi x - x^{2n} \sin(x-1)}{1+x^{2n+1}-x^{2n}} \right\}$

(A) f એ $x = 1$ આગળ સતત છે. (B) $\lim_{x\to1} f(x) = 1$

(C) $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

(D) $f(x) = \begin{cases} cos\pi x & 0 < x < 1 \\ -1, & x = 1 \\ \dfrac{sin(x-1)}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$

ઉકેલ : $0 < x < 1$ માટે,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{cos\,\pi x - x^{2n}\, sin\,(x-1)}{1 + x^{2n+1} - x^{2n}} \right\} = cos\pi x \qquad (\lim_{n \to \infty} x^n = 0)$$

$x = 1$ માટે, $f(x) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \dfrac{cos\,\pi - sin(1-1)}{1 + 1 - 1} \right\} = cos\pi = -1$

$x > 1$ માટે, $f(x) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \dfrac{cos\,\pi x - x^{2n}\, sin\,(x-1)}{1 + x^{2n+1} - x^{2n}} \right\}$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{\dfrac{cos\,\pi x}{x^{2n+1}} - \dfrac{1}{x} sin\,(x-1)}{\dfrac{1}{x^{2n+1}} + 1 - \dfrac{1}{x}} \right\} = \frac{sin\,(x-1)}{(1-x)}$$

$$f(x) = \begin{cases} cos\pi x & 0 < x < 1 \\ -1, & x = 1 \\ \dfrac{sin(x-1)}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$$

હવે, $\lim_{x \to 1-} cos\,\pi x = -1$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \dfrac{sin\,(x-1)}{(x-1)} = -1$

અને $f(1) = -1$. આથી $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore f$ એ $x = 1$ આગળ સતત છે. **જવાબ :** (A), (C), (D)

(175) જો $f : R \to R$ એ એવું બહુપદી વિધેય હોય, જ્યાં $f(2x) = f'(x)\, f''(x)$ તો ...... (ઘાત $n > 2$)

(A) $f(3) = 12$

(B) f એક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

(C) $f(x) = x$ ને ત્રણ ભિન્ન વાસ્તવિક ઉકેલ મળે.

(D) f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

ઉકેલ : ધારો કે, $f(x)$ એ n ઘાતવાળું બહુપદી વિધેય છે. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + 1$

$\therefore f'$ એ $n - 1$ અને f'' એ $n - 2$ ઘાતવાળું બહુપદી વિધેય થશે.

$f(2x) = f'(x)\, f''(x)$ હોવાથી, $n = n - 1 + n - 2$. આથી $n = 3$

$\therefore f$ એ ત્રિઘાત બહુપદી વિધેય થશે.

ધારો કે $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(2x) = f'(x)\, f''(x)$ પરથી, $8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)\,(6ax + 2b)$

$\therefore 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = 18a^2x^3 + 18\,abx^2 + (4b^2 + 6ac)x + 2bc$

$\therefore 8a = 18a^2,\quad 4b = 18\,ab,\; 2c = 4b^2 + 6ac,\; d = 2bc$

$\therefore a = \frac{4}{9}, b = 0, c = 0, d = 0$

$\therefore f(x) = \frac{4}{9}x^3$

$\therefore f(3) = 12$, f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

તથા $f(x) = x$ હોય તો $\frac{4}{9}x^3 = x$

$\therefore x = 0, \pm\frac{3}{2}$

$f(x) = x$ ને ત્રણ ભિન્ન વાસ્તવિક ઉકેલ મળે. **જવાબ :** (A), (C), (D)

(176) જો $P = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\int_0^{\pi} tan(y\sin x)\,dx$ અને $Q = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{3}}\,dx$, તો

(A) 3Q = 4P (B) 3P = 4Q (C) P + 2Q = 5 (D) 2(P + Q) = 7

ઉકેલ : $P = \lim_{y\to 0}\int_0^{\pi} \sin x\frac{tan(y\sin x)}{y\sin x}\,dx = \int_0^{\pi}\sin dx = 2$

$$Q = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{3}}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{n\left[1-\frac{x}{n}-1\right]}\, e^{\frac{x}{3}}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}\, e^{\frac{x}{3}}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-\frac{2}{3}x}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{-\frac{2}{3}x}}{-\frac{2}{3}}\right]_0^n = \frac{-3}{2}\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\frac{2}{3}n}-1\right] = \frac{3}{2}$$

$\therefore P = 2, Q = \frac{3}{2}$

$\therefore$ 3P = 4Q, P + 2Q = 5, 2 (P + Q) = 7 **જવાબ :** (B), (C), (D)

(177) જો વક્ર $ax^2 + by^2 = 1$ અને $a'x^2 + b'y^2 = 1$ લંબચ્છેદી હોય તો

(A) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}$ (B) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}$ (C) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}$ (D) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}$

ઉકેલ : $ax^2 + by^2 = 1$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં, $2ax + 2by\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore\ m_1 = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-ax}{by}$

તે જ રીતે વક્ર $a'x^2 + b'y^2 = 1$ માટે, $m_2 = \dfrac{-a'x}{b'y}$

જો આપેલ વક્રો લંબચ્છેદી હોય તો $m_1 m_2 = -1$.

$$\therefore \left(\frac{-ax}{by}\right)\left(\frac{-a'x}{b'y}\right) = -1$$

$\therefore aa'x^2 + bb'y^2 = 0$

હવે, $ax^2 + by^2 = 1$

$a'x^2 + b'y^2 = 1$

$$\therefore \frac{x^2}{b'-b} = -\frac{y^2}{a'-a} = \frac{1}{ab'-a'b}$$

$$aa'\frac{(b'-b)}{ab'-a'b} + bb'\frac{(a-a')}{ab'-a'b} = 0$$

$$\therefore \frac{b'-b}{bb'} + \frac{a-a'}{aa'} = 0 \qquad (ab' \ne a'b)$$

$$\therefore \frac{1}{b} - \frac{1}{b'} + \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$$

બીજી રીત : $(a - a')x^2 + (b - b')y^2 = 0$ તથા $aa'x^2 + bb'y^2 = 0$

$$\therefore -\frac{y^2}{x^2} = \frac{a-a'}{b-b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

$$\therefore \frac{a-a'}{aa'} = \frac{b-b'}{bb'}$$

$$\therefore \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b'} - \frac{1}{b}$$

$$\therefore \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$$

જવાબ : (D)

(178) ધારો કે $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 < x \le 1 \\ 2 - e^{x-1}, & 1 < x \le 2 \\ x - e, & 2 < x \le 3 \end{cases}$ અને $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ તો,

(A) $x = e$ આગળ g ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ તથા $x = 1 + \log 2$ આગળ g ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે.

(B) $x = 1$ આગળ g ને સ્થાનીય મહત્તમ તથા $x = 2$ આગળ g ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે છે.

(C) g ને મહત્તમ મૂલ્ય ન મળે.

(D) g ને ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે.

ઉકેલ : $g'(x) = \begin{cases} e^x, & 0 < x \le 1 \\ 2 - e^{x-1}, & 1 < x \le 2 \\ x - e, & 2 < x \le 3 \end{cases}$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે $g'(x) = 0$.

$0 < x < 1$ માટે $e^x > 0$ છે, તથા $2 - e^{x-1} = 0$ $\quad 1 < x < 2$

$\therefore\ x = 1 + \log 2$

તથા $2 < x < 3$ માટે $x = e$

હવે $g''(x) = \begin{cases} -e^{x-1}, & 1 < x < 2 \\ 1, & 2 < x < 3 \end{cases}$

$\therefore\ g''(1 + \log 2) = -e^{\log 2} = -2 < 0$

$\therefore\ g''(e) = 1 > 0$

$\therefore\ x = e$ આગળ g ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે તથા $x = 1 + \log 2$ આગળ g ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

જવાબ : (A)

(179) જો વક્ર $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ એ રેખા $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ ને સ્પર્શે તો $n = ...$

(A) માત્ર 2 (B) માત્ર 3 (C) માત્ર 4 (D) કોઈપણ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા

ઉકેલ : $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ (a, b) વક્ર પર છે તે સ્પષ્ટ છે.

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \frac{n}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}{\frac{n}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}}. \quad \text{આથી} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)} = -\frac{b}{a}$$

$\therefore$ સ્પર્શકનું સમીકરણ, $y - b = -\frac{b}{a}(x - a)$

$\therefore\ ay - ab = -bx + ab$

$\therefore\ bx + ay = 2ab$ એટલે કે $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

$n \in R-\{0\}$ માટે આપેલ વક્ર એ રેખા $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ ને સ્પર્શે. **જવાબ :** (D)

(180) વાસ્તવિક વિધેય f એ $f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{2f(x)+2f(y)-4}{6}$ $(x, y \in R)$ સંબંધ ધરાવે છે. જો $f'(0) = 2$ હોય તો f એ

(A) R પર વધતું વિધેય છે. (B) R પર ઘટતું વિધેય છે.

(C) $(0, \infty)$ પર વધતું તથા $(-\infty, 0)$ પર ઘટતું વિધેય છે. (D) f વિશે કઈ કહી શકાય નહિ.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણમાં $x = y = 0$ મૂકતાં,

$f(0) = \frac{4f(0)-4}{6}$. આથી $f(0) = -2$ (1)

આપેલ સમીકરણમાં $y = 0$ મૂકતાં,

$$\therefore\ f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{2f(x)+2f(0)-4}{6} = \frac{2f(x)-4-4}{6} = \frac{f(x)-4}{3}$$

$\therefore f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(x)-4}{3}$. આથી $f(3x) = 3f(x) + 4$ (2)

હવે, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{3x+3h}{3}\right)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2f(3x)+2f(3h)-4}{6}-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2f(3x)+2f(3h)-4-6f(x)}{6h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6f(x)+8+2f(3h)-4-6f(x)}{6h} \quad \text{((2) પરથી)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(3h)+2}{3h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(3h)-f(0)}{3h} \quad \text{((1) પરથી)}$$

$= f'(0) = 2$ $(f'(0) = 2)$

આથી $f(x) = 2x + c$

$\therefore f$ એ R પર વધતું વિધેય છે. **જવાબ :** (A)

(181) જો વક્ર $ay^2 = x^3$ ના બિંદુ P (at^2, at^3) આગળનો સ્પર્શક વક્રને ફરીથી વક્રના બિંદુ $Q(t')$ આગળ મળે તો $t' =$ ......

(A) $2t$ (B) $-t$ (C) $\frac{t}{2}$ (D) $-\frac{t}{2}$

ઉકેલ : બિંદુ P (at^2, at^3) આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y - at^3 = \frac{3t}{2}(x - at^2)$ $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t}\right)$ (1)

આ સ્પર્શક વક્રને ફરીથી બિંદુ $Q(t') = Q(at'^2, at'^3)$ માં મળે છે.

$\therefore$ (1) પરથી, $a(t'^3 - t^3) = \frac{3t}{2}a(t'^2 - t^2)$

$\therefore (t'^2 + t't + t^2)\,2 = 3t\,(t'+t)$ $(t' \neq t)$

$\therefore 2t'^2 - t't - t^2 = 0$

$\therefore (t' - t)(2t' + t) = 0$

$\therefore t' = -\frac{t}{2}$ $(t' \neq t)$ **જવાબ :** (D)

(182) જો $y = a\log x + bx^2 + x$ ને $x = -1$ અને $x = 2$, આગળ આત્યંતિક કિંમતો મળે તો

(A) $a=2, b=-1$ (B) $a=2, b=\frac{-1}{2}$ (C) $a=-2, b=\frac{1}{2}$ (D) આમાંથી એક પણ નહીં

ઉકેલ : $y = a\log x + bx^2 + x$ ને $x = -1$ અને $x = 2$ આગળ આત્યંતિક મૂલ્યો મળે છે.

$x = -1$ અને $x = 2$ આગળ $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{a}{x} + 2bx + 1 = 0$, $x = -1$ લેતાં $-a - 2b + 1 = 0$ અને

$x = 2$ લેતાં $\frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$

$\therefore a = 2$ અને $b = \frac{-1}{2}$ **જવાબ :** (B)

(183) વક્ર $y = x^3$ ને ઊગમબિંદુ સિવાયના બિંદુ P_1 આગળનો સ્પર્શક વક્રને ફરીથી બિંદુ P_2 માં મળે છે. P_2 આગળનો સ્પર્શક વક્રને ફરીથી બિંદુ P_3 માં મળે છે, તો આ જ રીતે આગળ વધતાં બિંદુ $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ ના X-યામ ......

(A) સમાંતર શ્રેણીમાં હોય. (B) સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય.

(C) સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય. (D) સમાંતર તેમજ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય.

ઉકેલ : $y = x^3$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2$. ધારો કે વક્ર પરનું બિંદુ $P_1\,(h, h^3)$ છે.

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1} = 3h^2$

P_1 આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ, $y - h^3 = 3h^2\,(x - h)$

$\therefore (x - h)\,(x^2 + xh + h^2) = 3h^2\,(x - h)$ (વક્ર સાથેના છેદબિંદુ આગળ)

$\therefore x^2 + xh - 2h^2 = 0$ અથવા $x = h$

$\therefore (x - h)\,(x + 2h) = 0$ $(x \neq h)$

$\therefore x = -2h.$ આથી $y = -8h^3$

$\therefore P_2\,(-2h, -8h^3)$

$\therefore P_3$ નો x યામ $-2(-2h) = 4h$ તથા y યામ $64\,h^3$

$\therefore P_3 = (4h, 64h^3)$

આ જ રીતે આગળ વધતાં જોઈ શકાય છે કે, $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ ના X- યામ $h, -2h, 4h, \dots$ એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (B)

(184) વક્ર $x = sec^2\,\theta$, $y = cot\,\theta$ ના બિંદુ $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ આગળનો સ્પર્શક જો વક્રને ફરીથી બિંદુ Q આગળ મળે, તો PQ = ...

(A) $\sqrt{15}$ (B) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ (C) $\frac{1}{2}\sqrt{15}$ (D) $2\sqrt{15}$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = \frac{-cosec^2\,\theta}{2sec^2\theta\,tan\theta} = -\frac{1}{2}\,cot^3\,\theta$ આથી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$ માટે $x = sec^2 \frac{\pi}{4} = 2, y = cot \frac{\pi}{4} = 1$

$\therefore$ વક્રપરનું બિંદુ $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$, બિંદુ P (2, 1) થશે.

P આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ, $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$

$\therefore\ x + 2y - 4 = 0$ (1)

હવે, $x = sec^2 \theta, y = \cot \theta$

$sec^2 \theta - tan^2 \theta = 1$ નો ઉપયોગ કરતાં θ નો લોપ કરી શકાય. $x - \frac{1}{y^2} = 1$

$y^2 = \frac{1}{x-1}$ (2)

(1) પરથી, $y = \frac{4-x}{2}$

છેદ બિંદુ માટે, (2) માં મૂકતાં, $\left(\frac{4-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{x-1}$

$\therefore\ (x^2 - 8x + 16)(x - 1) = 4$

$\therefore\ x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$

$\therefore\ (x - 2)(x^2 - 7x + 10) = 0$

$\therefore\ (x - 2)^2 (x - 5) = 0$

$\therefore\ x = 2, 5$

જો $x = 2$ તો $y = 1$. જો $x = 5$ તો $y = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ P (2, 1) (જે આપેલ છે) તેથી $Q = \left(5, -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore PQ = \sqrt{(5-2)^2 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ **જવાબ :** (B)

(185) જો વક્ર $y = ax^2 + bx + \frac{7}{2}$ ને બિંદુ (1, 2) આગળનો સ્પર્શક વક્ર $y = x^2 + 6x + 10$ ને બિંદુ (–2, 2) આગળના અભિલંબને સમાંતર હોય તો $a = ..., b = ...$

(A) $-1, \frac{5}{2}$ (B) $\frac{5}{2}, -1$ (C) $1, -\frac{5}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}, 1$

ઉકેલ : $y = ax^2 + bx + \frac{7}{2}$ આથી $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)} = 2a + b$$

વળી, બિંદુ (1, 2) વક્ર પર હોવાથી, $2 = a + b + \frac{7}{2}$. આથી $a + b = -\frac{3}{2}$ (1)

હવે, $y = x^2 + 6x + 10$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 2x + 6$

$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2,\,2)} = 2$ આથી અભિલંબનો ઢાળ $= -\frac{1}{2}$

આપેલ શરત અનુસાર, $2a + b = -\frac{1}{2}$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં, $a = 1, b = -\frac{5}{2}$ **જવાબ :** (C)

(186) જો p_1 અને p_2 એ અનુક્રમે ઊગમબિંદુથી વક્ર $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ પરના સ્પર્શક તથા અભિલંબની લંબાઈ હોય, તો $4p_1^2 + p_2^2$ = ...

(A) $4a^2$ (B) $2a^2$ (C) a^2 (D) $3a^2$

ઉકેલ : આપેલ વક્રના પ્રચલ સમીકરણ $x = a\,sin^3\,\theta,\ y = a\,cos^3\,\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3a cos^2\theta sin\theta}{3a sin^2\theta cos\theta} = \frac{-cos\theta}{sin\theta}$$

સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - acos^3\,\theta = \frac{-cos\theta}{sin\theta}(x - asin^3\,\theta)$

$\therefore\ x\,cos\theta + y\,sin\theta = asin\theta\,cos\theta$

અભિલંબનું સમીકરણ $y - acos^3\,\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}(x - asin^3\,\theta)$

$\therefore\ x\,sin\theta - y\,sin\theta = -\,a(cos^4\theta - sin^4\theta)$

$\therefore\ x\,sin\theta - y\,cos\theta = -\,acos2\theta$

$\therefore$ સ્પર્શકનું સમીકરણ $x\,cos\theta + y\,sin\theta = \frac{a}{2}\,sin\,2\theta$

$$\therefore\ p_1 = \frac{\left|-\frac{a}{2}sin\,2\theta\right|}{\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta}} = \left|\frac{a}{2}sin2\theta\right|$$

$\therefore\ p_2 = |a\,cos\,2\theta|$

$\therefore\ 4p_1^{\,2} + p_2^{\,2} = a^2$ **જવાબ :** (C)

(187) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + ax + b$. જો $F(-2) = 0$ હોય, તો એવી કેટલી ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) શક્ય બને જ્યાં વિધેય F એ $P(-2, 0)$ આગળ ન્યૂનતમ હોય.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + ax + b$

$F(-2) = 0 \Rightarrow 2a - b = \frac{10}{3}$

$F'(x) = x^2 + 3x + a$

$F'(-2) = 0 \Rightarrow a = 2$

$\therefore\ F'(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

$\therefore\ F'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ અથવા -2

$\therefore\ F''(x) = 2x + 3$

$x = -2$ આગળ $F''(x) = -1$

$\therefore\ x = -2$ આગળ F ને મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

$\therefore$ એક પણ ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) શક્ય ન બને જેથી $(-2, 0)$ આગળ F ને ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે. **જવાબ :** (A)

(188)

વિભાગ 1	વિભાગ 2
(P) 4 સેમી બાજુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણમાં અંતર્ગત મહત્તમ ક્ષેત્રફળવાળો લંબચોરસ હોય તેનું ક્ષેત્રફળ.	(i) $2\sqrt{3}$
(Q) જો વક્ર $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ અને $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$ વચ્ચે મહત્તમ અંતર 3λ હોય તો λ = ...	(ii) 0
(R) $x^3 - 3x^2 - x + 3,\ x \in [0, 4]$ ને મહત્તમ મૂલ્ય $5k$ હોય તો k = ...	(iii) 9
(S) $cos^4 x - 6\ cos^2 x + 5$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય	(iv) 3

	(P)	(Q)	(R)	(S)
(A)	(iv)	(iii)	(ii)	(i)
(B)	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(C)	(i)	(iii)	(iv)	(ii)
(D)	(i)	(iii)	(ii)	(iv)

ઉકેલ : (P) ધારો કે PQ = x

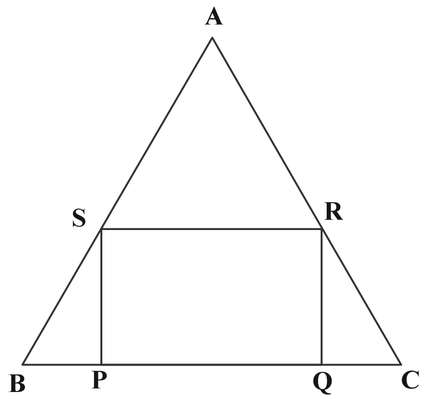
$\therefore$ BP = $\frac{4-x}{2}$

Δ BPS માં, PS = $\frac{4-x}{2}\ tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\ (4 - x)$

$\therefore$લંબચોરસ PQRSનું ક્ષેત્રફળ

$$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\ (4 - x)\ x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\ (4x - x^2)$$



આકૃતિ 15.8

$$\therefore \frac{d\Delta}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ (4 - 2x)$$

$$\therefore \frac{d\Delta}{dx} = 0 \Rightarrow x = 2,\ \frac{d^2\Delta}{dx^2} = -\sqrt{3} < 0$$

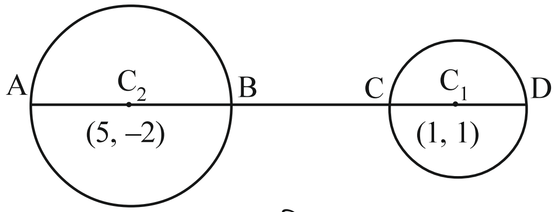
$\therefore$ $x = 2$ આગળ Δ મહત્તમ બને અને તે $2\sqrt{3}$ થાય. (P) $\rightarrow$ (i)

$(4 - x)\ x$ મહત્તમ થવા માટે $4 - x = x$

એટલે કે $x = 2$

(Q) $S_1 : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ વર્તુળ છે. કેન્દ્ર C_1 (1, 1), ત્રિજ્યા $r_1 = 1$ છે.

$S_2 : x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$ વર્તુળ છે. કેન્દ્ર C_2 (5, –2), ત્રિજ્યા $r_2 = 3$



આકૃતિ 15.9

મહત્તમ અંતર $AD = C_1C_2 + r_1 + r_2 = 5 + 3 + 1$ (Q) → (iii)

(R) $y = x^3 - 3x^2 - x + 3, x \in [0, 4]$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6+4\sqrt{3}}{6}, \frac{6-4\sqrt{3}}{6}$

$y'' = 6x - 6 = -4\sqrt{3} < 0,$ ($x = \frac{6-4\sqrt{3}}{6}$ લેતાં)

હવે, yનું વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય $x = 0$ અથવા $x = 4$ આગળ મળશે.

$f(0) = 3, f(4) = 15$

$\therefore$ મહત્તમ મૂલ્ય $15 = 5k \Rightarrow k = 3$ (R) → (iv)

(S) $y = cos^4 x - 6 cos^2 x + 5$

ધારો કે $cos^2 x = t$ તો $0 \le t \le 1$

$\therefore y = t^2 - 6t + 5, \ 0 \le t \le 1$ આથી $\frac{dy}{dx} = 2t - 6 < 0.$ y ઘટતું વિધેય છે.

$t \in [0, 1]$ માટે y નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $t = 1$ આગળ મળશે.

$y_{min} = 0$ (S) → (ii)

ટૂંકી રીત : (S) અને (R)માં બે જ વિકલ્પ સમાન છે.

S ગણતાં (S) → (ii) મળે છે.

(S) → (ii) માત્ર જવાબ (C)માં છે. **જવાબ :** (C)

(189) વક્ર $y = \int_0^x 2|t|\,dt$ માટે પ્રથમ ચરણની દ્વિભાજક રેખાને સમાંતર સ્પર્શકનું સમીકરણ ......

(A) $y = x \pm 1$ (B) $y = x \pm \frac{3}{4}$ (C) $y = x + \frac{3}{4}, y = x - \frac{1}{4}$ (D) $y = x \pm \frac{1}{2}$

ઉકેલ : $y = \int_0^x 2|t|\,dt$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં, $\frac{dy}{dx} = 2|x|$

માંગેલ સ્પર્શક પ્રથમ ચરણની દ્વિભાજક રેખા એટલે કે $y = x$ ને સમાંતર હોવાથી, $\frac{dy}{dx} = 1$

$\therefore 2|x| = 1.$ આથી $x = \pm \frac{1}{2}$

$\therefore y = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} t\,dt = \frac{1}{4}$

$\therefore$ વક્ર પરનાં બિંદુ $\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ છે.

∴ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - \frac{1}{4} = 1\left(x - \left(\pm\frac{1}{2}\right)\right)$

∴ $y = x + \frac{3}{4}$ અને $y = x - \frac{1}{4}$ **જવાબ :** (C)

(190) ઉપવલય $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ ના બિંદુ P (x, y) આગળનો સ્પર્શક અક્ષોને બિંદુ A તથા B માં છેદે છે. જો Δ OAB નું ક્ષેત્રફળ ન્યૂનતમ હોય તો બિંદુ P એ ......

(A) $(\sqrt{8}, 0)$ (B) $(0, \sqrt{18})$ (C) $(2, 3)$ (D) $(1, \frac{\sqrt{63}}{2})$

ઉકેલ : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ પરના કોઈપણ બિંદુ P $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1.$

આ સ્પર્શકનું અક્ષો સાથેનાં છેદબિંદુ A $\left(\frac{a}{\cos\theta}, 0\right)$, B $\left(0, \frac{b}{\sin\theta}\right)$ છે.

∴ Δ OAB નું ક્ષેત્રફળ $\frac{1}{2}\ \frac{|ab|}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{|ab|}{\sin 2\theta}$

આ ક્ષેત્રફળ ન્યૂનતમ હોય, તો $\sin 2\theta$ ની કિંમત મહત્તમ હોય.

∴ $\theta = \frac{\pi}{4}$

∴ P $(a\cos\theta, b\sin\theta) = \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}\right) = (2, 3)$ ($a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{18}$) **જવાબ :** (C)

(191) જો રેખા $(3 - a)x + ay + a^2 = 1 = 0$ એ વક્ર $xy = 1$નો કોઈક બિંદુએ અભિલંબ હોય તો $a \in$......

(A) $(0, 3)$ (B) $(0, \infty)$ (C) $(0, 1)$ (D) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

ઉકેલ : $y = \frac{1}{x}$. આથી $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

∴ અભિલંબનો ઢાળ $x^2 > 0$

રેખા $(3 - a)x + ay + a^2 - 1 = 0$ એ આપેલ વક્રનો અભિલંબ છે.

∴ $-\frac{3-a}{a} > 0.$ આથી $\frac{a-3}{a} > 0$

∴ $a \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ **જવાબ :** (D)

(192) વક્ર $y = ax^3 + bx^2 + cx + 5$ એ X-અક્ષને બિંદુ P $(-2, 0)$ એ સ્પર્શે છે. આ વક્ર Y-અક્ષને Q-બિંદુએ છેદે છે. ત્યાં સ્પર્શકનો ઢાળ 3 છે. a, b, c = ...

(A) $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 3$ (B) $3, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 3$ (D) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -3$

ઉકેલ : વક્ર $y = ax^3 + bx^2 + cx + 5$ એ Y- અક્ષને બિંદુ Q $(0, 5)$ માં છેદે છે.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,5)} = 3$

$\therefore \left[3ax^2 + 2bx + c\right]_{x=0} = 3.$ આથી $c = 3$ (1)

વળી, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2,0)} = 0$ (વક્ર એ X-અક્ષને બિંદુ P(–2, 0) આગળ સ્પર્શે છે.)

$\therefore 12a - 4b + c = 0.$ આથી $12a - 4b + 3 = 0$ (2)

વળી, P (–2, 0) એ વક્ર પર હોય.

$\therefore -8a + 4b - 2c + 5 = 0.$ આથી $-8a + 4b - 1 = 0$ (3)

(2) અને (3)ને ઉકેલતાં, $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4}$ **જવાબ :** (A)

(193) વક્ર $ay^2 = x^3, a > 0.$ પર પ્રથમ ચરણમાં કયા બિંદુએ અભિલંબ બંને અક્ષ પર સમાન લંબાઈના અંતઃખંડ કાપે છે ?

(A) $\left(\frac{a}{9}, \frac{8a}{27}\right)$ (B) $\left(4a, \frac{8a}{27}\right)$ (C) $\left(\frac{4a}{9}, \frac{8a}{27}\right)$ (D) $\left(\frac{4a}{9}, \frac{-8a}{27}\right)$

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ બિંદુ (x_1, y_1) છે.

$\therefore ay_1^2 = x_1^3.$ આથી $y_1 = \pm\sqrt{\frac{x_1^3}{a}}$

$\therefore ay^2 = x^3$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$2ay\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \frac{3x_1^2}{2ay_1} = \frac{3x_1^2}{2a\sqrt{\frac{x_1^3}{a}}} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x_1}{a}}$

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ $= \mp\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{x_1}}$

આપણે જાણીએ છીએ કે જો રેખા બંને અક્ષ પર સમાન લંબાઈનો અંતઃખંડ કાપે તો તેનો ઢાળ $= \pm 1$

$\therefore \pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{x_1}} = \pm 1.$ આથી $\frac{4}{9}\frac{a}{x_1} = 1.$ આથી $x_1 = \frac{4a}{9}$

$\therefore y_1 = \pm\sqrt{\frac{64a^3}{9^3 a}} = \pm\frac{8a}{27}$

$\therefore$ પ્રથમ ચરણમાં માંગેલ બિંદુ $\left(\frac{4a}{9}, \frac{8a}{27}\right)$ છે.

નોંધ : $y_1 = -\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ હોય તો. **જવાબ :** (C)

(194) વક્ર $f(x) = x^2 + bx - b$ ના (1, 1) આગળનો સ્પર્શક તથા અક્ષો વચ્ચે રચાતો ત્રિકોણ પ્રથમ ચરણમાં છે. જો આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 2 ચો એકમ હોય તો, $b =$ ......

(A) –1 (B) 3 (C) –3 (D) 1

ઉકેલ : $f(x) = x^2 + bx - b$ આથી $f'(x) = 2x + b$

(1, 1) આગળ $f'(x) = 2 + b$

$f(x)$ ને (1, 1) આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ, $y - 1 = (2 + b)(x - 1)$

આ સ્પર્શક X-અક્ષને A $\left(\frac{b+1}{b+2}, 0\right)$ તથા Y-અક્ષ ને B $(0, -b-1)$ બિંદુએ છેદે છે.

Δ OAB નું ક્ષેત્રફળ = 2

$\therefore -\frac{1}{2}\ (b+1)\frac{(b+1)}{b+2} = 2$ આથી $b^2 + 2b + 1 = -4b - 8$

$\therefore b^2 + 6b + 9 = 0$ આથી $(b+3)^2 = 0$

$\therefore b = -3$ **જવાબ :** (C)

(195) વક્ર $y = x^{\frac{1}{3}}(1 - \cos x)$ ને $x = 0$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ ...... થશે.

(A) $y = 0$ (B) $x = 0$ (C) $y = 1$ (D) $x = 1$

ઉકેલ : $f'(x) = \frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{3}} \sin x + (1 - \cos x)\ \frac{1}{3}\ x^{-\frac{2}{3}}$

આપેલ વિધેય $x = 0$ આગળ સતત અને વિકલનીય હોવાથી,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}(1 - \cos h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} \sin\frac{h}{2} \sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 0$$

વળી, $x = 0$ તો $y = 0$

સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = 0$ થાય. **જવાબ :** (A)

(196) જો બિંદુ (0, 3) અને (5, –2)ને જોડતી રેખા એ વક્ર $y = \frac{c}{x+1}$ નો સ્પર્શક હોય, તો c = ...

(A) 1 (B) –2 (C) 4 (D) 8

ઉકેલ : બિંદુ (0, 3) અને (5, –2)માંથી પસાર થતી રેખા $y - 3 = \frac{3+2}{0-5}(x - 0) = -x$

$\therefore$ કોઈ બિંદુ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ $x + y - 3 = 0$ છે.

બિંદુ (α, β) માટે, $\alpha + \beta - 3 = 0$ (1)

હવે, $y = \frac{c}{x+1}$. આથી $\frac{dy}{dx} = \frac{-c}{(x+1)^2}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(\alpha,\beta)} = \frac{-c}{(\alpha+1)^2} = -1$ ($x + y - 3$ નો ઢાળ = –1) (2)

$\therefore c = (\alpha + 1)^2$ તથા $\beta = \frac{c}{\alpha+1}$ ((α, β) એ વક્ર પર આવેલ છે.)

$$\therefore -\frac{c}{\left(\frac{c}{\beta}\right)^2} = -1$$

$\therefore \beta^2 = c$ અથવા $(3 - \alpha)^2 = c = (\alpha + 1)^2$

$\therefore 3 - \alpha = \pm(\alpha + 1)$

$\therefore 3 - \alpha = \alpha + 1$ આથી $\alpha = 1$

$\therefore c = (1 + 1)^2 = 4$ **જવાબ :** (C)

(197) વિધેય $f(x) = \dfrac{tan^2x - cot^2x + 1}{tan^2x + cot^2x - 1}$ માટે નીચેનામાંથી કયા વિધાન સત્ય છે ?

(A) $f(x)$નું વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય $\frac{5}{3}$ છે.
(B) $f(x)$નું વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય -1 છે.
(C) $f(x)$ને વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય ન મળે.
(D) $f(x)$ને વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે.

ઉકેલ : $f(x) = \dfrac{tan^2x - cot^2x + 1}{tan^2x + cot^2x - 1} = \dfrac{tan^4x + tan^2x - 1}{tan^4x - tan^2x + 1}$

$tan\, x = t$ લેતાં, $g(t) = \dfrac{t^4 + t^2 - 1}{t^4 - t^2 + 1}$

$g'(t) = \dfrac{-4t^5 + 8t^3}{\left(t^4 - t^2 + 1\right)^2} = \dfrac{4t^3(2 - t^2)}{\left(t^4 - t^2 + 1\right)^2}$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે $g'(t) = 0$

$\therefore$ $t^2 = 2$ ($t = 0$ શક્ય નથી.)

$t^2 = 2$ ના સામિપ્યમાં $g'(t)$ ધન થી ઋણ તરફ જાય છે.

$\therefore$ $t^2 = 2$ આગળ $g(t)$ ને મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

$g(\sqrt{2}) = \frac{5}{3}$

$\therefore$ વિધેય f ને વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય $\frac{5}{3}$ મળે.

વિધેય f માટે ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે. **જવાબ :** (A), (D)

(198) ધારો કે $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ જ્યાં $a, b, c, d \in R$ અને $3b^2 < c^2$ એ વધતું વિધેય છે અને $g(x) = af'(x) + bf''(x) + c^2$. જો $G(x) = \int_{\alpha}^{x} g(t)\,dt$, $\alpha \in R$ તો $\alpha < x < \alpha + 1$ માટે

(A) $G(x)$ એ ઘટતું વિધેય છે.
(B) $G(x)$ એ વધતું વિધેય છે.
(C) $G(x)$ એ વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.
(D) $G(x)$ એ એક-એક વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c > 0$ ($f(x)$ એ વધતું વિધેય છે.)

$\therefore$ $a > 0$ અને $4b^2 - 12ac < 0$

$\therefore$ $a > 0$ અને $b^2 < 3ac$

વળી, $g(x) = a\,f'(x) + b\,f''(x) + c^2$

$\therefore$ $g(x) = a(3ax^2 + 2bx + c) + b(6ax + 2b) + c^2$

$= 3a^2x^2 + 8abx + 2b^2 + c^2 + ac$

$\Delta = 64a^2b^2 - 4(3a^2)(2b^2 + c^2 + ac)$

$= 4a^2(10b^2 - 3c^2 - 3ac) < 4a^2(10b^2 - 3c^2 - b^2)$ ($b^2 < 3ac$)

$\therefore$ $\Delta < 4a^2(9b^2 - 3c^2) = 12a^2(3b^2 - c^2) < 0$ ($3b^2 < c^2$)

$\therefore$ $g(x) > 0, \forall x \in R$

$\therefore$ $G(x) = \int_{\alpha}^{x} g(t)\,dt$ એ વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ $G(x)$ એ એક-એક વિધેય થશે. **જવાબ :** (B), (D)

(199) વક્ર $y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ના બિંદુ P આગળનો સ્પર્શક રેખા $y = x + 5$ ને સમાંતર છે. જો બિંદુ P નો y-યામ $\frac{u^2}{4}$ હોય તો $\alpha = ...$

(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

ઉકેલ : $y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$

સ્પર્શક રેખા $y = x + 5$ ને સમાંતર છે. આથી $\frac{dy}{dx} = 1$

$\tan \alpha - \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \alpha} = 1$

$\therefore x = (\tan \alpha - 1)\, u^2 \cos^2 \alpha$, તથા $y = \frac{u^2}{4}$ (આપેલ છે.)

આપેલ સમીકરણ $y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$ માં મૂકતાં,

$\therefore \frac{u^2}{4} = (\tan \alpha - 1)\, u^2 \cos^2 \alpha \left[\tan \alpha - \frac{1}{2}(\tan \alpha - 1)\right]$

$\therefore \frac{1}{4} = (\tan \alpha - 1) \cos^2 \alpha \left[\frac{\tan \alpha + 1}{2}\right]$

$\therefore \frac{1}{2} = \cos^2 \alpha (\tan^2 \alpha - 1) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$

$\therefore \cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$ આથી $2\alpha = \frac{2\pi}{3}$ $\left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$ **જવાબ :** (D)

(200) R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકની અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળ ધરાવતા નળાકારની ઊંચાઈ ...... થશે.

(A) $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{R}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{5R}{4}$ (D) R

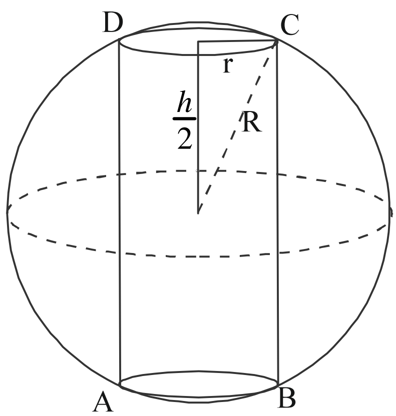
ઉકેલ : જો નળાકારની ત્રિજ્યા r અને ઊંચાઈ h હોય તો

$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2$ (R = ગોલકની ત્રિજ્યા)

$\therefore \frac{h^2}{4} + r^2 = R^2$

$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

નળાકારનું ઘનફળ $V = \pi r^2 h$



આકૃતિ 15.10

$$= \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$$

$\frac{dV}{dh} = \pi \left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \Rightarrow \pi \left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0.$ આથી $R^2 = \frac{3}{4}h^2$. આથી $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$ R

$\frac{d^2V}{dh^2} = \pi \left(0 - \frac{6h}{4}\right) = -\frac{3}{2}\pi h.$ $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$ R હોવાથી $\frac{d^2V}{dh^2} < 0$

$\therefore h = \frac{2}{\sqrt{3}}$ R હોય ત્યારે નળાકારનું ઘનફળ મહત્તમ થશે. **જવાબ :** (A)

(201) સમીકરણ $x^3 + 2x^2 + 5x + 2 \cos x = 0$ ને $[0, 2\pi]$ માં કેટલા ઉકેલ મળે ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 2 \cos x$

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 4x + 5 - 2 \sin x$

$= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} - 2 \sin x$

હવે, $\frac{11}{3} - 2 \sin x > 0, \forall x$ $(-1 \le \sin x \le 1)$

$\therefore f'(x) > 0, \forall x$ આથી f એ વધતું વિધેય છે.

વળી, $f(0) = 2$. આથી $f(x) > f(0)$

$\therefore f(x) > 2$

$\therefore f(x) = 0$ ને $[0, 2\pi]$ માં એક પણ ઉકેલ મળે નહિ. **જવાબ :** (A)

(202) વિધેય $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{-3}{2}} - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે.

(A) 0 (B) 10 (C) –10 (D) ન મળે.

ઉકેલ : $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$t = \sqrt{x}$ મૂકતાં, $f(t) = t^3 + \frac{1}{t^3} - 4\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)$

$$= \left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 3\left(t + \frac{1}{t}\right) - 4\left[\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2\right]$$

$$\therefore f(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 4\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 3\left(t + \frac{1}{t}\right) + 8$$

$t + \frac{1}{t} = a$ મૂકતાં,

$f(a) = a^3 - 4a^2 - 3a + 8$, જ્યાં $a > 2$ $(t > 0)$

$f'(a) = 3a^2 - 8a - 3 = (3a + 1)(a - 3)$

$f'(a) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}, 3$

પરંતુ $a > 2$. આથી $a = 3$

અંતરાલ $(2, 3)$માં $f'(a) < 0$ અને $(3, \infty)$માં $f'(a) > 0$

ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 8 = -10$ **જવાબ :** (C)

(203) જો વિધેય $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$ને $x = x_1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ અને $x = x_2$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મળે જ્યાં $x_2 = x_1^2$ તો $a =$ ......

(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) (A) અથવા (C)

ઉકેલ : $f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે $f'(x) = 0$

$\therefore x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$

$\therefore (x - a)(x - 2a) = 0$

$\therefore x = a,$ અથવા $2a$

હવે, $x_2 = x_1^2$ હોવાથી $a < 0$ હોઈ શકે નહિ. આથી $a \geq 0$

જો $a = 0$ હોય તો $f'(x) = 6x^2 \geq 0$

$\therefore f$ એ વધતું વિધેય થાય જે શક્ય નથી.

$f''(x) = 12x - 18a$
$= 6(2x - 3a)$

$\therefore$ વિધેય f એ $x = 2a$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ તથા $x = a$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ થશે.

$\therefore x_1 = a$ અને $x_2 = 2a$

$\therefore 2a = a^2 \Rightarrow a = 2$ $(a \neq 0)$ **જવાબ :** (C)

(204) જો વક્ર $y = f(x)$નો સ્પર્શક જે બિંદુનો x-યામ 1 હોય તે બિંદુએ અક્ષની ધન દિશા સામે $\frac{\pi}{6}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે તથા જે બિંદુના x - યામ અનુક્રમે 2 તથા 3 હોય તે બિંદુએ $\frac{\pi}{3}$ તથા $\frac{\pi}{4}$ માપના ખૂણા બનાવે છે, તો

$$\int_1^3 f'(x) f''(x)\,dx + \int_2^3 f''(x)\,dx = \text{......}$$

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{4+\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{4+3\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{4-3\sqrt{3}}{3}$

ઉકેલ : આપેલ છે કે $x = 1$ આગળ $\frac{dy}{dx} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ એટલે કે $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. તે જ રીતે $f'(2) = \sqrt{3}, f'(3) = 1$

$$\therefore \int_1^3 f'(x)\, f''(x)\,dx + \int_2^3 f''(x)\,dx = \int_{f'(1)}^{f'(3)} t\,dt + \left[f'(x)\right]_2^3 \qquad (f'(x) = t \text{ લેતાં } f''(x)dx = dt)$$

$$= \frac{1}{2}\left[t^2\right]_{f'(1)}^{f'(3)} + f'(3) - f'(2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(f'(3)^2 - (f'(1)^2\right] + 1 - \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\right] + 1 - \sqrt{3} = \frac{4-3\sqrt{3}}{3}$$ **જવાબ :** (D)

(205) વક્ર $x^3 - y^2 = 0$ ના બિંદુ P $(4m^2, 8m^3)$ આગળનો સ્પર્શક બીજા કોઈ બિંદુ Q આગળનો અભિલંબ પણ હોય તો $9m^2 =$ ......

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $y^2 = x^3$ (1)

$\therefore 2y \frac{dy}{dx} = 3x^2$. આથી $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4m^2} = \frac{3\cdot 16m^4}{2\cdot 8m^3} = 3m$$

બિંદુ P આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - 8m^3 = 3m\,(x - 4m^2)$

$\therefore\ y = 3mx - 4m^3$ (2)

આ સ્પર્શક વક્રને બીજા કોઈ બિંદુ Q માં મળે છે.

$\therefore$ (1) અને (2) પરથી, $(x - m^2)(x - 4m^2)^2 = 0$ આથી $x = 4m^2$ અથવા m^2

$x = 4m^2$ હોય તો $y = 8m^3$ જે બિંદુ P ના યામ જ છે.

$\therefore\ x = m^2$ તથા $y = -m^3$ (સમીકરણ (2) પરથી). આથી બિંદુ Q $(m^2, -m^3)$

$\therefore$ બિંદુ Q આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=m^2} = -\frac{3}{2}m.$ આથી અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{2}{3m}$

હવે બિંદુ P આગળનો સ્પર્શક એ Q આગળ અભિલંબ હોય, તો

$\frac{2}{3m} = 3m$ આથી $9m^2 = 2$ **જવાબ** : (B)

(206) વક્ર $y = |x^2 - 1|$ તથા $y = |x^2 - 3|$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$ (B) $tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)$ (C) $tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{2}}{7}\right)$ (D) $tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{7}\right)$

ઉકેલ : આપેલ વક્ર $y = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| \geq 1 \\ 1 - x^2 & |x| < 1 \end{cases}$ તથા (1)

$$y = \begin{cases} x^2 - 3, & |x| \geq \sqrt{3} \\ 3 - x^2 & |x| < \sqrt{3} \end{cases} \quad (2)$$

પ્રથમ બંને વક્રોનાં છેદબિંદુ શોધીએ.

$|x^2 - 1| = |x^2 - 3|$

$\therefore\ x^2 - 1 = \pm\,(x^2 - 3)$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{2}$ અને $y = 1$

$\therefore$ છેદબિંદુ A $(\sqrt{2}, 1)$ અને B $(-\sqrt{2}, 1)$ થશે.

A $(\sqrt{2}, 1)$ આગળ ખૂણાનું માપ શોધીએ.

(1) પરથી, $\frac{dy}{dx} = 2x$ આથી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_A = 2\sqrt{2} = m_1$. તે જ રીતે $m_2 = -2\sqrt{2}$

$$tan\ \theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\therefore\ \theta = tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$$

બિંદુ B આગળ પણ આ જ માપનો ખૂણો મળશે. **જવાબ** : (A)

(207) ધારો કે વિધેય f માટે દરેક $x \in R$ માટે $f'(x)$ નું અસ્તિત્વ છે તથા $h(x) = f(x) - (f(x))^2 + (f(x))^3$, $x \in R$ તો

(A) જો f વધતું વિધેય હોય તો h પણ વધતું વિધેય થશે.

(B) જો f વધતું વિધેય હોય તો h ઘટતું વિધેય થશે.

(C) જો f ઘટતું વિધેય હોય તો h વધતું વિધેય થશે.

(D) h વિશે કઈ કહી શકાય નહિ.

ઉકેલ : $h'(x) = f'(x) - 2f(x) f'(x) + 3 f(x)^2 f'(x)$

$$= 3f'(x) \left[(f(x))^2 - \frac{2}{3} f(x) + \frac{1}{3}\right]$$

$$= 3f'(x) \left[\left(f(x) - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right]$$

જો $f'(x) > 0$ હોય તો $h'(x) > 0$

જો f વધતુ વિધેય હોય તો h પણ વધતું વિધેય થશે. **જવાબ :** (A)

(208) જો $f(x) = x^2 + 2bx + 2c^2$ અને $g(x) = -x^2 - 2cx + b^2$ એ એવાં વિધેય છે જ્યાં $min\ f(x) > max\ g(x)$, તો b અને c વચ્ચે કેવો સંબંધ હશે ?

(A) કોઈ સંબંધ ન હોય. (B) $0 < c < \frac{b}{2}$ (C) $|c| < |b| \sqrt{2}$ (D) $|c| > |b| \sqrt{2}$

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = x^2 + 2bx + 2c^2 = (x + b)^2 + 2c^2 - b^2$

$\therefore min\ f(x) = 2c^2 - b^2$

તથા $g(x) = -x^2 - 2cx + b^2 = b^2 + c^2 - (x + c)^2$

$\therefore max\ g(x) = b^2 + c^2$

હવે, $min\ f(x) > max\ g(x)$

$\therefore 2c^2 - b^2 > b^2 + c^2$ $\therefore c^2 > 2b^2$ આથી $|c| > \sqrt{2}\,|b|$ **જવાબ :** (D)

(209) વક્ર $y = [\,|sin\ x| + |cos\ x|]$ અને $x^2 + y^2 = 10$, જ્યાં એ $[x]$ એ x થી નાનો ન હોય તેવો મોટામાં મોટો પૂર્ણાંક, વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $tan^{-1} 3$ (B) $tan^{-1} (-3)$ (C) $tan^{-1} \sqrt{3}$ (D) $tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ઉકેલ : $|sin\ x| + |cos\ x| = \sqrt{(|sinx| + |cosx|)^2}$

$$= \sqrt{1 + |sin 2x|}$$

હવે, $0 \le |sin\ 2x| \le 1$

$\therefore 1 \le |\sqrt{1 + |sin 2x|} \le \sqrt{2}$

$\therefore [|sin\ x|] + |cos\ x|] = 1$

$\therefore y = 1$ (1) તથા $x^2 + y^2 = 10$ (2)

(1) અને (2)ને ઉકેલતાં બંને વક્રનાં છેદબિંદુ (3, 1), (–3, 1) થશે.

હવે, $x^2 + y^2 = 10$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,1)} = -3 \text{ તથા } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-3,1)} = 3$$

વળી, $y = 1$. આથી $\frac{dy}{dx} = 0 = m_2$

$\therefore$ (3, 1) આગળ બંને વક્ર વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

$tan^{-1} \left|\frac{-3-0}{1+(-3)0}\right| = tan^{-1} 3$

તથા (–3, 1) આગળ પણ બંને વક્ર વચ્ચેનો ખૂણાનું માપ $tan^{-1} 3$ થાય છે. **જવાબ :** (A)

(210) ઉપવલય $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1$ ને બિંદુ $(3\sqrt{3} cos\ \theta, sin\ \theta)$ આગળ સ્પર્શક દોરેલ છે. આ સ્પર્શક દ્વારા કપાતા અંતઃખંડોનો સરવાળો θ ની કઈ કિંમત માટે ન્યૂનતમ થાય ? $\left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : ઉપવલય $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1$ ને બિંદુ $(3\sqrt{3} cos\ \theta, sin\ \theta)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$\frac{x\cos\theta}{3\sqrt{3}} + y\ sin\ \theta = 1$ $\left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

અક્ષો પર કપાતા અંતઃખંડોનો સરવાળો $s = 3\sqrt{3} sec\ \theta + cosec\ \theta$

$\therefore \frac{ds}{d\theta} = 3\sqrt{3} sec\ \theta\ tan\ \theta - cosec\ \theta\ cot\ \theta$

s ના ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે $\frac{ds}{d\theta} = 0$. આથી $\frac{3\sqrt{3}\ sin\theta}{cos^2\theta} - \frac{cos\theta}{sin^2\theta} = 0$

$\therefore \frac{1}{3\sqrt{3}} = tan^3\ \theta$

$\therefore tan\ \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ આથી $\theta = \frac{\pi}{6}$ $\left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

વળી, $\frac{d^2s}{d\theta^2} = 3\sqrt{3} sec\ \theta\ tan^2\ \theta + 3\sqrt{3} sec^3\ \theta + cosec\theta\ cot^2\ \theta + cosec^3\ \theta$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{6}} > 0$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ આગળ s ન્યૂનતમ થશે. **જવાબ :** (A)

(211) ધારો કે $f(x) = (1 + x)^n - (1 + nx), x \in [-1, \infty)$. f ને

(A) $x = 0$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

(B) $x = 0$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય કે વૈશ્વિક મૂલ્ય ન મળે.

(C) $x = 0$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે.

(D) $x = 0$ આગળ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ વિશે કઈ કહી શકાય નહિ.

ઉકેલ : $f(x) = (1 + x)^n - (1 + nx)$

આથી $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n$. આથી $f'(0) = 0$

$x > 0$ માટે $f'(x) > 0$

$\therefore [0, \infty)$ માં f એ વધતું વિધેય છે.

$\therefore f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall\ x \in [0, \infty)$

હવે, $-1 \le x < 0$ માટે $\quad 0 \le 1 + x < 1$

$\therefore (1 + x)^n - 1 < 0$

$\therefore f$ એ $[-1, 0]$માં ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore f(x) \ge f(0) = 0 \qquad \forall x \in [-1, 0)$

$\therefore f(x) \ge f(0) = 0 \qquad \forall x \in [-1, \infty)$

$\therefore x = 0$ આગળ f ને વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે. **જવાબ : (C)**

(212) વક્ર $y^2 = 4ax$ ના બિંદુ P $(at^2, 2at)$ આગળ દોરેલ સ્પર્શક તથા અભિલંબ X-અક્ષને અનુક્રમે બિંદુ T તથા N માં છેદે છે. આ પરવલયના બિંદુ P આગળ દોરેલ સ્પર્શક તથા બિંદુ T, P, Nમાંથી પસાર થતા વર્તુળના બિંદુ P આગળ દોરેલ સ્પર્શક વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... થશે.

(A) $tan^{-1}\, t^2$ (B) $cot^{-1}\, t^2$ (C) $tan^{-1}\, |t|$ (D) $cot^{-1}\, |t|$

ઉકેલ : $y^2 = 4ax$ ના બિંદુ (x_1, y_1) આગળ દોરેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ $yy_1 = 2a\,(x + x_1)$ છે.

$\therefore$ બિંદુ P $(at^2, 2at)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$ty = x + at^2$ (1)

સ્પર્શકનો ઢાળ $= \dfrac{1}{t}$

તે X-અક્ષને બિંદુ Tમાં છેદે છે. આથી T $(-at^2, 0)$ (2)

આ બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ $y = -tx + 2at + at^3$

તે X-અક્ષને બિંદુ N $(2at + at^2, 0)$ માં છેદશે. બિંદુ T, P, Nમાંથી જે વર્તુળ પસાર થાય છે તેના વ્યાસાંત બિંદુઓ T તથા N થશે કારણ કે $\overleftrightarrow{TP}$ અને $\overleftrightarrow{NP}$ એ એકબીજાને લંબ છે.

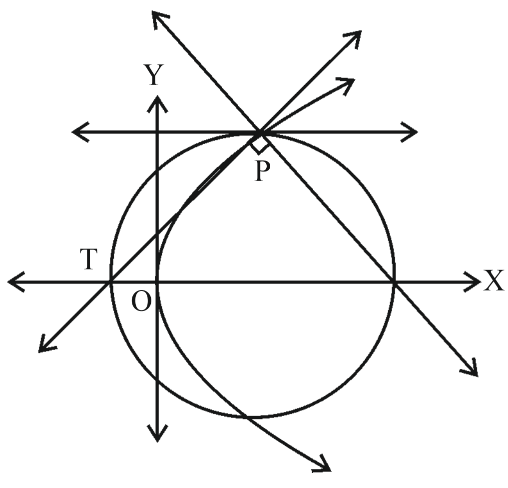
$\therefore$ વર્તુળનું સમીકરણ $(x + at^2)(x - 2a - at^2) + y^2 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 2ax - at^2(2a + at^2) = 0$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં

$2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 2a$ આથી $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a-x}{y}$

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(at^2, 2at)} = \dfrac{a-at^2}{2at} = \dfrac{1-t^2}{2t}$ જે P આગળના વર્તુળના સ્પર્શકનો ઢાળ થશે. (3)



આકૃતિ 15.11

(2) અને (3) પરથી,

$$tan\,\theta = \left|\dfrac{\frac{1}{t} - \frac{1-t^2}{2t}}{1 + \frac{1-t^2}{2t^2}}\right| = \left|\dfrac{2t - t + t^3}{2t^2 + 1 - t^2}\right| = \left|\dfrac{t + t^3}{t^2 + 1}\right| = |t|$$

$\therefore \theta = tan^{-1}\,|t|$ **જવાબ : (C)**

(213) ધારો કે $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 10x, & -1 \le x < 0 \\ sin\,x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 1 + cos\,x, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$, તો f ને

(A) $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે. (B) $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે છે.

(C) $x = 0$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે છે. (D) $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે.

ઉકેલ : $f'(x) = \begin{cases} 3x^2+2x-10, & -1<x<0 \\ cos\, x, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ -sin\, x, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$

વિધેય f એ $x = 0$ તથા $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ વિકલનીય નથી.

કારણ કે $f'(0-) = -10, f'(0+) = 1, f'\left(\frac{\pi}{2}-\right) = 0, f'\left(\frac{\pi}{2}+\right) = -1$

f ના નિર્ણાયક બિંદુ $x = 0, \frac{\pi}{2}$ છે.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ માટે $f'(x) > 0$ તથા $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ માટે $f'(x) < 0$ છે.

$\therefore$ f ને $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

વળી, $-1 < x < 0$ માટે $f'(x) < 0$ તથા $0 < x < \frac{\pi}{2}$ માટે $f'(x) > 0$ છે.

$\therefore$ f ને $x = -1$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ તથા $x = 0$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે. **જવાબ :** (A), (C)

(214) જો વક્ર $x^n y = a^n$ ના કોઈ પણ બિંદુ એ દોરેલ સ્પર્શક તથા તેનાથી અક્ષો દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અચળ હોય તો $n =$ ......

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 1

ઉકેલ : $x^n y = a^n$

$nx^{n-1} y + x^n \frac{dy}{dx} = 0$ આથી $\frac{dy}{dx} = \frac{-n x^{n-1} y}{x^n} = \frac{-n y}{x}$

ધારો કે (x_0, y_0) એ વક્ર પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. આથી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} = -\frac{n y_0}{x_0}$

આ બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - y_0 = -\frac{n y_0}{x_0}(x - x_0)$

જો આ સ્પર્શક X-અક્ષ અને Y-અક્ષને અનુક્રમે A તથા B માં છેદે તો,

A $\left(x_0\left(\frac{1+n}{n}\right), 0\right)$ તથા B $(0, (1+n)\, y_0)$ થશે. O ઊગમબિંદુ છે.

Δ OAB નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\ \frac{(1+n)}{n} x_0\, (1+n)\, y_0$

$= \frac{1}{2}\ \frac{(1+n)^2}{n}\ x_0\ \frac{a^n}{x_0^n}$ ((x_0, y_0) એ વક્ર પરનું બિંદુ છે.)

$= \frac{1}{2}\ a^n\ \frac{(1+n)^2}{n}\ \frac{1}{x_0^{n-1}}$

આ ક્ષેત્રફળ અચળ હોય તો $x_0^{\,n-1} = 1$

$\therefore$ $n - 1 = 0.$ આથી $n = 1$ **જવાબ :** (D)

(215) જો વિધેય $y = 1 + a^2x - x^3$ જે બિંદુએ ન્યૂનતમ હોય તે અસમતા $\frac{x^2+x+2}{x^2+5x+6} \le 0$ નું સમાધાન કરે તો પ્રચલ a ની કિંમત ...... ગણમાં હોય.

(A) $\emptyset$ (B) $(-3\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ (C) $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ (D) $(-3\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$

ઉકેલ : $y = 1 + a^2x - x^3$

$\therefore \frac{dy}{dx} = a^2 - 3x^2$. આથી $a^2 - 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$. આથી $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ માટે y ને ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે.

હવે, કોઈ પણ $x \in R$ માટે, $x^2 + x + 2 > 0$

$\therefore \frac{x^2+x+2}{x^2+5x+6} \le 0 \quad \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 < 0$

$\therefore x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ માટે, $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 - 5\frac{a}{\sqrt{3}} + 6 < 0$

$\therefore a^2 - 5\sqrt{3}a + 18 < 0$

$\therefore (a - 2\sqrt{3})(a - 3\sqrt{3}) < 0$

$\therefore a \in (2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ **જવાબ :** (C)

(216) a ની કઈ કિંમત માટે $f(x) = -\left(\frac{b^2-ab-2}{b^2-3b+4}+1\right)x^5 - 3x + \log 5$, $b \in R$ એ R પર ઘટતું વિધેય થાય ?

(A) $(-1, 2)$ (B) $(0, 7)$ (C) $[-7, 1]$ (D) $(2, 7)$

ઉકેલ : $f(x) = -\left(\frac{b^2-ab-2}{b^2-3b+4}+1\right)x^5 - 3x + \log 5$

$f'(x) = -\left(\frac{b^2-ab-2}{b^2-3b+4}+1\right) 5x^4 - 3$

જો f એ R પર ઘટતું વિધેય હોય, તો $f'(x) \le 0, \quad \forall x \in R$

$\therefore -\left(\frac{b^2-ab-2}{b^2-3b+4}+1\right) \le 0$

$\therefore \left(\frac{b^2-ab-2}{b^2-3b+4}+1\right) \ge 0$

$\therefore \frac{2b^2-b(3+a)+2}{b^2-3b+4} \ge 0$

$\therefore\ b^2 - 3b + 4 > 0$ અને $2b^2 - b\,(3 + a) + 2 \geq 0$

$\Rightarrow (3 + a)^2 - 4\,(2)\,(2) \leq 0$ $\qquad (\Delta \leq 0)$

$\Rightarrow 9 + a^2 + 6a - 16 \leq 0$

$\Rightarrow a^2 + 6a - 7 \leq 0$

$\Rightarrow (a + 7)\,(a - 1) \leq 0$

$\Rightarrow a \in [-7, 1]$ **જવાબ** : (C)

(217) સંયોજિત વિધેય $f_1\,(f_2\,(f_3\,(...(f_n\,(x)))$ એ ઘટતું વિધેય છે અને n વિધેયોમાંથી r વિધેય ઘટતાં વિધેય છે તથા બાકીના વધતાં વિધેય છે. $r(n-r)$ નું મહત્તમ મૂલ્ય કેટલું થાય ?

(A) $\frac{n^2-4}{4}$, $n = 4k,\ k \in \text{N}$ (B) $\frac{n^2}{4}$, n યુગ્મ સંખ્યા હોય.

(C) $\frac{n^2-1}{4}$, n અયુગ્મ સંખ્યા હોય. (D) $\frac{n^2}{4}$, $n = 4k + 2,\ k \in \text{N}$

ઉકેલ : ધારો કે $g(x) = f_1\,(f_2\,(f_3\,(...(f_n\,(x)))$

$g(x)$ એ ઘટતું વિધેય છે. આથી $g'(x) < 0$

હવે, $g'(x) = f'_1\,(f_2\,(f_3\,(...(f_n\,(x))) \times f'_2\,(f_3\,(...(f_n\,(x))....) \times (f'_{n-1}\,(f_n(x)) \times f'_n\,(x)$

$g'(x) < 0$ હોવાથી ઉપરના n પદમાંથી અયુગ્મ સંખ્યાના પદની કિંમત ઋણ થશે.

આપેલ છે કે r વિધેયો ઘટતાં વિધેયો છે.

$\therefore$ r અયુગ્મ થશે. આપણે $r\,(n - r)$ નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધવું છે.

ધારો કે $\text{P}(r) = rn - r^2,\ 0 < r \leq n$

$\therefore\ \text{P}'(r) = n - 2r$, અને $\text{P}''(r) = -2$

$\therefore\ r = \frac{n}{2}$ માટે $\text{P}\,(r)$ નું મૂલ્ય મહત્તમ થશે.

આપણે નોંધીએ કે r એ અયુગ્મ છે. આપણે જુદા જુદા વિકલ્પનો વિચાર કરીએ.

વિકલ્પ 1 : (a) $n = 4m + 2,\ m \in \text{N}$

આ વિકલ્પમાં $r = \frac{n}{2}$ એ અયુગ્મ થશે.

$\therefore\ \text{P}\,(r) = \frac{n^2}{4}$

વિકલ્પ 1 : (b) $n = 4m,\ m \in \text{N}$

આ વિકલ્પમાં $\frac{n}{2}$ એ અયુગ્મ થશે નહિ.

$\therefore$આપણે $\frac{n}{2}$ પહેલા અથવા $\frac{n}{2}$ પછીનો વિચાર કરીએ.

$r = \frac{n}{2} - 1$ અથવા $r = \frac{n}{2} + 1$

બંને રીતે $\text{P}\,(r) = \frac{n^2-4}{4}$

વિકલ્પ 2 : n એ અયુગ્મ હોય.

આપણે $r = \frac{n+1}{2}$ નો વિચાર કરીએ

$\text{P}\,(r) = \frac{n^2-1}{4}$ **જવાબ** : (A), (C), (D)

(218) જો વક્ર $4x^2 + a^2y^2 = 4a^2$, $4 < a^2 < 8$ પરનું બિંદુ (u, v)એ બિંદુ $(0, -2)$થી સૌથી દૂરનું બિંદુ હોય તો $u + v$ = ...

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 8

ઉકેલ : અહીં, $4x^2 + a^2y^2 = 4a^2$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$

ધારો કે $(u, v) = (a\, cos\, \theta, 2\, sin\, \theta)$ એ આપેલ વક્ર પરનું બિંદુ છે. બિંદુ $(0, -2)$. થી અંતર

$f(\theta) = a^2 cos^2 \theta + (2\, sin\, \theta + 2)^2$

$f'(\theta) = 0 \Rightarrow 2a^2 cos\theta(-\, sin\, \theta) + 8(sin\, \theta + 1)\, cos\theta = 0$

$\therefore cos\, \theta\, \{(8 - 2a^2)\, sin\, \theta + 8\} = 0$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$ અથવા $sin\, \theta = \frac{4}{a^2 - 4}$

હવે, $4 < a^2 < 8$

$\therefore 0 < a^2 - 4 < 4.$ આથી $0 < \frac{a^2 - 4}{4} < 1$

$\therefore \frac{4}{a^2 - 4} > 1.$ પરંતુ $sin\, \theta \le 1$ આથી $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ વક્ર પરનું બિંદુ $(0, 2)$ આથી $u + v = 0 + 2 = 2$ **જવાબ :** (A)

(219) ધારો કે $f : [0, 1]$ એ R પરનું વિધેય છે તથા તે દ્વિતીય વિકલિત ધરાવે છે. વળી, $f(0) = f(1) = 0$ તથા $f''(x) - 2f'(x) + f(x) \ge e^x$ જો વિધેય $e^{-x} f(x)$ એ અંતરાલ $[0, 1]$ માં $x = \frac{1}{4}$ આગળ ન્યૂનતમ હોય, તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ?

(A) $f'(x) < f(x)$, $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$ (B) $f'(x) > f(x)$, $0 < x < \frac{1}{4}$

(C) $f'(x) < f(x)$, $0 < x < \frac{1}{4}$ (D) $f'(x) < f(x)$, $\frac{3}{4} < x < 1$

ઉકેલ : ધારો કે, $g(x) = e^{-x} f(x)$

$\therefore g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$

$\therefore g''(x) = e^{-x}(f''(x) - 2f'(x) + f(x))$

આપેલ છે કે $(f''(x) - 2f'(x) + f(x)) \ge e^x$, $x \in [0, 1]$

$\therefore e^{-x}(f''(x) - 2f'(x) + f(x)) \ge 1$

$\therefore g''(x) \ge 1 > 0$

$\therefore g'(x)$ એ વધતું વિધેય છે.

$0 < x < \frac{1}{4} \Rightarrow g'(x) < g'\left(\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow e^{-x}(f'(x) - f(x)) < 0$

$\Rightarrow f'(x) < f(x)$

$\therefore f'(x) < f(x)$, $0 < x < \frac{1}{4}$ **જવાબ :** (C)

(220) વિધેય $f(x) = 2|x| + |x + 2| - \left||x + 2| - 2|x|\right|$ ને x ની કઈ કિંમત માટે સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે ?

(A) -2 (B) $-\frac{2}{3}$ C) 2 (D) $\frac{2}{3}$

ઉકેલ : $y = 2|x| + |x + 2| - \left||x+2|-2|x|\right|$

વિકલ્પ 1 : $x < -2$. આથી $x < 2$. આથી $x - 2 < 0$

$\therefore y = -2x - x - 2 - |-x - 2 + 2x| = -2x - x - 2 - |x - 2| = -3x - 2 - 2 + x$

આથી $y = -2x - 4$ (1)

વિકલ્પ 2 : $y = -2x + x + 2 - | x + 2 + 2x |$ $-2 < x < 0$

$y = -x + 2 - |3x + 2|$

જો $-2 \leq x < -\frac{2}{3}$ તો $y = 2x + 4$ (2)

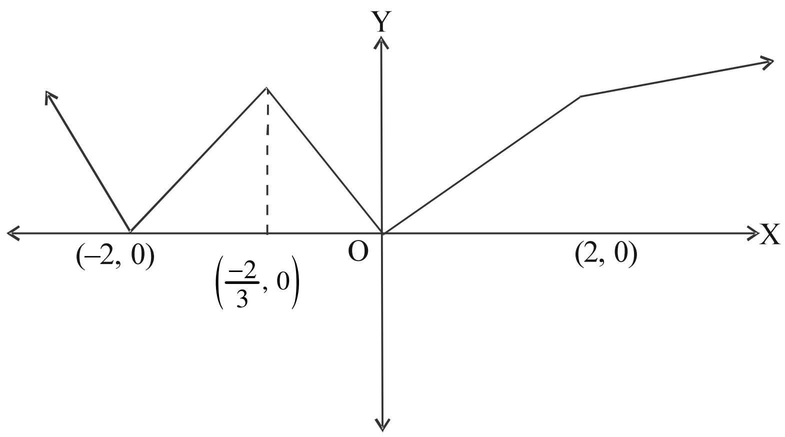
તથા જો $-\frac{2}{3} < x < 0$ તો $y = -4x$ (3)

વિકલ્પ 3 : $y = 2x + x + 2 - | x + 2 - 2x |$ $x \geq 0$

$y = 3x + 2 - |x - 2|$

જો $0 \leq x < 2$ તો $y = 4x$ (4)

જો $x \geq 2$ તો $y = 2x + 4$ (5)



આકૃતિ 15.12

આલેખ પરથી જોઈ શકાય છે કે, $x = -2, 0$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ તથા $x = -\frac{2}{3}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે.

જવાબ : (A), (B)

(221) વક્ર $y^2 = 8x$ અને $xy = -1$ ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ ...... છે.

(A) $3y = 9x + 2$ (B) $y = 2x + 1$ (C) $2y = x + 8$ (D) $y = x + 2$

ઉકેલ : વક્ર $xy = -1$ પરના બિંદુનું સ્વરૂપ $\left(t, -\frac{1}{t}\right)$ પ્રકારનું હોય.

હવે, $y = -\frac{1}{x}$. આથી $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(t, -\frac{1}{t})} = \frac{1}{t^2}$

$\therefore$ વક્ર $xy = -1$ પરના બિંદુ $\left(t, -\frac{1}{t}\right)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$$y + \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}(x - t) \quad \text{એટલે કે} \quad y = \frac{1}{t^2}x - \frac{2}{t} \qquad (1)$$

જો આ રેખા વક્ર $y^2 = 8x$ નો પણ સ્પર્શક હોય, તો તે $y = mx + \frac{2}{m}$ સ્વરૂપમાં હોય. ($a = 2$)

$\therefore m = \frac{1}{t^2}, \frac{2}{m} = -\frac{2}{t}$. આથી $m = -t$. આથી $-t = \frac{1}{t^2} \Rightarrow t = -1$

$\therefore$ બંને વક્રના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ (1) પરથી, $y = x + 2$ **જવાબ :** (D)

(222) $y = \frac{b^2}{a-x} + \frac{a^2}{x}, 0 < x < a, a, b > 0$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે.

(A) $\frac{a+b}{a}$ (B) $\frac{ab}{a+b}$ (C) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (D) $\frac{(a+b)^2}{a}$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2}{(a-x)^2}(-1) - \frac{a^2}{x^2}$. $\frac{dy}{dx} = 0$ લેતાં.

$\therefore bx = a^2 - ax$ અથવા $a^2 - ax = -bx$ $\quad (0 < x < a, \; a,b > 0)$

$\therefore x = \frac{a^2}{a+b}$ $\quad (0 < x < a)$ આથી $a - x = \frac{ab}{a+b}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2}{x^3} + \frac{2b^2}{(a-x)^3} \quad \text{આથી} \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x = \frac{a^2}{a+b}} > 0$$

$\therefore x = \frac{a^2}{a+b}$ આગળ y ન્યૂનતમ હોય.

$$\therefore y_{min} = \frac{b^2(a+b)}{ab} + \frac{a^2(a+b)}{a^2} = (a+b)\left[\frac{b}{a}+1\right] = \frac{(a+b)^2}{a}$$ **જવાબ :** (D)

(223) ધારો કે P(x) એ ચાર ઘાતવાળી બહુપદી છે તથા $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{P(x)}{x^2}\right) = 2$. જો P($x$) ને $x = 1, 2$ આગળ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ અસ્તિત્વ ધરાવે તો P(2) = ...

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{P(x)}{x^2}\right) = 2$. આથી $\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x^2} = 1$

ધારો કે $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x^2} = 1$ હોવાથી, $a_3 = a_4 = 0$ તથા $a_2 = 1$

$\therefore P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + x^2$

વળી, P(x) ને $x = 1, 2$ આગળ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મળે છે. આથી $P'(1) = P'(2) = 0$

$P'(x) = 4a_0x^3 + 3a_1x^2 + 2x$

$\therefore\ 4a_0 + 3a_1 = -2$ અને $\quad 32a_0 + 12a_1 = -4$

આ બંને સમીકરણ ઉકેલતાં $a_0 = \frac{1}{4},\ a_1 = -1$

$\therefore\ P(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$. આથી $P(2) = \frac{1}{4}\ 16 - 8 + 4 = 0$ **જવાબ :** (A)

(224) ધારો કે $g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) + f(1-x)$ અને $0 \le x \le 1$ માટે અને $f''(x) < 0$ તો $g(x)$ એ

(A) $\left[0, \frac{2}{3}\right)$માં ઘટતું વિધેય છે. (B) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$માં ઘટતું વિધેય છે.

(C) $\left(0, \frac{2}{3}\right)$માં વધતું વિધેય છે. (D) $\left(\frac{2}{3}, 1\right]$ માં વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : આપેલ છે કે $f''(x) < 0$. આથી $f'(x)$ એ ઘટતું વિધેય છે.

હવે, $g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) + f(1-x)$

$\therefore\ g'(x) = f'\left(\frac{x}{2}\right) - f'(1-x)$

જો $g(x)$ એ વધતું વિધેય હોય તો $g'(x) > 0$

$\therefore\ f'\left(\frac{x}{2}\right) > f'(1-x)$. આથી $\frac{x}{2} < 1 - x$. આથી $x < \frac{2}{3}$ **જવાબ :** (B), (C)

(225) વિધેય $f : R \to R$ માટે $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ અને $f(1) > 0$. વળી, $h(x) > f(x)\, f^{-1}(x)$. $h\,(sinx + cosx)$ ચુસ્ત રીતે વધતું હોય તેવા મોટામાં મોટા અંતરાલની લંબાઈ ...... છે.

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

ઉકેલ : $f(x)f(y) - f(xy) = x + y,\ \forall\ x, y \in R$

$x = 1, y = 1$ લેતાં, $(f(1))^2 - f(1) - 2 = 0$ (1)

$\therefore (f(1) - 2)\,(f(1) + 1) = 0$

વળી, $f(1) > 0$. આથી $f(1) = 2$

(1) માં $y = 1$ મૂકતાં, $f(x) \cdot 2 - f(x) = x + 1$

$\therefore f(x) = x + 1$ આથી $f^{-1}(x) = x - 1$

$\therefore h(x) = f(x)\, f^{-1}(x) = x^2 - 1$

$h(sin\ x + cos\ x) = (sin\ x + cos\ x)^2 - 1 = sin\ 2x$

આપણે જાણીએ છીએ કે $sin\ x$ ચુસ્ત રીતે વધતું હોય તેવા મોટામાં મોટા અંતરાલની લંબાઈ π છે.

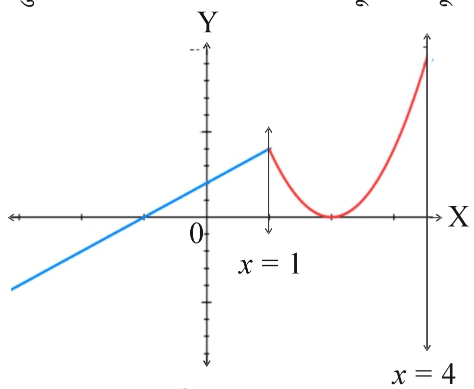
$\therefore\ sin\ 2x$ માટે માંગેલ અંતરાલની લંબાઈ $\frac{\pi}{2}$ થાય. **જવાબ :** (C)

નિષ્કર્ષ કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

(226) **વિધાન 1 :** $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & , -4 \le x < 1 \\ 4x^2 - 16x + 16, & 1 \le x \le 4 \end{cases}$ નું મહત્તમ મૂલ્ય 4 છે.

વિધાન 2 : જો વિધેય કોઈ બિંદુ આગળ વિકલનીય ન હોય, તો તે બિંદુ આગળ પણ તેને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળી શકે.

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} 2(x+1); & -4 \le x < 1 \\ 4(x-2)^2; & 1 \le x \le 4 \end{cases}$



આકૃતિ 15.13

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ જોઈ શકાય છે કે $f(x)$ ને $x = 1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે પણ $x = 4$ આગળ તેને વૈશ્વિક મહત્તમ મળશે અને તે 16 છે.

વિધાન 1 : સત્ય નથી.

વિધાન 2 : સત્ય છે. f એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

(227) **વિધાન 1 :** સમીકરણ $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ નું એક બીજ 2 અને 3 વચ્ચે આવેલ છે.

વિધાન 2 : જો સતત વિધેય f માટે $f(a)$ અને $f(b)$ ભિન્ન ચિહ્નવાળા હોય તો $f(x) = 0$ નું ઓછામાં ઓછું એક બીજ a અને b વચ્ચે મળે.

ઉકેલ : **વિધાન 1 :** $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1,\ f(2) = -1 < 0, f(3) = 8 > 0$

$\therefore f(2)$ અને $f(3)$ નાં ભિન્ન ચિહ્ન છે.

વળી, $f(x)$ એ સતત વિધેય છે.

$\therefore f$ ને ઓછામાં ઓછું એક બીજ 2 અને 3 વચ્ચે મળે જ.

વિધાન 2 સત્ય છે.

વિધાન 1 એ **વિધાન 2** પર આધારિત છે. **જવાબ :** (A)

(228) $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & -1 \le x < 0 \\ 2^x, & x = 0 \\ 2^x - 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$

વિધાન 1 : વિધેય f સીમિત છે પરંતુ તે મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવતું નથી.

વિધાન 2 : f એ $x = 0$ આગળ અસતત છે.

ઉકેલ : અંતરાલ $[-1, 0)$ પર વિધેયનું મૂલ્ય $\frac{3}{2}$ થી 2 સુધી વધે છે. અને $(0, 1]$ પર વિધેયનું મૂલ્ય 0 થી 1 સુધી વધે છે.

વિધેય f એ મૂલ્ય 0 કે 2 ધરાવતું નથી.

વિધેય f એ સીમિત છે પરંતુ તે મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવતું નથી.

વિધેય f એ $x = 0$ આગળ અસતત હોવાથી આમ થાય છે.

વિધાન 1 અને **વિધાન 2** સત્ય છે. **વિધાન 1** એ **વિધાન 2** પર આધારિત છે. **જવાબ :** (A)

(229) ધારો કે $f(x) = tan^{-1} x$ અને $g(x) = x - \frac{x^3}{6}$

વિધાન 1 : $f(x) < g(x)$ $(0 < x < 1)$

વિધાન 2 : $h(x) = tan^{-1} x - x + \frac{x^3}{6}$ એ [0, 1] પર ઘટતું વિધેય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $h(x) = tan^{-1} x - x + \frac{x^3}{6}$

$\therefore\ h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{2-2(1+x^2)+(1+x^2)x^2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}$

જો $x \in [0, 1]$ હોય તો $x^2 - 1 \le 0$

$\therefore\ h'(x) \le 0$

$\therefore$ h એ [0, 1] પર ઘટતું વિધેય છે. વિધાન 2 સત્ય છે.

વળી, $0 < x \le 1$

$\therefore\ h(0) > h(x)$. આથી $h(x) < 0$

$\therefore\ tan^{-1} x - x + \frac{x^3}{6} < 0$. આથી $tan^{-1} x < x - \frac{x^3}{6}$

$\therefore\ f(x) < g(x)$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે. વિધાન 1 એ વિધાન 2 પર આધારિત છે. **જવાબ :** (A)

(230) **વિધાન 1 :** $e^{\pi} > \pi^{e}$

વિધાન 2 : વિધેય $x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ ને $x = e$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ આથી $\log f(x) = \frac{\log x}{x}$

$\therefore\ \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x.\frac{1}{x} - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$

$\therefore\ f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1-\log x}{x^2}\right)$

જો $x > e$ તો $f'(x) < 0$ અને જો $0 < x < e$ તો $f'(x) > 0$

$\therefore$ f ને $x = e$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મળે.

વિધાન 2 સત્ય છે.

વળી, $\pi > e$ અને f એ (e, ∞) પર ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore\ f(\pi) < f(e) \Rightarrow \pi^{\frac{1}{\pi}} < e^{\frac{1}{e}} \Rightarrow \pi^{e} < e^{\pi}$

$\therefore$ **વિધાન 1** સત્ય છે.

વિધાન 1 એ **વિધાન 2** પર આધારિત નથી. **જવાબ :** (B)

(231) **વિધાન 1 :** $|tan\ x - tan\ y| < |x - y|,\ \forall\ x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

વિધાન 2 : જો વિધેય f એ કોઈક વિવૃત્ત અંતરાલ પર વિકલનીય હોય તથા $|f'(x)| \leq M$ તો

$|f(x) - f(y)| \leq M\ |x - y|$

ઉકેલ : વિધેય f માટે અંતરાલ $[x, y]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં કોઈક $c \in (x, y)$ એવો મળે કે જેથી

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$$

$|f(y) - f(x)| = |f'(c)|\ |y - x| \leq M\ |y - x|$ $\qquad (|f'(x)| \leq M)$

વિધાન 2 સત્ય છે.

જો $|f'(x)| \geq M$ હોય તો $|f(y) - f(x)| \geq M\ |y - x|$

$\therefore$ $f(x) = tan\ x$ મૂકતાં, $f'(x) = sec^2\ x.$ આથી $|f'(x)| \geq 1$

$\therefore$ $|tan\ x - tan\ y| \geq |y - x|$

$\therefore$ **વિધાન 1** સત્ય નથી. **જવાબ :** (D)

•