

અગત્યના મુદ્દાઓ અને સૂત્રો

- જથ્થા (રાશિ)ના પ્રકાર : મુખ્યત્વે બે પ્રકારની રાશિ હોય છે - અદિશ રાશિ અને સદિશ રાશિ.
- અદિશ રાશિ : જે રાશિને ફક્ત માન(માપ) હોય છે. પરંતુ દિશા હોતી નથી તેવી રાશિને અદિશ રાશિ કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે ઝડપ, દળ, ઘનતા, ઘનફળ, ઉષ્ણતામાન વગેરે.
- સદિશ રાશિ : જે રાશિને માન અને દિશા બંને હોય છે તેવી રાશિને સદિશ રાશિ કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે વેગ, પ્રવેગ, સ્થાનાંતર વગેરે.

સદિશનું નિરૂપણ :

જેનું આરંભબિંદુ અને અંતિમબિંદુ નિશ્ચિત હોય તેવા દિશાયુક્ત રેખાખંડથી સદિશનું નિરૂપણ થાય છે. જો P આરંભબિંદુ

હોય અને Q અંતિમબિંદુ હોય, તો સદિશ ને $\overrightarrow{PQ}$ વડે દર્શાવાય છે. PQ ને તેની લંબાઈ અથવા માપ અથવા માન કહે છે.

$$\overrightarrow{PQ} \text{નું માન } |\overrightarrow{PQ}| = PQ.$$

● સદિશના પ્રકાર :

(1) શૂન્ય સદિશ : જે સદિશનું માન શૂન્ય હોય એટલે કે આરંભબિંદુ અને અંતિમબિંદુ સમાન હોય, તેવા સદિશને શૂન્ય સદિશ કહે છે. તેને $\vec{0}$ વડે દર્શાવાય છે.

(2) સમાન સદિશ : જે બે સદિશોનાં માન અને દિશા સમાન હોય, તેવા સદિશોને સમાન સદિશો કહે છે.

(3) એકમ સદિશ : જે સદિશનું માન એક એકમ હોય તેને એકમ સદિશ કહે છે. $\vec{x}$ ની દિશાના એકમ સદિશને $\hat{x}$ વડે દર્શાવાય છે. જો $\vec{x}$ શૂન્યેતર સદિશ હોય, તો $\vec{x}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ $\hat{x} = \frac{1}{|\vec{x}|} \vec{x}$.

(4) સમદિશ સદિશ : જે શૂન્યેતર સદિશોની દિશા સમાન હોય, તેવા સદિશોને સમદિશ સદિશ કહે છે.

સદિશો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ માટે જો કોઈ અદિશ $k > 0$ હોય કે જેથી $\vec{x} = k\vec{y}$ તો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ સમદિશ સદિશ છે.

(5) વિરુદ્ધ દિશાના સદિશ : જો કોઈ બે શૂન્યેતર સદિશોની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય, તો તેવા સદિશોને વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો કહે છે.

જો $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$ માટે $\vec{x} = k\vec{y}$ જ્યાં $k < 0$ તો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો બને.

આમ, સમદિશ સદિશો અને વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો સમાંતર સદિશો કહેવાય.

(6) સમરેખ સદિશો : જો બે શૂન્યેતર સદિશોની દિશા સમાન અથવા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય, તો તેમને સમરેખ સદિશો કહે છે.

(7) ભિન્ન દિશાના સદિશો : જો બે શૂન્યેતર સદિશોની દિશા સમાન કે પરસ્પર વિરુદ્ધ ન હોય તેવા સદિશોને ભિન્ન દિશાના સદિશો કહે છે. જો $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$ અને પ્રત્યેક શૂન્યેતર $k \in \mathbb{R}$ માટે $\vec{x} \neq k\vec{y}$ થાય, તો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ ને ભિન્ન દિશાના સદિશો કહે છે.

(8) ઋણ સદિશ : આપેલ સદિશના માન જેટલા જ માનવાળા પરંતુ તેનાથી વિરુદ્ધ દિશાના સદિશને આપેલા સદિશનું ઋણ સદિશ કહે છે.

(9) નિયત સદિશ : જે સદિશનું આરંભબિંદુ ઊગમબિંદુ છે, તેવા સદિશને નિયત સદિશ કહે છે.

(10) મુક્ત સદિશ : જે સદિશનું આરંભબિંદુ ઊગમબિંદુ સિવાયનું કોઈ પણ બિંદુ છે તે સદિશને મુક્ત સદિશ કહે છે.

(11) સ્થાન સદિશ : જો O ઊગમબિંદુ હોય, તો P નો સ્થાન સદિશ $\vec{OP}$ છે. જો બિંદુઓ A અને B ના સ્થાન

સદિશ અનુક્રમે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તો $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ થાય.

ઊગમબિંદુનો સ્થાન સદિશ $\vec{0}$ ગણાય.

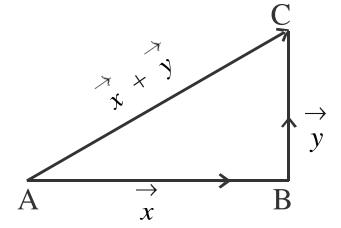
(12) સદિશોનો સરવાળો : બે સદિશો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ ના સરવાળાનો સદિશ $\vec{x} + \vec{y}$ છે. તે $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ નું પરિણામી સદિશ છે.

સદિશોના સરવાળા માટેના નિયમો :

(1) ત્રિકોણનો નિયમ : જો આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\vec{AB} = \vec{x}$ અને

$\vec{BC} = \vec{y}$ ત્રિકોણની કમિક બાજુઓ હોય, તો ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુ $\vec{AC}$

એ $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ ના સરવાળા $\vec{x} + \vec{y}$ નું સદિશ છે. આ નિયમને સદિશોનો સરવાળાનો ત્રિકોણનો નિયમ કહે છે.



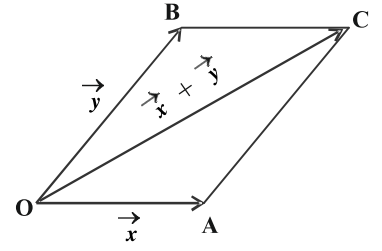
આકૃતિ 20.1

(2) સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ : જો સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ OACB

ની પાસ-પાસેની બાજુઓ $\vec{OA} = \vec{x}$ અને $\vec{OB} = \vec{y}$ હોય, તો બંને

સદિશના સામાન્ય આરંભબિંદુ O માંથી દોરેલ વિકર્ણ $\vec{OC}$ એ $\vec{x}$ અને

$\vec{y}$ નો સરવાળો દર્શાવે છે. આમ, $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{x} + \vec{y}$

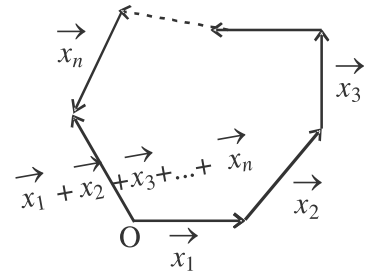


આકૃતિ 20.2

(3) બહુકોણનો નિયમ : જો બહુકોણની $n - 1$ બાજુઓ કમિક સદિશો

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_{n-1}$ દર્શાવે, તો બહુકોણની n મી બાજુ આ સદિશોના

સરવાળા $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \dots + \vec{x}_{n-1}$ નું સદિશ દર્શાવશે.



આકૃતિ 20.3

સદિશના ઘટકો :

આપણે $\hat{i}$ ને X-અક્ષની ધન દિશાના, $\hat{j}$ ને Y-અક્ષની ધન દિશાના અને $\hat{k}$ ને Z-અક્ષની ધન દિશાના એકમ સદિશ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીશું. R^3 ના કોઈ પણ બિંદુ $P(x_1, x_2, x_3)$ નો સ્થાન સદિશ $\vec{x}$ છે.

જ્યાં $\vec{x} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$. અહીં $x_1 \hat{i}$, $x_2 \hat{j}$ અને $x_3 \hat{k}$ એ સદિશ $\vec{x}$ ના અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ

અને Z-અક્ષ પરના પ્રક્ષેપ સદિશ છે. x_1, x_2, x_3 ને $\vec{x}$ ના અદિશ ઘટકો તથા $x_1 \hat{i}, x_2 \hat{j}, x_3 \hat{k}$ ને $\vec{x}$ ના સદિશ ઘટકો કહે છે.

સદિશ $\vec{x}$ નું માન $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ વડે વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

સદિશોનું સુરેખ સંયોજન :

જો $\vec{r} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$ થાય, તો $\vec{r}$ ને સદિશો $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ નું સુરેખ સંયોજન કહે છે, જ્યાં a, b, c વાસ્તવિક અચળાકો છે.

સદિશોનું અંતગુણન (અદિશ ગુણાકાર અથવા ડોટ પ્રોડક્ટ) :

જો $\vec{r} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j}$ અને $\vec{y} = y_1\hat{i} + y_2\hat{j}$ એ R^2 ના સદિશો હોય તો તેમનું અંતગુણન (ડોટ પ્રોડક્ટ) $x_1y_1 + x_2y_2$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે તથા તેને $\vec{x} \cdot \vec{y}$ વડે દર્શાવાય છે.

$$\text{આમ } \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2$$

તે જ પ્રમાણે જો $\vec{x} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$ અને $\vec{y} = y_1\hat{i} + y_2\hat{j} + y_3\hat{k}$ એ R^3 ના સદિશ હોય, તો $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ થાય.

અંતગુણનના ગુણધર્મો :

(1) અંતગુણન અદિશ રાશિ છે તેથી તેને અદિશ ગુણાકાર પણ કહે છે.

$$(2) \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0 \text{ અને } \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$(3) \vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$$

$$(4) \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

$$(5) \vec{x} \cdot (k\vec{y}) = (k\vec{x}) \cdot \vec{y} = k(\vec{x} \cdot \vec{y}) \text{ જ્યાં } k \in R$$

$$(6) \vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$$

$$(7) \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$(8) \hat{i} \cdot \hat{j} = 0, \hat{j} \cdot \hat{k} = 0, \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

$$(9) \text{કોશી-સ્વાર્ત્ઝની અસમતા : } |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$$

શૂન્યેતર સદિશો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ માટે,

$$(i) |\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| \Leftrightarrow \vec{x} \text{ અને } \vec{y} \text{ સમદિશ અથવા વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો છે.}$$

$$(ii) |\vec{x} \cdot \vec{y}| < |\vec{x}| |\vec{y}| \Leftrightarrow \vec{x} \text{ અને } \vec{y} \text{ ભિન્ન દિશાના સદિશો છે.}$$

$$(10) \text{ત્રિકોણીય અસમતા : } |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

$\vec{x}$ અને $\vec{y}$ શૂન્યેતર સદિશો હોય, તો

$$(i) |\vec{x} + \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}| \Leftrightarrow \vec{x} \text{ અને } \vec{y} \text{ સમદિશ છે.}$$

$$(ii) |\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}| \Leftrightarrow \vec{x} \text{ અને } \vec{y} \text{ વિષમદિશ અથવા ભિન્ન દિશાના સદિશો છે.}$$

નોંધ : (1) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2$

(2) $|\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(3) $|\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2(\vec{x} \cdot \vec{y})$

કાર્ય : કોઈ પણ બળ હેઠળ થયેલ કાર્ય એ અદિશ રાશિ છે. થયેલ કાર્ય $w = \vec{F} \cdot \vec{d}$ જ્યાં $\vec{d}$ એ પદાર્થનું નિશ્ચિત દિશામાં બળ $\vec{F}$ દ્વારા સ્થાનાંતર સૂચવે છે.

સદિશોનું બહિર્ગુણન અને તેના ગુણધર્મો

સદિશો $\vec{x} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$ અને $\vec{y} = y_1 \hat{i} + y_2 \hat{j} + y_3 \hat{k}$ એ R^3 ના સદિશો હોય, તો તેમનું બહિર્ગુણન (કોસ પ્રોડક્ટ) $(x_2 y_3 - x_3 y_2) \hat{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \hat{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \hat{k}$ થાય. તેને $\vec{x} \times \vec{y}$ વડે દર્શાવાય છે.

સદિશોના બહિર્ગુણનને નિશ્ચાયક સ્વરૂપમાં $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ રીતે પણ ગણતરી કરીને મેળવી શકાય.

ગુણધર્મો :

(1) બહિર્ગુણન એ સદિશ રાશિ છે તેથી તેને સદિશ ગુણાકાર પણ કહે છે. (2) $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$

(3) $\vec{x} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{x} = \vec{0}$ (4) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

(5) $\vec{x} \times (k \vec{y}) = (k \vec{x}) \times \vec{y} = k(\vec{x} \times \vec{y})$ જ્યાં, $k \in R$ (6) $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

(7) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$ (8) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

● નોંધ : (i) બહિર્ગુણન એ R^2 માં વ્યાખ્યાયિત નથી.

(ii) જો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ સમરેખ સદિશ હોય, તો $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ એટલે કે $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ જ્યાં

$\vec{x} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$ અને $\vec{y} = y_1 \hat{i} + y_2 \hat{j} + y_3 \hat{k}$.

ડોટ અને કોસ પ્રોડક્ટ વચ્ચેનો સંબંધ :

$|\vec{x} \times \vec{y}|^2 + |\vec{x} \cdot \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2$ આ સંબંધને લાગ્રાન્જ નિત્યસમ કહે છે.

ચાર સદિશોનું અંતઃગુણન : જો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ અને $\vec{d}$ ચાર સદિશ હોય, તો તેમનું અંતઃગુણન

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$ થાય.

સદિશોનું અદિશ ત્રિગુણન (પેટીગુણન) અને તેના ગુણધર્મો :

જો $\vec{x}, \vec{y}$ અને $\vec{z}$ એ R^3 ના સદિશો હોય, તો અદિશ $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$ ને સદિશો $\vec{x}, \vec{y}$ અને $\vec{z}$ નું અદિશ ત્રિગુણન અથવા પેટીગુણન (બોક્સ પ્રોડક્ટ) કહે છે, તેને $[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]$ વડે દર્શાવાય છે. બોક્સ પ્રોડક્ટ અદિશ છે.

સદિશોનું પેટીગુણન $[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = D$ જ્યાં $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

(1) સમાંતર ફલકના કોઈ એક શિરોબિંદુમાંથી નીકળતી ધારોના સદિશ $\vec{x}$, $\vec{y}$ અને $\vec{z}$ હોય, તો સમાંતર ફલકનું

$$\text{ઘનફળ } [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] \text{નું માનક થાય એટલે કે } V = |[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]|$$

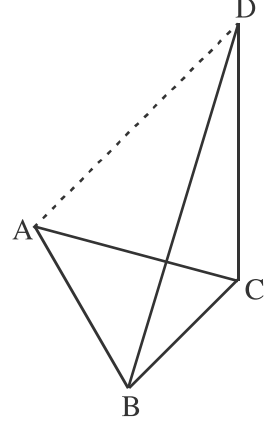
(2) ચતુષ્ફલકના કોઈ એક શિરોબિંદુમાંથી નીકળતી ધારોના સદિશ જો $\vec{x} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$

$$\vec{y} = y_1 \hat{i} + y_2 \hat{j} + y_3 \hat{k}, \vec{z} = z_1 \hat{i} + z_2 \hat{j} + z_3 \hat{k}$$

$$\text{તો ચતુષ્ફલકનું ઘનફળ} = \frac{1}{6} |[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]|$$

જો A, B, C, D એ ચતુષ્ફલકનાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો ચતુષ્ફલકનું ઘનફળ

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AB} \ \vec{AC} \ \vec{AD}]| = \frac{1}{6} |[\vec{BA} \ \vec{BC} \ \vec{BD}]|$$



આકૃતિ 20.4

$$(3) [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = [\vec{y} \ \vec{z} \ \vec{x}] = [\vec{z} \ \vec{x} \ \vec{y}]$$

$$(4) [\vec{x} \ \vec{x} \ \vec{y}] = 0, [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{x}] = 0, [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{y}] = 0$$

$$(5) [k\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = [\vec{x} \ k\vec{y} \ \vec{z}] = [\vec{x} \ \vec{y} \ k\vec{z}] = k[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]; \text{ જ્યાં } k \in \mathbb{R}$$

$$(6) [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{0}] = 0$$

$$(7) [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = -[\vec{y} \ \vec{x} \ \vec{z}] \text{ (જો } [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = k, \text{ તો } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ પૈકી કોઈ પણ બે સદિશોની વૃત્તિય સિવાયની ફેરબદલી કરતાં } -k \text{ મળે.)}$$

$$(8) [\vec{x} \times \vec{y} \ \vec{y} \times \vec{z} \ \vec{z} \times \vec{x}] = [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]^2$$

$$(9) [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]^2 = \begin{vmatrix} \vec{x} \cdot \vec{x} & \vec{x} \cdot \vec{y} & \vec{x} \cdot \vec{z} \\ \vec{x} \cdot \vec{y} & \vec{y} \cdot \vec{y} & \vec{y} \cdot \vec{z} \\ \vec{x} \cdot \vec{z} & \vec{y} \cdot \vec{z} & \vec{z} \cdot \vec{z} \end{vmatrix}$$

$$(10) \text{ જો } |[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]| = |\vec{x}| |\vec{y}| |\vec{z}| \text{ થાય, તો સમાંતર ફલક એ લંબચોરસ ફલક (લંબઘન) બને.}$$

સદિશ ત્રિગુણન :

જો $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ એ $\mathbb{R}^3$ ના સદિશો હોય, તો તેમનું સદિશ ત્રિગુણન

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{z} \text{ થાય.}$$

જો $\vec{r} = \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ તો $\vec{r} \perp \vec{x}$ તથા $\vec{r} \perp (\vec{y} \times \vec{z})$ તથા $\vec{r}$ એ $\vec{y}$ અને $\vec{z}$ ના સમતલમાં આવેલો

સદિશ છે.

$$\text{નોંધ : } (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z}) \vec{x}$$

સમરેખ સદિશો :

આપેલ રેખાને સમાંતર આવેલા સદિશોને સમરેખ સદિશો કહે છે. તેમના માન ભિન્ન હોઈ શકે છે.

શૂન્યેતર સદિશો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ માટે $\vec{x} = k\vec{y}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, તો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ સમરેખ સદિશો થાય.

$\vec{x} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j}$ અને $\vec{y} = y_1 \hat{i} + y_2 \hat{j}$ સમરેખ હોય, તો અને તો જ $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

જો R^3 ના સદિશો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ સમરેખ હોય, તો અને તો જ $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$

$\vec{x}$ અને $\vec{y}$ સમરેખ સદિશ હોય, તો અને તો જ $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}|$

સમતલીય સદિશો

એક જ સમતલમાં આવેલા સદિશોને **સમતલીય સદિશો** કહે છે. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ એ R^3 ના સદિશો છે.

જો $\alpha, \beta, \gamma \in R$ પૈકી ઓછામાં ઓછો એક શૂન્યેતર હોય અને $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \vec{0}$ થાય, તો

$\vec{x}, \vec{y}$, અને $\vec{z}$ ને **સમતલીય અથવા સુરેખ અવલંબી સદિશો** કહે છે.

જો $\vec{x}, \vec{y}$ અને $\vec{z}$ અસમતલીય (સુરેખ સ્વાયત્ત) સદિશો હોય, તો

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \text{ અને } \gamma = 0.$$

જો $\vec{r}$ એ $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ ના સમતલમાં આવેલું હોય, તો $\vec{r} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

R^3 ના ત્રિમ શૂન્યેતર સદિશો $\vec{x}, \vec{y}$ અને $\vec{z}$ સમતલીય હોય, તો અને તો જ $[\vec{x} \vec{y} \vec{z}] = 0$.

- બે શૂન્યેતર સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો : શૂન્યેતર સદિશો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

$$(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \alpha \text{ હોય, તો } \alpha = \cos^{-1} \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}, \alpha \in [0, \pi];$$

પરિણામો :

- જો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ સમદિશ સદિશો હોય, તો $\alpha = 0$
- જો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ વિરુદ્ધ દિશાના સદિશ હોય, તો $\alpha = \pi$
- જો $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ તો અને તો જ $\vec{x} \perp \vec{y}$ એટલે કે $\alpha = \frac{\pi}{2}$
- $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \alpha$
- $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \alpha$
- $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ બંનેને લંબ એકમ સદિશ $\pm \frac{\vec{x} \times \vec{y}}{|\vec{x} \times \vec{y}|}$ છે.

- ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $\Delta = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

- જો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ એ ΔABC ની બાજુઓના સદિશ હોય, તો ΔABC નું ક્ષેત્રફળ

$$\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2}$$

- સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ $ABCD$ ના વિકર્ણ સદિશ $\vec{AC}$ અને $\vec{BD}$ હોય, તો

$$\text{સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ } ABCD \text{નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{BD}|$$

કોણ દ્વિભાજક :

શૂન્યેતર સદિશો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ વચ્ચેનો કોણ દ્વિભાજક સદિશ $\vec{r}$ હોય, તો $\vec{r} = \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|} \right)$ થાય.

સદિશનો પ્રક્ષેપ :

જો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ પરસ્પર લંબ ન હોય તેવા શૂન્યેતર સદિશો હોય, તો

$\vec{x}$ નો $\vec{y}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ $\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|^2} \right) \vec{y}$ થાય. તેને $\text{Proj}_{\vec{y}} \vec{x}$ વડે દર્શાવાય છે. આમ, $\text{Proj}_{\vec{y}} \vec{x} = \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|^2} \right) \vec{y}$

પ્રક્ષેપ સદિશનું માન :

$\frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{|\vec{y}|}$ ને $\vec{x}$ ના $\vec{y}$ પરના પ્રક્ષેપ સદિશનું માન કહે છે.

$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|}$ ને $\vec{x}$ ના $\vec{y}$ પરના પ્રક્ષેપ સદિશનો ઘટક કહે છે. તેને $\text{Comp}_{\vec{y}} \vec{x}$ વડે દર્શાવાય છે.

સદિશની દિક્કોસાઈન, દિક્ખૂણાઓ અને દિક્ગુણોત્તર :

જો શૂન્યેતર સદિશ $\vec{x} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$ એ X -અક્ષ, Y -અક્ષ અને Z -અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે α , β અને γ માપના ખૂણા બનાવે, તો α , β અને γ ને $\vec{x}$ ના દિક્ખૂણાઓ તથા $\cos \alpha$, $\cos \beta$ અને $\cos \gamma$ ને $\vec{x}$ ની દિક્કોસાઈન કહે છે.

$\vec{x} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ અને $m \neq 0$ તો $m \vec{x} = mx_1 \hat{i} + mx_2 \hat{j} + mx_3 \hat{k}$ થશે. mx_1 , mx_2 , mx_3 ને $\vec{x}$ ના દિક્ગુણોત્તર (દિક્સંખ્યાઓ) કહે છે.

- $\cos \alpha = \frac{x_1}{|\vec{x}|}$, $\cos \beta = \frac{x_2}{|\vec{x}|}$ અને $\cos \gamma = \frac{x_3}{|\vec{x}|}$

- $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

- $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$

રેખાખંડનું વિભાજન :

જો બિંદુઓ A અને B ના સ્થાન સદિશ અનુક્રમે $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ હોય અને બિંદુ P($\vec{r}$) એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી

λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો $\vec{r} = \frac{\lambda \vec{y} + \vec{x}}{\lambda + 1}$ થાય. $(\lambda \neq -1)$

● જો $\lambda = m : n$ તો $\vec{r} = \frac{m \vec{y} + n \vec{x}}{m + n}$

● $\overline{AB}$ ના મધ્યબિંદુનો સ્થાન સદિશ $\frac{\vec{x} + \vec{y}}{2}$ થશે.

● જો A($\vec{x}$), B($\vec{y}$) અને C($\vec{z}$) એ $\triangle ABC$ નાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો $\triangle ABC$ ના મધ્યકેન્દ્રનો સ્થાન સદિશ

$\frac{\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}}{3}$ થશે.

● $\triangle ABC$ ના અંતઃકેન્દ્રનો સ્થાન સદિશ $\frac{a \vec{x} + b \vec{y} + c \vec{z}}{a + b + c}$ થાય.

જ્યાં, $a = |\overrightarrow{BC}|$, $b = |\overrightarrow{CA}|$, $c = |\overrightarrow{AB}|$.

સદિશની વ્યસ્ત સંહતિ :

જો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ એ શૂન્યેતર, અસમરેખ અને અસમતલીય સદિશો હોય, તો સદિશો $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ મળે કે

જેથી $\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]}$, $\vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]}$, $\vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]}$ થાય.

સદિશો $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ અને $\vec{c}'$ ને $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ ની વ્યસ્ત સંહતિ કહે છે.

ગુણધર્મો :

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a}' = \vec{b} \cdot \vec{b}' = \vec{c} \cdot \vec{c}' = 1$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b}' = \vec{a} \cdot \vec{c}' = \vec{b} \cdot \vec{a}' = \vec{b} \cdot \vec{c}' = \vec{c} \cdot \vec{a}' = \vec{c} \cdot \vec{b}' = 0$

(3) $[\vec{a}' \ \vec{b}' \ \vec{c}'] = \frac{1}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]}$

(4) $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ અને $\vec{c}'$ એ શૂન્યેતર, અસમરેખ અને અસમતલીય છે.

(5) $\vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}' = \vec{0}$

(6) $\hat{i} = \hat{i}'$, $\hat{j} = \hat{j}'$, $\hat{k} = \hat{k}'$

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) $\vec{a}$ એકમ સદિશ હોય, તો $(\vec{a} \cdot \hat{i})^2 + (\vec{a} \cdot \hat{j})^2 + (\vec{a} \cdot \hat{k})^2 = \dots\dots$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ લેતાં, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$

હવે $\vec{a} \cdot \hat{i} = a_1$, $\vec{a} \cdot \hat{j} = a_2$, અને $\vec{a} \cdot \hat{k} = a_3$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \hat{i})^2 + (\vec{a} \cdot \hat{j})^2 + (\vec{a} \cdot \hat{k})^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

જવાબ : (B)

(2) $\vec{a}$ એકમ સદિશ હોય, તો $|\vec{a} \times \hat{i}|^2 + |\vec{a} \times \hat{j}|^2 + |\vec{a} \times \hat{k}|^2 = \dots\dots$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ લેતાં, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$

તથા $\vec{a} \times \hat{i} = a_3 \hat{j} - a_2 \hat{k}$; $\vec{a} \times \hat{j} = a_1 \hat{k} - a_3 \hat{i}$ અને $\vec{a} \times \hat{k} = a_2 \hat{i} - a_1 \hat{j}$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{a} \times \hat{i}|^2 + |\vec{a} \times \hat{j}|^2 + |\vec{a} \times \hat{k}|^2 &= (a_3^2 + a_2^2) + (a_1^2 + a_3^2) + (a_2^2 + a_1^2) \\ &= 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 2(1) = 2 \end{aligned}$$

જવાબ : (C)

(3) જો $\vec{a}$ એ $\vec{b} = \hat{i}$ સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવે અને $\vec{c} = \hat{k}$ ને લંબ હોય તેવો એકમ સદિશ હોય, તો $\vec{a} = \dots\dots$

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j}$ (B) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{k}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{k}$

ઉકેલ : $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ લેતાં, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$

$$\text{હવે } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \text{ આથી, } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a_1}{1}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} = a_1$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$\text{વળી } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} + a_2^2 + 0 = 1$$

$$\therefore a_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j}$$

જવાબ : (A)

(4) જો $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0, \vec{a} \cdot \vec{y} = 0, \vec{a} \cdot \vec{z} = 0$ તો $[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = \dots\dots (\vec{a} \neq \vec{0})$

- (A) 1 (B) $|\vec{a}|$ (C) 0 (D) શક્ય નથી.

ઉકેલ : અહીં $\vec{a}$ એ $\vec{x}, \vec{y}$ અને $\vec{z}$ ત્રણેય સદિશોને લંબ હોવાથી, $\vec{x}, \vec{y}$ અને $\vec{z}$ સમતલીય છે.

$$\therefore [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = 0$$

જવાબ : (C)

બીજી રીત : $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0, \vec{a} \cdot \vec{y} = 0, \vec{a} \cdot \vec{z} = 0$

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ સમતલીય હોય કે અસમતલીય હોય.

જો $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ સમતલીય હોય, તો $[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = 0$.

જો $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ અસમતલીય હોય, તો પ્રત્યેક $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ને $\vec{a} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}$ તરીકે લખી શકાય.

$$\text{હવે, } \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}) = p(\vec{a} \cdot \vec{x}) + q(\vec{a} \cdot \vec{y}) + r(\vec{a} \cdot \vec{z}) = 0$$

$$\therefore |\vec{a}|^2 = 0$$

$$\therefore |\vec{a}| = 0. \text{ પરંતુ } \vec{a} \neq \vec{0}$$

$\therefore \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ અસમતલીય નથી.

$\therefore \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ સમતલીય છે.

$$\therefore [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = 0$$

ત્રીજી રીત : જો $\vec{x} \neq 0, \vec{y} \neq 0, \vec{z} \neq 0$,

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0 \text{ અને } \vec{a} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{x} \text{ અને } \vec{a} \perp \vec{y}$$

$$\therefore \vec{a} = \pm(\vec{x} \times \vec{y})$$

$$\text{હવે } \vec{a} \cdot \vec{z} = 0 \Rightarrow \pm(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}| = 0$$

જો $\vec{x}, \vec{y}$ અથવા $\vec{z} = \vec{0}$, તો $|\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}| = 0$

(5) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0}$ તો $\dots\dots (\vec{a} \neq k(\vec{b} \times \vec{c}), \vec{a} \neq \vec{0})$

- (A) $\vec{b} \parallel \vec{c}$ (B) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (C) $\vec{a} \parallel \vec{c}$ (D) $\vec{b} \perp \vec{c}$

ઉકેલ : $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \parallel (\vec{b} \times \vec{c})$ અથવા $\vec{a} = \vec{0}$ અથવા $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq k(\vec{b} \times \vec{c})$ હોવાથી $\vec{a} \parallel (\vec{b} \times \vec{c})$ નથી. આમ $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$

$$\therefore \vec{b} \parallel \vec{c}$$

જવાબ : (A)

(6) જો એકમ સદિશો $\vec{a}, \vec{b}$ અને $\vec{c}$ માટે $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\vec{c}}{2}$ તો $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \dots\dots (\vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0})$

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

ઉકેલ : $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\vec{c}}{2}$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \frac{\vec{c}}{2}$$

$$|\vec{c}| = 1 \Rightarrow \vec{c} \neq \vec{0} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\vec{c}}{2} \text{ હોવાથી, } \vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0}$$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \times \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{2}$$

$$\therefore -(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{2}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2} \quad (\vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0})$$

$$\therefore |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore (1)(1) \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore (\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

જવાબ : (D)

(7) $\vec{x} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{y} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{z} = \hat{i} + 3\hat{k}$ છે. જો $\vec{x} + \lambda\vec{y}$ એ $\vec{z}$ ને લંબ હોય, તો $\lambda = \dots\dots$

(A) 2

(B) 5

(C) 0

(D) 6

ઉકેલ : $\vec{x} + \lambda\vec{y} = (2 + 2\lambda)\hat{i} + (3 + \lambda)\hat{j} + (1 - \lambda)\hat{k}$ એ $\vec{z} = \hat{i} + 3\hat{k}$ ને લંબ છે .

$$\therefore (2 + 2\lambda)(1) + (3 + \lambda)(0) + (1 - \lambda)(3) = 0$$

$$\therefore 2 + 2\lambda + 3 - 3\lambda = 0$$

$$\therefore 5 = \lambda$$

જવાબ : (B)

(8) $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ એકમ સદિશ છે અને $(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$ હોય, તો $2\sin\frac{\theta}{2} = \dots\dots$

(A) $\frac{1}{2}|\vec{a} - \vec{b}|$

(B) $|\vec{a} - \vec{b}|$

(C) $\frac{1}{2}|\vec{a} + \vec{b}|$

(D) $|\vec{a} + \vec{b}|$

ઉકેલ : $4\sin^2\frac{\theta}{2} = 2(1 - \cos\theta)$

$$= 1 + 1 - 2(1)(1) \cos\theta$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

($\vec{a}$ અને $\vec{b}$ એકમ સદિશો છે.)

$$= |\vec{a} - \vec{b}|^2$$

$$\therefore 2\sin\frac{\theta}{2} = |\vec{a} - \vec{b}|$$

જવાબ : (B)

(9) $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = |\vec{x}| |\vec{y}| |\vec{z}|$ હોય, તો $\dots\dots$

(A) $\vec{x} \cdot \vec{y}$, $\vec{y} \cdot \vec{z}$, $\vec{z} \cdot \vec{x}$ શૂન્યેતર છે.

(B) $\vec{x} \cdot \vec{y} \neq 0$, $\vec{y} \cdot \vec{z} \neq 0$, $\vec{z} \cdot \vec{x} \neq 0$ માંથી એક સત્ય છે

(C) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 1$

(D) $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, $\vec{y} \cdot \vec{z} = 0$, $\vec{z} \cdot \vec{x} = 0$

ઉકેલ : $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]$ એ $\vec{x}$, $\vec{y}$ અને $\vec{z}$ ધારોવાળા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ છે.

અહીં સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $[\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}] = |\vec{x}| |\vec{y}| |\vec{z}|$ હોવાથી, સમાંતર ફલક એ લંબચોરસ ફલક (લંબઘન) થશે.

$$\therefore \vec{x} \perp \vec{y}, \vec{y} \perp \vec{z} \text{ અને } \vec{z} \perp \vec{x}$$

$$\therefore \vec{x} \cdot \vec{y} = 0, \vec{y} \cdot \vec{z} = 0 \text{ અને } \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$$

જવાબ : (D)

બીજી રીત :

$$\therefore \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = |\vec{x}| |\vec{y} \times \vec{z}| \cos \alpha \quad \text{જ્યાં } \alpha = (\vec{x}, \vec{y} \times \vec{z})$$

$$= |\vec{x}| |\vec{y}| |\vec{z}| \sin \beta \cos \alpha \quad \text{જ્યાં } \beta = (\vec{y}, \vec{z})$$

$$= |\vec{x}| |\vec{y}| |\vec{z}| \quad (\text{પક્ષ})$$

$$\therefore \sin \beta = \cos \alpha = 1$$

$$\therefore \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \vec{y} \perp \vec{z}$$

$$\therefore \vec{y} \cdot \vec{z} = 0$$

તે જ રીતે $\vec{y} \cdot (\vec{z} \times \vec{x})$ પરથી $\vec{z} \cdot \vec{x} = 0$ તથા $\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$ પરથી $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

$$\therefore \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$$

જવાબ : (D)

(10) જો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ એ ΔABC ની બાજુઓ અનુક્રમે $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ અને $\overline{AB}$ ના સદિશ હોય, તો

[IIT : 2000, AIEEE : 2012]

$$(A) \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$(B) \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

$$(C) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$(D) \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\text{ઉકેલ : } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$$

તે જ પ્રમાણે $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

જવાબ : (B)

(11) જો $\vec{x} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{y} = \hat{i} - \hat{j}$ તો $\vec{x} + \vec{y}$ અને $\vec{x} - \vec{y}$ ને લંબ એકમ સદિશ

(A) $\frac{1}{6\sqrt{3}}(2\hat{i} - 2\hat{j} + 10\hat{k})$

(B) $\frac{1}{6\sqrt{3}}(2\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k})$

(C) $\frac{1}{3\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k})$

(D) $\frac{1}{3\sqrt{3}}(\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k})$

ઉકેલ : $(\vec{x} + \vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y}) = -(\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{y} \times \vec{x})$

$$= -2(\vec{x} \times \vec{y}) = -2(-\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}) = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$$

હવે $(\vec{x} + \vec{y})$ અને $(\vec{x} - \vec{y})$ બંનેને લંબ એકમ સદિશો $= \pm \frac{(\vec{x} + \vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})}{|(\vec{x} + \vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})|}$

$$= \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}) \quad \text{જવાબ : (C)}$$

(12) $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય એકમ સદિશ હોય, તો $[2\vec{a} - \vec{b} \quad 2\vec{b} - \vec{c} \quad 2\vec{c} - \vec{a}] = \dots\dots$ [IIT : 2000]

(A) 0

(B) 1

(C) $-\sqrt{3}$

(D) $\sqrt{3}$

ઉકેલ : $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય હોવાથી $2\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{b} - \vec{c}$ અને $2\vec{c} - \vec{a}$ પણ સમતલીય થશે.

$$\therefore [2\vec{a} - \vec{b} \quad 2\vec{b} - \vec{c} \quad 2\vec{c} - \vec{a}] = 0$$

[નોંધ : $[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] = 0$

$$\therefore [2\vec{a} - \vec{b} \quad 2\vec{b} - \vec{c} \quad 2\vec{c} - \vec{a}] = 7[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] = 0$$

જવાબ : (A)

(13) સદિશો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ તથા $\vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$ છે

તથા સદિશ $\vec{c}$ માટે $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ અને $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$ તો $\vec{c} = \dots\dots$

(A) $\frac{5}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}$

(B) $-\frac{5}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$

(C) $\frac{5}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$

(D) $-\frac{5}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}$

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ છે.

હવે, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$

$$\therefore c_1 + c_2 + c_3 = 3 \text{ અને } \vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \quad (1)$$

$$\therefore (c_3 - c_2)\hat{i} + (c_1 - c_3)\hat{j} + (c_2 - c_1)\hat{k} = 0\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\therefore c_3 - c_2 = 0; \quad c_1 - c_3 = 1 \text{ અને } c_2 - c_1 = -1$$

$$\therefore c_3 = c_2 \quad (2)$$

$$c_1 = 1 + c_3 \quad (3)$$

સમીકરણો (1), (2) અને (3) ઉકેલતાં,

$$c_3 = \frac{2}{3} = c_2 \text{ અને } c_1 = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \vec{c} = \frac{5}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

જવાબ : (C)

- (14) જો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ એકમ સદિશો હોય, તો $|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2$ નું મૂલ્ય થી વધશે નહિ. [IIT : 2001]

(A) 4 (B) 9 (C) 8 (D) 6

ઉકેલ : $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \geq 0$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \geq 0$$

$$\therefore 1 + 1 + 1 \geq -2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$\therefore 3 \geq -2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \quad (1)$$

$$\text{હવે } |\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$= 2(1 + 1 + 1) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$\leq 6 + 3 = 9$$

((1) પરથી)

$$\left[\vec{a} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}, \vec{b} = \frac{\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2}}, \vec{c} = \frac{\vec{k} - \vec{i}}{\sqrt{2}} \text{ લેતાં કિંમત 9 શક્ય છે.} \right]$$

જવાબ : (B)

- (15) જો ABCDEF નિયમિત ષટ્કોણ હોય અને $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = \lambda \vec{AD}$ તો $\lambda = \dots$

(A) 6 (B) 4 (C) 3 (D) 2

ઉકેલ : સદિશના ત્રિકોણના નિયમ પરથી

$$\Delta ACD \text{ માં } \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$$

$$= \vec{AC} + \vec{AF} \quad (1)$$

$$\text{અને } \Delta AED, \vec{AD} = \vec{AE} + \vec{ED}$$

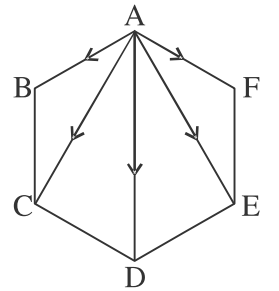
$$= \vec{AE} + \vec{AB} \quad (2)$$

પરિણામ (1) અને (2) ની અનુરૂપ બાજુઓનો સરવાળો કરતાં

$$2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} + \vec{AF}$$

$$\therefore 3\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF}. \text{ આથી, } \lambda = 3.$$

જવાબ : (C)



આકૃતિ 20.5

(16) સમલંબ ચતુષ્કોણમાં $\vec{BC} = m\vec{AD}$, સદિશ $\vec{x}$ માટે $\vec{x} = \vec{AC} + \vec{BD}$ તથા $\vec{x}$ એ $\vec{AD}$ ને સમરેખ છે. જો

$$\vec{x} = n\vec{AD} \text{ તો } n = \dots\dots$$

- (A) $m + 1$ (B) $m - 1$ (C) $1 - m$ (D) $-m - 1$

ઉકેલ : $\vec{x} = \vec{AC} + \vec{BD}$

$$\therefore n\vec{AD} = \vec{AC} + (\vec{BC} + \vec{CD})$$

$$\therefore n\vec{AD} = \vec{AC} + m\vec{AD} + \vec{CD}$$

$$\therefore n\vec{AD} = (\vec{AC} + \vec{CD}) + m\vec{AD}$$

$$\therefore n\vec{AD} = \vec{AD} + m\vec{AD}$$

$$\therefore n\vec{AD} = (1 + m)\vec{AD}$$

$$\therefore n = m + 1$$

જવાબ : (A)

(17) જો $\vec{a} = \hat{i} - \hat{k}$, $\vec{b} = x\hat{i} + \hat{j} + (1 - x)\hat{k}$, $\vec{c} = y\hat{i} + x\hat{j} + (1 + x - y)\hat{k}$ તો $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$ એ પર આધારિત નથી.

[IIT : 2001, AIEEE : 2005]

- (A) ફક્ત x (B) ફક્ત y (C) x અને y પૈકી એક (D) x અને y

ઉકેલ : $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 1 & (1-x) \\ y & x & 1+x-y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$(C_3 \rightarrow C_3 + C_1 - C_2)$$

$$= 1$$

$\therefore [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$ એ x અને y બંને પૈકી કોઈ પણ પર આધારિત નથી.

જવાબ : (D)

(18) બે શૂન્યેતર સદિશો $\vec{x} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ અને $\vec{y} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ સમાંતર (સમરેખ) હોય તો

(A) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

(B) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

(C) $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

(D) સહગુણકો $a_i, b_i; i = 1, 2, 3$ વચ્ચે કોઈ સંબંધ મળશે નહિ.

ઉકેલ : શૂન્યેતર સદિશો $\vec{x}$ અને $\vec{y}$ એકબીજાને સમાંતર હોવાથી, $\vec{x} = k\vec{y}$, $k \neq 0$

$$\therefore a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = k(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$\therefore \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$$

(જો કોઈ પણ $b_i = 0$ તો $a_i = 0$ એવો અર્થ લેવાનો.)

જવાબ : (A)

- (19) જો $\vec{x} = -\hat{i} + 3\hat{k}$ અને $\vec{y} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ છે. જો $\vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$ હોય, જ્યાં $\vec{a}$ એ $\vec{x}$ ને સમાંતર અને $\vec{b} \perp \vec{x}$ તો $(\vec{a}, \vec{b}) = \dots\dots$

- (A) $\left(\frac{1}{2}\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}, \hat{i} - \frac{7}{2}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}\right)$ (B) $\left(-\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{k}, \frac{3}{2}\hat{i} - 3\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}\right)$
 (C) $\left(-\frac{1}{2}\hat{j} - \frac{3}{2}\hat{k}, \frac{3}{2}\hat{i} - 3\hat{j} + \frac{7}{2}\hat{k}\right)$ (D) $\left(-\frac{1}{2}\hat{i} + \hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}, \frac{3}{2}\hat{i} - 4\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}\right)$

ઉકેલ : $\vec{a}$ અને $\vec{x}$ સમાંતર સદિશો છે.

$$\therefore \vec{a} = \alpha(-\hat{i} + 3\hat{k}) \text{ અને } \vec{b} = \vec{y} - \vec{a} = (1 + \alpha)\hat{i} - 3\hat{j} + (2 - 3\alpha)\hat{k}$$

$$\text{હવે } \vec{b} \perp \vec{x} \text{ . આથી, } \vec{b} \cdot \vec{x} = 0$$

$$\therefore -(1 + \alpha) + 3(2 - 3\alpha) = 0$$

$$\therefore 5 = 10\alpha \text{ . આથી, } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \vec{a} = -\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{k} \text{ અને } \vec{b} = \frac{3}{2}\hat{i} - 3\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

જવાબ : (B)

- (20) જો સદિશો $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{j}$ અને $\vec{c}$ માટે $\vec{a}$, $\vec{c}$ અને $\vec{b}$ જમણા હાથની પદ્ધતિ બનાવે તો $\vec{c} = \dots\dots$ [AIEEE : 2002]

- (A) $z\hat{i} - x\hat{k}$ (B) $\vec{0}$ (C) $y\hat{i}$ (D) $-z\hat{i} - x\hat{k}$

ઉકેલ : $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$ જમણા હાથની પદ્ધતિ બનાવે તો $\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$

$$\therefore \vec{c} = z\hat{i} - x\hat{k}$$

જવાબ : (A)

- (21) $\vec{a} = 3\hat{i} - 5\hat{j}$, $\vec{b} = 6\hat{i} + 3\hat{j}$ છે. જો $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ હોય, તો $|\vec{a}| : |\vec{b}| : |\vec{c}| = \dots\dots$ [AIEEE : 2002]

- (A) $\sqrt{34} : \sqrt{45} : \sqrt{39}$ (B) $\sqrt{34} : \sqrt{45} : 39$ (C) $34 : 39 : 45$ (D) $39 : 35 : 34$

ઉકેલ : $|\vec{a}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$; $|\vec{b}| = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$

$$\text{અને } \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 39\hat{k} \text{ . આથી, } |\vec{c}| = 39$$

$$\therefore |\vec{a}| : |\vec{b}| : |\vec{c}| = \sqrt{34} : \sqrt{45} : 39$$

જવાબ : (B)

- (22) જો $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ હોય, તો $\vec{a} + \vec{b}$ અને $\vec{b} - \vec{c}$ બંનેને લંબ એકમ સદિશ $\dots\dots$

- (A) $\pm\hat{i}$ (B) $\pm\hat{j}$ (C) $\pm\hat{k}$ (D) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

ઉકેલ : $\vec{a} + \vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j}$ અને $\vec{b} - \vec{c} = 3\hat{j}$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = 9\hat{k}$$

$$\text{હવે } (\vec{a} + \vec{b}) \text{ અને } (\vec{b} - \vec{c}) \text{ બંનેને લંબ એકમ સદિશ} = \pm \frac{[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c})]}{|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c})|} = \pm \frac{9\hat{k}}{|9\hat{k}|} = \pm \hat{k}$$

જવાબ : (C)

(23) જો $\vec{a}, \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ અને $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ જમણા હાથની પદ્ધતિ બતાવે તો $\hat{a} = \dots\dots$

(A) $\frac{1}{5\sqrt{6}}(11\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$

(B) $\frac{1}{5\sqrt{6}}(11\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$

(C) $\frac{1}{5\sqrt{6}}(11\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k})$

(D) $\frac{1}{5}(11\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k})$

ઉકેલ : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ જમણા હાથની પદ્ધતિ બતાવે છે.

$\therefore \hat{a}, \vec{b}, \vec{c}$ પણ જમણા હાથની પદ્ધતિમાં છે.

$$\text{હવે } \hat{a} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{11\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}}{5\sqrt{6}}$$

જવાબ : (B)

(24) જો $\vec{a}, \vec{b} = \hat{k} - \hat{j}$ અને $\vec{c} = 2\hat{j} + \hat{k}$ સમતલીય હોય તથા $\vec{a} \perp \vec{b}$ તો $\hat{a} = \dots\dots$

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{j} + \hat{k})$

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{j} - \hat{k})$

(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} - \hat{j})$

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

હવે $\vec{a}, \vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય છે.

$$\therefore [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -3a_1 = 0. \text{ આથી, } a_1 = 0$$

તથા $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. આથી, $a_3 - a_2 = 0$. આથી, $a_3 = a_2$

$$\therefore \vec{a} = a_2\hat{j} + a_2\hat{k} \text{ અને તેથી } |\vec{a}| = \sqrt{2}|a_2|$$

$$\therefore \hat{a} = \pm \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{j} + \hat{k})$$

જવાબ : (A)

બીજી રીત :

$\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સાથે સમતલીય અને $\vec{b}$ ને લંબ હોય તેવો

$$\text{સદિશ} = \vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$= (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (-2 + 1)(\hat{k} - \hat{j}) - 2(2\hat{j} + \hat{k}) = -3\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\therefore \text{ માંગેલ એકમ સદિશ} = \pm \frac{(-3\hat{j} - 3\hat{k})}{3\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{j} + \hat{k})$$

જવાબ : (A)

(25) $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{j} + \hat{k}$ છે. જો $\vec{c}$ એકમ સદિશ હોય, તો $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય થાય.

(A) $\sqrt{89}$

(B) $-\sqrt{89}$

(C) 0

(D) $-\sqrt{15}$

ઉકેલ : $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = [\vec{c} \vec{a} \vec{b}]$

$$= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$= |\vec{c}| |\vec{a} \times \vec{b}| \cos\theta$$

$$\text{જ્યાં } \theta = (\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})$$

$\cos\theta$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય -1 છે તથા $\vec{c}$ એકમ સદિશ હોવાથી, $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $-|\vec{a} \times \vec{b}|$ થશે.

$$\text{હવે } |\vec{a} \times \vec{b}| = |-7\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}| = \sqrt{49 + 4 + 36} = \sqrt{89}$$

$$\text{તેથી } [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] \text{ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય } -\sqrt{89}.$$

જવાબ : (B)

(26) $\vec{a} = \frac{1}{3}(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$, $\vec{b} = \frac{1}{5}(-3\hat{i} - 4\hat{k})$ અને $\vec{c} = \hat{j}$ સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવતો $\sqrt{51}$ માનવાળો સદિશ છે.

(A) $5\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$

(B) $5\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$

(C) $5\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$

(D) $5\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ સદિશ $\vec{x} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$ છે.

$$\text{હવે } |\vec{x}| = \sqrt{51}$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 51$$

(1)

$$\text{સદિશો } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ માટે } |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 1$$

$\vec{x}$ એ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવે છે.

$$\therefore \frac{\vec{x} \cdot \vec{a}}{|\vec{x}| |\vec{a}|} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}}{|\vec{x}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{c}}{|\vec{x}| |\vec{c}|}$$

$$\therefore \vec{x} \cdot \vec{a} = \vec{x} \cdot \vec{b} = \vec{x} \cdot \vec{c}$$

$$\therefore \frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3) = \frac{1}{5}(-3x_1 - 4x_3) = x_2$$

$$\therefore 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3x_2 \text{ અને } -3x_1 - 4x_3 = 5x_2$$

$$\therefore 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \text{ અને } 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$$

$$\therefore \frac{x_1}{-25} = \frac{x_2}{-5} = \frac{x_3}{25} \quad (\text{કેમરના નિયમથી})$$

$$\therefore \frac{x_1}{5} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{-5} = k \quad (\text{ધારતાં})$$

$$x_1 = 5k, x_2 = k, x_3 = -5k \text{ નું મૂલ્ય (1)માં મૂકતાં,}$$

$$k^2 = 1. \text{ આથી, } k = \pm 1$$

$$\therefore \vec{x} = \pm(5\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k})$$

જવાબ : (C)

(27) એકમ સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે જો $\vec{a} + 2\vec{b}$ અને $5\vec{a} - 4\vec{b}$ એકબીજાને લંબ હોય, તો

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \dots\dots$$

[IIT : 2002]

(A) $\frac{\pi}{4}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\cos^{-1} \frac{1}{3}$

(D) $\cos^{-1} \frac{2}{7}$

ઉકેલ : $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$

$$\therefore 5|\vec{a}|^2 + 6(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 8|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\therefore 5 + 6(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 8 = 0 \quad \left(|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \right)$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$\text{હવે } (\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

જવાબ : (B)

(28) $4\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $2\hat{i} + 3\hat{j} + a\hat{k}$ ના સરવાળાના સદિશને સમાંતર એકમ સદિશનું $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ સાથે અંતઃગુણન 1 થાય, તો $a = \dots\dots$

(A) 1

(B) -1

(C) 0

(D) 2

ઉકેલ : આપેલ સદિશોના સરવાળાનો સદિશ $\vec{x} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + (2+a)\hat{k}$ છે.

$$\therefore \vec{x} \text{ ને સમાંતર સદિશ } \vec{y} = m\vec{x}, m \neq 0$$

$$= m(6\hat{i} - 2\hat{j} + (2+a)\hat{k})$$

$$\therefore \hat{y} = \pm \frac{(6\hat{i} - 2\hat{j} + (2+a)\hat{k})}{\sqrt{44 + 4a + a^2}}$$

$$\hat{y} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$$

$$\therefore \pm(6 - 2 + 2 + a) = \sqrt{a^2 + 4a + 44}$$

$$\therefore a^2 + 12a + 36 = a^2 + 4a + 44$$

$$\therefore 8a = 8. \text{ અથી, } a = 1$$

જવાબ : (A)

$$(29) \quad \text{જો } \begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0 \text{ અને સદિશો } \vec{x} = (1, a, a^2), \vec{y} = (1, b, b^2) \text{ તથા } \vec{z} = (1, c, c^2)$$

વિષમતલીય હોય, તો $abc = \dots$

$$(A) (a-b)(b-c)(c-a) \quad (B) 3$$

$$(C) 0$$

$$(D) -1$$

$$\text{ઉકેલ : } \begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1 + abc) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{હવે } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ વિષમતલીય હોવાથી } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\therefore 1 + abc = 0$$

$$\therefore abc = -1$$

જવાબ : (D)

$$(30) \quad \text{સદિશ } -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ એ } 3\hat{i} + 4\hat{j} \text{ અને } \vec{c} \text{ વચ્ચેના ખૂણાનો દુભાજક છે. } \vec{c} \text{ ની દિશાનો એકમ સદિશ } \dots \text{ છે.}$$

$$(A) \frac{1}{15} (11\hat{i} + 10\hat{j} + 2\hat{k})$$

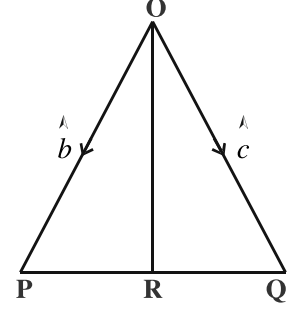
$$(B) \frac{1}{15} (11\hat{i} - 10\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$(C) \frac{-1}{15} (11\hat{i} + 10\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$(D) \frac{-1}{15} (11\hat{i} - 10\hat{j} + 2\hat{k})$$

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{OP} = \hat{b}$ અને $\vec{OQ} = \hat{c}$, જ્યાં $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

$$\therefore \vec{OP} = \hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{5}(3\hat{i} + 4\hat{j})$$



આકૃતિ 20.6

ધારો કે $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ R છે.

$\therefore \overline{OR} \perp \overline{PQ}$ ($OP = OQ = 1$ હોવાથી, ΔOPQ સમદ્વિભુજ છે અને $\overline{OR}$ એ મધ્યગા છે.)

અહીં $\Delta OPR \cong \Delta OQR$ થશે.

$$\therefore m\angle POR = m\angle QOR$$

$\therefore \vec{OR}$ એ $\angle POQ$ નો કોણદ્વિભાજક છે.

$\therefore \vec{OR}$ એ $\hat{b}$ અને $\hat{c}$ એટલે કે $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ નો કોણદ્વિભાજક છે.

પરંતુ $-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ એ $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ નો કોણદ્વિભાજક છે.

$$\therefore \vec{OR} = \lambda(-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}); \lambda \neq 0$$

$$\text{હવે } \vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR} + \vec{RP} + \vec{OR} + \vec{RQ}$$

$$\begin{aligned} &= 2\vec{OR} + \vec{RP} - \vec{RP} \\ &= 2\vec{OR} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\hat{b} + \hat{c}) = \lambda(-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{c} &= 2\lambda(-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) - \hat{b} \\ &= -2\lambda\hat{i} + 2\lambda\hat{j} - 2\lambda\hat{k} - \frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j} \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{c} = \left(-2\lambda - \frac{3}{5}\right)\hat{i} + \left(2\lambda - \frac{4}{5}\right)\hat{j} - 2\lambda\hat{k}$$

(1)

$$\text{વળી } \sqrt{\left(-2\lambda - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(2\lambda - \frac{4}{5}\right)^2 + 4\lambda^2} = 1$$

$$\therefore 12\lambda^2 - \frac{4}{5}\lambda + 1 = 1$$

$$\therefore \lambda\left(12\lambda - \frac{4}{5}\right) = 0$$

પરંતુ $\lambda \neq 0$. આથી, $\lambda = \frac{1}{15}$

λ નું મૂલ્ય (1)માં મૂકતાં,

$$\hat{c} = \frac{-1}{15}(11\hat{i} + 10\hat{j} + 2\hat{k})$$

જવાબ : (C)

(31) જો $A(\vec{x})$, $B(\vec{y})$ અને $C(\vec{z})$ એ સમભુજ ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ હોય અને ΔABC નું લંબકેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય, તો શક્ય છે.

$$(A) \vec{x} + \vec{y} = \vec{z} \quad (B) |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = |\vec{z}|^2 \quad (C) \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0} \quad (D) |\vec{x}| + |\vec{y}| = |\vec{z}|$$

ઉકેલ : ΔABC નું લંબકેન્દ્ર ઊગમબિંદુ છે.

$\therefore$ લંબકેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ $\vec{0}$ છે.

ΔABC સમભુજ હોવાથી, ΔABC ના લંબકેન્દ્રનો સ્થાન સદિશ = ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ

$$\therefore \vec{0} = \frac{\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}}{3}$$

$$\therefore \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$$

જવાબ : (C)

(32) જો $\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{w} = \hat{i} + 3\hat{k}$ હોય તથા $\vec{u}$ એકમ સદિશ હોય, તો $[\vec{u} \vec{v} \vec{w}]$ નું મહત્તમ મૂલ્ય થાય. [IIT : 2002]

$$(A) -1 \quad (B) \sqrt{10} + \sqrt{16} \quad (C) \sqrt{59} \quad (D) \sqrt{6}$$

$$\text{ઉકેલ : } [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}| \cos(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w}) \text{નું મહત્તમ મૂલ્ય } 1 \text{ છે તથા } |\vec{u}| = 1$$

$$\therefore [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] \text{ નું મહત્તમ મૂલ્ય } = |\vec{v} \times \vec{w}| = |3\hat{i} - 7\hat{j} - \hat{k}| = \sqrt{59}$$

જવાબ : (C)

(33) $\vec{x} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $\vec{y} = 4\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k}$ છે. જો $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ હોય, તો $|\vec{x}|^2 : |\vec{y}|^2 : |\vec{z}|^2 = \dots\dots$

$$(A) \sqrt{29} : 9 : \sqrt{585} \quad (B) 29 : 81 : 585 \quad (C) 9 : 15 : 3 \quad (D) 29 : 81 : 487$$

$$\text{ઉકેલ : } |\vec{x}|^2 = 29, |\vec{y}|^2 = 81$$

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$$

$$= -20\hat{i} + 4\hat{j} + 13\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{z}|^2 = 400 + 16 + 169 = 585$$

$$\therefore |\vec{x}|^2 : |\vec{y}|^2 : |\vec{z}|^2 = 29 : 81 : 585$$

જવાબ : (B)

(34) $\vec{x} = \hat{i} - \hat{j}$, $\vec{y} = \hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{z} = \hat{k} - \hat{i}$. જો $\sqrt{6}$ માનવાળો એક એવો સદિશ $\vec{w}$ છે કે જે $\vec{x}$ ને લંબ અને $\vec{y}$, $\vec{z}$ ના સમતલમાં હોય તો $\vec{w} = \dots$

(A) $\pm(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ (B) $\pm(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ (C) $\pm(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ (D) $\pm(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{w} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$

$$\vec{x} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\therefore a_1 - a_2 = 0. \text{ આથી, } a_1 = a_2 \quad (1)$$

$\vec{w}$, $\vec{y}$ અને $\vec{z}$ સમતલીય છે.

$$\therefore [\vec{w} \ \vec{y} \ \vec{z}] = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad (2)$$

પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

$$2a_1 + a_3 = 0. \text{ આથી, } a_3 = -2a_1$$

$$\text{હવે } |\vec{w}| = \sqrt{6}$$

$$\therefore a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 6$$

$$\therefore a_1^2 + a_1^2 + 4a_1^2 = 6$$

$$\therefore a_1^2 = 1. \text{ આથી, } a_1 = \pm 1 = a_2 \text{ અને } a_3 = \mp 2$$

$$\therefore \vec{w} = \pm(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$$

જવાબ : (D)

(35) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ છે. સદિશ $\vec{c}$ માટે $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|$, $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{6}$ અને

$$|\vec{c} - \vec{a}| = 2\sqrt{2} \text{ તો } |(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| = \dots$$

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 2

ઉકેલ : $|\vec{c} - \vec{a}| = 2\sqrt{2}$

$$\therefore |\vec{c} - \vec{a}|^2 = 8$$

$$\therefore |\vec{c}|^2 - 2(\vec{c} \cdot \vec{a}) + |\vec{a}|^2 = 8$$

$$\therefore |\vec{c}|^2 - 2|\vec{c}| + 9 = 8. \text{ આથી, } |\vec{c}|^2 - 2|\vec{c}| + 1 = 0$$

$$\therefore (|\vec{c}| - 1)^2 = 0. \text{ આથી, } |\vec{c}| = 1$$

$$\text{હવે } |(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \sin((\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c})$$

$$= |2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}| (1) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

જવાબ : (B)

(36) કાટકોણ ΔABC ની શિરોબિંદુઓ A, B, C ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે

$$2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \lambda\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}, \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k} \text{ છે, } m\angle B = \frac{\pi}{2} \text{ તો } \lambda = \dots$$

- (A) 1 અથવા 2 (B) -1 અથવા 2 (C) 1 અથવા -2 (D) -1 અથવા -2

ઉકેલ : $m\angle B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC}$

$$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\Rightarrow ((\lambda - 2)\hat{i} - 2\hat{j}) \cdot ((1 - \lambda)\hat{i} - 6\hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)(1 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \text{ અથવા } \lambda = 1$$

જવાબ : (A)

(37) સદિશો $\hat{j} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + \hat{k}$ સાથે સમતલીય હોય અને $-2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ ને લંબ હોય તેવો $\sqrt{2}$ માનવાળો સદિશ છે.

- (A) $\hat{i} + \hat{k}$ (B) $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ (C) $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ (D) $3\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ સદિશ $\vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ છે.

હવે $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$, $\hat{j} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + \hat{k}$ સમતલીય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore a + b - c = 0$$

વળી, $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ અને $-2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ લંબ સદિશો છે.

$$\therefore -2a - 4b + 2c = 0$$

$$\therefore a + 2b - c = 0$$

$$\text{વળી, } a + b - c = 0$$

$$\therefore \frac{a}{-1} = \frac{b}{0} = \frac{c}{-1} = \lambda$$

$$\therefore \vec{r} = \lambda(-\hat{i} - \hat{k}), \text{ તથા } |\vec{r}| = \sqrt{2} \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\therefore \vec{r} = \hat{i} + \hat{k} \text{ અથવા } -\hat{i} - \hat{k}$$

જવાબ : (A)

(38) $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ એકમ સદિશો હોય, તો $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$ ની મહત્તમ કિંમત

- (A) 1 (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$

ઉકેલ : $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$= 1 + 1 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$= 2 + 2\cos\theta = 2(1 + \cos\theta) = 2 \times 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = 2\cos\frac{\theta}{2} \quad 0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= 2 - 2\cos\theta = 2(1 - \cos\theta) = 4\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| = 2\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right) \leq 2\sqrt{2} \quad \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \text{ ની મહત્તમ કિંમત } \sqrt{2}\right)$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| \text{ ની મહત્તમ કિંમત } 2\sqrt{2} \text{ છે.} \quad \text{જવાબ : (C)}$$

$$(39) \quad \vec{u}, \vec{v} \text{ અને } \vec{w} \text{ સદિશો હોય, તો } (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \cdot [(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{w})] = \dots \quad [\text{AIEEE : 2003}]$$

$$(A) \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad (B) \vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) \quad (C) 3\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad (D) 0$$

$$\text{ઉકેલ : } (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \cdot [(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{w})] = (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \cdot [(\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})]$$

$$= \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) - \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) - \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$= [\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}] - [\vec{v} \ \vec{u} \ \vec{w}] - [\vec{w} \ \vec{u} \ \vec{v}]$$

$$= [\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}] + [\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}] - [\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}]$$

$$= [\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}]$$

$$= \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$\text{જવાબ : (A)}$$

બીજી રીત :

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \text{ હો.}$$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} u_1 + v_1 - w_1 & u_2 + v_2 - w_2 & u_3 + v_3 - w_3 \\ u_1 - v_1 & u_2 - v_2 & u_3 - v_3 \\ v_1 - w_1 & v_2 - w_2 & v_3 - w_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 - v_1 & u_2 - v_2 & u_3 - v_3 \\ v_1 - w_1 & v_2 - w_2 & v_3 - w_3 \end{vmatrix} \quad (R_1 \rightarrow R_1 - R_2 - R_3)$$

$$= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ -w_1 & -w_2 & -w_3 \end{vmatrix} \quad (R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \text{ તથા } R_3 \rightarrow R_3 - R_1)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (R_1 \rightarrow R_2)$$

$$= \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$\text{જવાબ : (A)}$$

- (40) $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{v} = \hat{i} - \hat{j}$ અને $\vec{w} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ છે. જો $\hat{n}$ માટે $\vec{u} \cdot \hat{n} = 0$, $\vec{v} \cdot \hat{n} = 0$, તો $|\vec{w} \cdot \hat{n}| = \dots$ [AIEEE : 2003]
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

ઉકેલ : $\vec{u} \perp \hat{n}$ અને $\vec{v} \perp \hat{n}$ તેથી $\hat{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \pm \hat{k}$

$$|\vec{w} \cdot \hat{n}| = 3$$

જવાબ : (C)

- (41) સદિશો $\vec{x} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{y} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ છે અને $\vec{a}$ એવો સદિશ છે કે જેથી $\vec{a} \perp \vec{x}$ અને $\vec{a} \perp \vec{y}$ તો $\vec{a} = \dots$
 (A) $18\hat{i} + 3\hat{j} - 8\hat{k}$ (B) $22\hat{i} + \hat{j} - 8\hat{k}$
 (C) $-22\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ (D) $-22\hat{i} - 4\hat{j} + 10\hat{k}$

ઉકેલ : $\vec{a} \perp \vec{x}$ અને $\vec{a} \perp \vec{y}$

$$\vec{x} \text{ અને } \vec{y} \text{ બંનેને લંબ સદિશ } \pm(\vec{x} \times \vec{y}) \text{ છે.}$$

$$\therefore \vec{a} \text{ એ } \pm(\vec{x} \times \vec{y}) \text{ ને સમરેખ સદિશ છે.}$$

$$\therefore \vec{a} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}); \lambda \neq 0 = \lambda(11\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$$

$$\lambda = -2 \text{ લેતાં } \vec{a} = -22\hat{i} - 4\hat{j} + 10\hat{k}$$

જવાબ : (D)

- (42) $\triangle ABC$ માટે $\vec{AB} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$ અને $\vec{AC} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ હોય, તો A થી $\overline{BC}$ પરની મધ્યગાની લંબાઈ છે. [AIEEE : 2003]
 (A) $\sqrt{72}$ (B) $\sqrt{33}$ (C) $\sqrt{288}$ (D) $\sqrt{18}$

ઉકેલ : $\vec{AD} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = 4\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$$\therefore |\vec{AD}| = \sqrt{16 + 1 + 16} = \sqrt{33}$$

જવાબ : (B)

- (43) જો સદિશો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ માટે $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ તથા $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$, તો $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \dots$ [AIEEE : 2003]
 (A) -7 (B) 7 (C) 1 (D) 0

ઉકેલ : $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$

$$\therefore 0 = 1 + 4 + 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -7$$

જવાબ : (A)

- (44) $\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$, $\hat{j} + a\hat{k}$ અને $a\hat{i} + \hat{k}$ ધારવાળા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ ન્યૂનતમ હોય, તો $a = \dots\dots$
 $\left[a \notin \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]$ [IIT : 2003]

(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 3

ઉકેલ : સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $V = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}$ નો માનક = $1 - a + a^3$ નો માનક = $|1 - a + a^3|$

$$|1 - a + a^3| = |1 - a(1 - a^2)|$$

$$0 \leq a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - a^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq a(1 - a^2) \leq a \leq 1$$

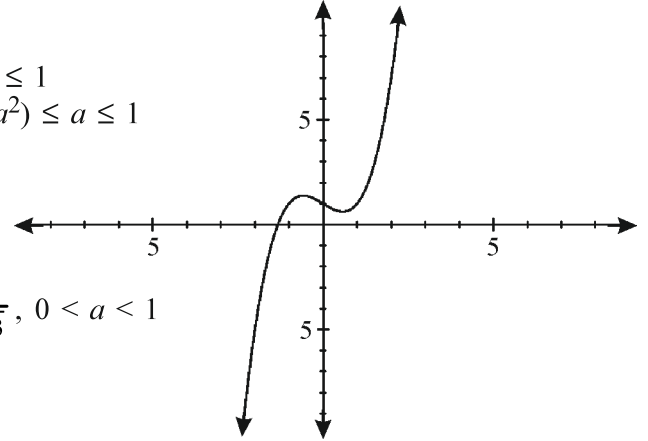
$$\therefore 1 - a + a^3 \geq 0$$

$$\therefore V = |1 - a + a^3| = 1 - a + a^3$$

$$\frac{dV}{da} = 0 \Rightarrow 3a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 < a < 1$$

$$\frac{d^2V}{da^2} = 6a = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ આગળ } V \text{ ન્યૂનતમ છે.}$$



આકૃતિ 20.7

$$V(0) = 1, V(1) = 1, V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ જે } a = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ આગળ}$$

પ્રદેશિય ન્યૂનતમ છે.

જવાબ : (C)

- (45) $\hat{i} + x\hat{j}$, $4\hat{i} - \hat{j} + x\hat{k}$ અને $-x\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ધારવાળા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ મહત્તમ કરવા માટે $x = \dots\dots$
જ્યાં $x \notin (-1, 1)$

(A) -3 (B) 1 (C) -1 (D) 3

ઉકેલ : સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $V = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 4 & -1 & x \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix}$ નો માનક = $1 + 3x - x^3$ નો માનક

$$V = |1 + 3x - x^3|$$

$$0 \leq x \leq \sqrt{3} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq (3 - x^2)$$

$$\therefore V = 1 + 3x - x^3$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -6x < 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq \sqrt{3} \text{ માં } x = 1 \text{ માટે } V \text{ મહત્તમ છે.}$$

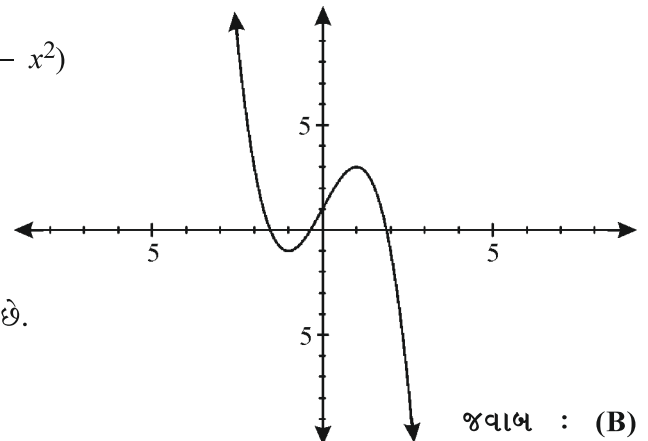
$$V(0) = 1, V(1) = 3, V(\sqrt{3}) = 1$$

$$\therefore x = 1 \text{ આગળ } V \text{ પ્રદેશિય મહત્તમ છે.}$$

$$\text{નોંધ : } V = |1 + 3x - x^3|$$

$$\frac{dV}{dx} \text{ ની નિશાની } x = 1 \text{ આગળ } V \text{ વધે છે અને } x > 1 \text{ આગળ } V \text{ ઘટે છે}$$

$$\therefore x = 1 \text{ આગળ } V \text{ મહત્તમ છે.}$$



આકૃતિ 20.8

જવાબ : (B)

- (46) એક પદાર્થકણ પર બે બળ $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ અને $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ લાગવાથી તેનું (1, 2, 3) બિંદુએથી (5, 4, 1) બિંદુએ સ્થાનાંતર થાય, તો થયેલ કાર્ય [AIEEE : 2003, 2004]
 (A) 30 એકમ (B) 40 એકમ (C) 50 એકમ (D) 20 એકમ

ઉકેલ : કુલ બળ $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$$\text{સ્થાનાંતર } \vec{d} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore \text{ થયેલ કાર્ય } w = \vec{F} \cdot \vec{d} = 28 + 4 + 8 = 40 \text{ એકમ}$$

જવાબ : (B)

- (47) એક પદાર્થકણ પર બે બળ $\vec{F}_1 = 2\hat{i} + a\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{F}_2 = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ લગાડવાથી કણનું સ્થાનાંતર $\vec{d} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ થાય છે. આમ કરવાથી 34 એકમ કાર્ય થાય, તો $a = \dots$
 (A) -12 (B) 12 (C) -1 (D) 1

ઉકેલ : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 5\hat{i} + (a + 4)\hat{j}$

$$\text{કાર્ય } w = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$\therefore 34 = 10 - 3a - 12. \text{ આથી, } 36 = -3a. \text{ આથી, } a = -12$$

જવાબ : (A)

- (48) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ શૂન્યેતર સદિશો છે. તેમાંથી કોઈ પણ બે સમરેખ નથી. જો $\vec{a} + 2\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમરેખ હોય તથા $\vec{b} + 3\vec{c}$ અને $\vec{a}$ સમરેખ હોય, તો $\vec{a} + 2\vec{b} + 6\vec{c} = \dots$ (λ શૂન્યેતર અચળ છે.) [AIEEE : 2004]
 (A) $\lambda \vec{a}$ (B) $\lambda \vec{b}$ (C) $\lambda \vec{c}$ (D) $\vec{0}$

ઉકેલ : $\vec{a} + 2\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમરેખ છે.

$$\therefore \vec{a} + 2\vec{b} = k_1 \vec{c}, k_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\vec{b} + 3\vec{c} \text{ અને } \vec{a} \text{ સમરેખ છે.}$$

$$\therefore \vec{b} + 3\vec{c} = k_2 \vec{a}, k_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore \vec{a} + 2\vec{b} - 2(\vec{b} + 3\vec{c}) = k_1 \vec{c} - 2k_2 \vec{a}$$

$$\therefore \vec{a} - 6\vec{c} = k_1 \vec{c} - 2k_2 \vec{a}$$

$$\vec{a} \text{ અને } \vec{c} \text{ સમરેખ નથી.}$$

$$\vec{a} \text{ અને } \vec{c} \text{ ના સહગુણકો સરખાવતાં,}$$

$$1 = -2k_2 \text{ અને } -6 = k_1$$

$$\therefore k_2 = -\frac{1}{2} \text{ અને } k_1 = -6$$

$$\text{હવે, } \vec{a} + 2\vec{b} = k_1 \vec{c}$$

$$\therefore \vec{a} + 2\vec{b} + 6\vec{c} = \vec{0}$$

જવાબ : (D)

- (49) જો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ વિષમતલીય સદિશો હોય અને λ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $\lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ અને $(2\lambda - 1)\vec{c}$ એ λ ની કિંમતો માટે વિષમતલીય થાય.
 (A) બધી જ (B) કોઈ એક સિવાયની બધી જ (C) બે સિવાયની બધી જ (D) માત્ર બે

ઉકેલ : જો સદિશો $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $\lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ અને $(2\lambda - 1)\vec{c}$ સમતલીય હોય, તો

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 2\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \lambda(2\lambda - 1) = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2} \text{ અથવા } \lambda = 0$$

$\therefore \lambda$ ની બે સિવાયની બધી જ કિંમતો માટે આપેલા સદિશો વિષમતલીય થશે. જવાબ : (C)

- (50) શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ માટે $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \frac{1}{3}|\vec{b}||\vec{c}|\vec{a}$ છે. જો θ એ $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ હોય, તો $\cos\theta = \dots\dots$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

ઉકેલ : $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \frac{1}{3}|\vec{b}||\vec{c}|\vec{a}$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} = \frac{1}{3}|\vec{b}||\vec{c}|\vec{a}$$

(જો $\vec{a}$, $\vec{b}$ સમરેખ હોય, તો $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{0}$. આથી, $\vec{a} = \vec{0}$ પરંતુ $\vec{a}$ શૂન્યેતર સદિશ છે.)

$\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સહગુણકો સરખાવતાં,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \text{ અને } -\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3}|\vec{b}||\vec{c}|$$

$$\therefore |\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta = \frac{-1}{3}|\vec{b}||\vec{c}|$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

જવાબ : (C)

- (51) $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ સાથે સમતલીય હોય તથા $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ને લંબ હોય, તેવો એકમ સદિશ છે.

(A) $\frac{\hat{i} - \hat{j}}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : $\vec{x} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ને લંબ તથા $\vec{y} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{z} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ સાથે સમતલીય હોય, તેવો એકમ સદિશ $\pm(\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}))$ થાય.

$$\text{હવે } \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} = 4(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) - 4(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = -4\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\therefore \text{ માંગેલ એકમ સદિશ } = \pm \frac{(-\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{2}}. \text{ આથી, માંગેલ સદિશ } = \frac{\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{2}}$$

જવાબ : (C)

- (52) X-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{4}$, Y-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{3}$ અને Z-અક્ષ સાથે θ માપનો લઘુકોણ બનાવતો એકમ સદિશ $\vec{x}$ હોય, તો θ તથા $\vec{x}$ અનુક્રમે

(A) $\frac{\pi}{3}, \frac{\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{2}\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}, \frac{\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{2}\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}}{2}$

ઉકેલ : $\vec{x}$ એ અક્ષો સાથે અનુક્રમે α, β, γ માપના ખૂણા બનાવે તો $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ અને

$$\hat{x} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k} \text{ થાય.}$$

$$\therefore \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\theta = 1. \text{ અથી, } \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2} \quad (\theta \text{ લઘુકોણ છે.})$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{અને } \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

જવાબ : (B)

- (53) એકમ સદિશો $\vec{a}, \vec{b}$ માટે $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}] = \frac{1}{4}$ તો $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \dots\dots$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}] = \frac{1}{4}$

$$\therefore [\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}] = \frac{1}{4}$$

$$\therefore |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = \frac{1}{4}$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \frac{1}{4}. \text{ અથી, } |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$$

જવાબ : (D)

- (54) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓ $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ અને $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ હોય, તો તેમના વિકર્ણ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

(A) $\frac{\pi}{3}$ અથવા $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ અથવા $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : વિકર્ણ સદિશો $\vec{a} + \vec{b} = 7\hat{i} + 7\hat{j}$ અને $\vec{a} - \vec{b} = -\hat{i} + \hat{j}$ થશે.

$$\text{હવે, } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 25 - 25 = 0$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$$

$$\therefore \text{વિકર્ણ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ } \frac{\pi}{2}.$$

જવાબ : (D)

(55) જો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ અને $\vec{a} \times \vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$ તો $\vec{b} = \dots\dots$

[IIT : 2004]

(A) $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

(B) $2\hat{j} - \hat{k}$

(C) $\hat{i}$

(D) $2\hat{i}$

ઉકેલ : $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 3$

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times (\hat{j} - \hat{k})$$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{b} = \hat{i} \times \hat{j} - \hat{i} \times \hat{k} - \hat{j} \times \hat{k} + \hat{k} \times \hat{j}$$

$$\therefore 1(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - 3\vec{b} = \hat{k} + \hat{j} - \hat{i} - \hat{i}$$

$$\therefore 3\hat{i} = 3\vec{b}$$

$$\therefore \vec{b} = \hat{i}$$

જવાબ : (C)

(56) $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ ને લંબ તથા $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ને સમતલીય હોય, તેવો એકમ સદિશ

[IIT : 2004]

(A) $\frac{2\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{41}}$

(B) $\frac{2\hat{i} - 3\hat{j}}{\sqrt{13}}$

(C) $\frac{3\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{10}}$

(D) $\frac{4\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$

ઉકેલ : $\vec{a}$ ને લંબ હોય તથા $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સાથે સમતલીય હોય, તેવો સદિશ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ થાય.

$$\text{હવે } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$= 7(2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - 14(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$= 21\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\therefore \text{માંગેલ એકમ સદિશ} = \frac{3\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{10}}$$

જવાબ : (C)

બીજી રીત :

ધારો કે $\vec{x} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય છે.

$$\therefore [\vec{x} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$$

(1)

$$\text{તથા } \vec{x} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{a} = 0$$

(2)

હવે $|\vec{x}| = 1$ પરથી માંગેલ સદિશ મળશે.

જવાબ : (C)

(57) બે એકમ સદિશોના સરવાળાનું સદિશ એકમ સદિશ હોય, તો તે બે સદિશોના તફાવતનું માન

- (A) 1 (B) $1 + \sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

ઉકેલ : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ લેતાં $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

$$\text{હવે } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$\therefore 1 + 1 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 1 \quad ((\vec{a} \wedge \vec{b}) = \theta \text{ લેતાં})$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{હવે, } |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 1 + 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$

જવાબ : (D)

બીજી રીત :

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2 + 2 - 1 = 3$$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$

જવાબ : (D)

(58) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ એકમ સદિશો છે, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમાંતર સદિશો નથી. જો $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{\sqrt{2}}$ હોય,

તો $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \dots\dots$

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

ઉકેલ : $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{\sqrt{2}}$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{b} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{c}$$

હવે, $\vec{b}$ તથા $\vec{c}$ સમાંતર નથી. આથી, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$$\text{હવે } (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \cos^{-1} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

જવાબ : (B)

(59) જો C એ $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ હોય તથા $P \notin \overline{AB}$ તો

[AIEEE : 2005]

(A) $\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{PC}$

(B) $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PC}$

(C) $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$

(D) $\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$

ઉકેલ : સદિશના ત્રિકોણના નિયમ પરથી

ΔPAC માટે $\vec{PA} + \vec{AC} = \vec{PC}$

(1)

અને ΔPCB માટે $\vec{PB} + \vec{BC} = \vec{PC}$

$\therefore \vec{PB} - \vec{AC} = \vec{PC}$

$(\vec{AC} = \vec{CB})$

(2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી

$\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PC}$

જવાબ : (B)

બીજી રીત :

P ને ઊગમબિંદુ લેતાં, A, B, C ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ થાય.

$\therefore \vec{PC} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

$\therefore 2\vec{PC} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{PA} + \vec{PB}$

જવાબ : (B)

(60) જો $a\hat{i} + a\hat{j} + c\hat{k}$, $\hat{i} + \hat{k}$ અને $c\hat{i} + c\hat{j} + b\hat{k}$ એક જ સમતલમાં આવેલાં હોય, તો $c = \dots$

(a, b, c ભિન્ન ધન સંખ્યાઓ છે.)

[AIEEE : 2005]

(A) a અને b નો સમાંતર મધ્યક

(B) a અને b નો સમગુણોત્તર મધ્યક

(C) a અને b નો સ્વરિત મધ્યક

(D) 0

ઉકેલ : સદિશ $a\hat{i} + a\hat{j} + c\hat{k}$, $\hat{i} + \hat{k}$ અને $c\hat{i} + c\hat{j} + b\hat{k}$ એક જ સમતલમાં (સમતલીય) છે તેથી

$$\begin{vmatrix} a & a & c \\ 1 & 0 & 1 \\ c & c & b \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore a(-c) - a(b - c) + c(c) = 0$

$\therefore -ac - ab + ac + c^2 = 0$

$\therefore c^2 = ab$

$\therefore c$ એ a તથા b નો સમગુણોત્તર મધ્યક છે.

જવાબ : (B)

(61) $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ વિષમતલીય સદિશો છે અને λ કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો

$$[\lambda(\vec{a} + \vec{b}) \quad \lambda^2 \vec{b} \quad \lambda \vec{c}] = [\vec{a} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{b}] \text{ એ } \dots \quad [\text{AIEEE : 2005}]$$

- (A) કોઈ પણ λ માટે શક્ય નથી. (B) λ ની એક જ કિંમત માટે શક્ય છે.
(C) λ ની બે જ કિંમત માટે શક્ય છે. (D) λ ની ત્રણ જ કિંમત માટે શક્ય છે.

ઉકેલ : $[\lambda(\vec{a} + \vec{b}) \quad \lambda^2 \vec{b} \quad \lambda \vec{c}] = [\vec{a} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{b}]$

$$\therefore \lambda(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\lambda^2 \vec{b} \times \lambda \vec{c}) = \vec{a} \cdot ((\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b})$$

$$\therefore \lambda^4 \{ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \} = \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$

$$\therefore \lambda^4 \{ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \} = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

પરંતુ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$

$$\therefore \lambda^4 = -1 \text{ શક્ય નથી.}$$

$$\therefore \text{કોઈ પણ } \lambda \text{ માટે આપેલ વિધાન શક્ય નથી.}$$

જવાબ : (A)

(62) સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે જો $2\vec{a} + \vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ અને $\vec{a} + 2\vec{b} = \hat{i} - \hat{j}$ હોય, તો $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dots$

- (A) $\frac{4}{5}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $-\frac{4}{9}$

ઉકેલ : $2\vec{a} + \vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ અને $\vec{a} + 2\vec{b} = \hat{i} - \hat{j}$

$$\therefore 2\vec{a} + \vec{b} = \hat{i} + \hat{j} \text{ અને } 2\vec{a} + 4\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$\therefore 3\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j}$$

$$\therefore \vec{b} = \frac{\hat{i} - 3\hat{j}}{3} \text{ અને } \vec{a} = \hat{i} - \hat{j} - 2\left(\frac{\hat{i} - 3\hat{j}}{3}\right) = \frac{\hat{i} + 3\hat{j}}{3}$$

$$\therefore |\vec{b}| = \frac{\sqrt{10}}{3} \text{ અને } |\vec{a}| = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{હવે, } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-8}{\frac{10}{9}} = -\frac{4}{5}$$

જવાબ : (B)

(63) જો $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 5$ હોય તથા આ બંનેના કારણે થયેલ કાર્ય H હોય તેમજ સ્થાનાંતર $\vec{d}$ હોય, તો મહત્તમ H =

- (A) $|\vec{d}|$ (B) $2|\vec{d}|$ (C) $5|\vec{d}|$ (D) $10|\vec{d}|$

ઉકેલ : $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 5$

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| \leq |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| \leq 10$$

$$\therefore \text{મહત્તમ } H = 10 |\vec{d}|$$

જવાબ : (D)

(64) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ તથા $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{b} \perp \vec{c}, \vec{c} \perp \vec{a}$ છે. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ એ આપેલા સદિશોમાંથી કોઈ પણ સદિશ સાથે માપનો ખૂણો બનાવશે.

(A) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (B) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (C) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (D) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

ઉકેલ : ધારો કે $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = m$

$$\text{હવે } |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 3m^2$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0)$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{3}m$$

$$\begin{aligned} \text{હવે } \cos(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a}) &= \frac{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| |\vec{a}|} \\ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a}}{(\sqrt{3}m)m} = \frac{m^2}{\sqrt{3}m^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a}) = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

જવાબ : (A)

(65) ધારો કે $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ છે. $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સમતલમાં આવેલો તથા $\vec{c}$ પરના પ્રક્ષેપનું માન $\frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તેવો સદિશ છે. [IIT : 2006]

(A) $4\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ (B) $3\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ (C) $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ (D) $4\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

ઉકેલ : $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સમતલમાં આવેલો સદિશ $\vec{r} = m\vec{a} + n\vec{b}$

$$= (m + n)\hat{i} + (2m - n)\hat{j} + (m + n)\hat{k}$$

હવે $\vec{r}$ ના $\vec{c}$ પરના પ્રક્ષેપનું માન $\frac{1}{\sqrt{3}}$ છે.

$$\therefore \frac{|\vec{r} \cdot \vec{c}|}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{|(m + n)(1) + (2m - n)(1) + (m + n)(-1)|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore |2m - n| = 1$$

$$\therefore 2m - n = 1 \quad \text{અથવા} \quad 2m - n = -1$$

$$\therefore 2m - 1 = n \quad 2m + 1 = n$$

$$\therefore \vec{r} = (3m - 1)\hat{i} + \hat{j} + (3m - 1)\hat{k} \quad \text{અથવા} \quad \vec{r} = (3m + 1)\hat{i} + \hat{j} + (3m + 1)\hat{k}$$

$\hat{i}$ અને $\hat{k}$ ના યામ સમાન હોય તેવા આપેલા વિકલ્પોમાંથી $4\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ સદિશ છે. જવાબ : (A)

- (66) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ એ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના સ્થાનસદિશ દર્શાવે છે. આ ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય, તો લંબકેન્દ્ર થાય.

(A) $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ (B) $\frac{\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}}{2}$ (C) $\frac{\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}}{3}$ (D) ઊગમબિંદુ

ઉકેલ : ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર ઊગમબિંદુ ($\vec{0}$) છે તથા ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ $\frac{\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}}{3}$ થશે.

મધ્યકેન્દ્ર એ લંબકેન્દ્ર ($\vec{h}$) અને પરિકેન્દ્રને જોડતાં રેખાખંડનું લંબકેન્દ્ર તરફથી 2 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$$\therefore \frac{\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}}{3} = \frac{2(\vec{0}) + 1(\vec{h})}{2 + 1}$$

$$\therefore \vec{h} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

જવાબ : (A)

(67)
$$\begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{vmatrix} = \dots\dots$$

(A) $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$ (B) $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^2$ (C) $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^3$ (D) 0

ઉકેલ : $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$, $\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$, $\vec{c} = c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k}$ લેતાં,

$$\begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{શ્રેણિકોના ગુણાકારના ઉપયોગથી})$$

$$= [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^2$$

જવાબ : (B)

(68) સદિશો $-\lambda^2 \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - \lambda^2 \hat{j} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + \hat{j} - \lambda^2 \hat{k}$, λ ની કિંમતો માટે સમતલીય થશે.

(A) શૂન્ય (B) એક (C) બે (D) ત્રણ

ઉકેલ : સદિશો સમતલીય થાય, તો
$$\begin{vmatrix} -\lambda^2 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda^2 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -\lambda^2(\lambda^4 - 1) - 1(-\lambda^2 - 1) + 1(1 + \lambda^2) = 0$$

$$\therefore (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1)(2 - \lambda^2) = 0$$

$$\therefore \lambda^2 \geq 0 \text{ હોવાથી } \lambda^2 = 2$$

$$\therefore \lambda = \pm\sqrt{2}$$

$\therefore \lambda$ ની બે કિંમત મળે.

જવાબ : (C)

(69) સદિશો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{c} = x\hat{i} + (x-2)\hat{j} - \hat{k}$ માટે $\vec{c}$ એ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સમતલમાં હોય, તો $x = \dots\dots$ [AIEEE : 2007]

(A) 1

(B) -4

(C) -2

(D) 0

ઉકેલ : $\vec{c}$ એ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સમતલમાં છે. આથી, $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય છે.

$$\therefore [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ x & (x-2) & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & x-1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} C_1 \rightarrow C_1 - C_2 \\ C_2 \rightarrow C_2 - C_3 \end{array} \right)$$

$$\therefore 2(x-1) + 6 = 0. \text{ આથી, } x-1 = -3. \text{ આથી, } x = -2$$

જવાબ : (C)

(70) જો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ શૂન્યેતર વિષમતલીય સદિશો હોય અને $\vec{b}_1 = \vec{b} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$, $\vec{b}_2 = \vec{b} + \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$,

$$\vec{c}_1 = \vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{b}_1, \vec{c}_2 = \vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{c}}{|\vec{b}_1|^2} \vec{b}_1, \vec{c}_3 = \vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}|^2} \vec{a} + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{b}_1, \text{ અને}$$

$$\vec{c}_4 = \vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}|^2} \vec{a} + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}_1 \text{ હોય તો } \dots\dots \text{ પરસ્પર લંબ છે.}$$

[IIT : 2005]

(A) $(\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c}_3)$

(B) $(\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c}_2)$

(C) $(\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c}_1)$

(D) $(\vec{a}, \vec{b}_2, \vec{c}_2)$

$$\text{ઉકેલ : } \vec{a} \cdot \vec{b}_1 = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \right) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} |\vec{a}|^2 = 0$$

$$\therefore \vec{a} \perp \vec{b}_1$$

$$\begin{aligned}\text{હવે } \vec{b}_1 \cdot \vec{c}_3 &= \vec{b}_1 \cdot \left(\vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}|^2} \vec{a} + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{b}_1 \right) \\ &= \vec{b}_1 \cdot \vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}|^2} \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} |\vec{b}_1|^2 \neq 0\end{aligned}$$

∴ વિકલ્પ (A) જવાબ નથી.

$$\begin{aligned}\text{હવે } \vec{b}_1 \cdot \vec{c}_2 &= \vec{b}_1 \cdot \left(\vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{c}}{|\vec{b}_1|^2} \vec{b}_1 \right) \\ &= \vec{b}_1 \cdot \vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \cdot \vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{c}}{|\vec{b}_1|^2} |\vec{b}_1|^2 = \vec{b}_1 \cdot \vec{c} - \vec{b}_1 \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad (\vec{a} \cdot \vec{b}_1 = 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{b}_1 \perp \vec{c}_2$$

$$\begin{aligned}\text{તથા } \vec{a} \cdot \vec{c}_2 &= \vec{a} \cdot \left(\vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{c}}{|\vec{b}_1|^2} \vec{b}_1 \right) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} |\vec{a}|^2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{c}}{|\vec{b}_1|^2} \vec{a} \cdot \vec{b}_1 = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad (\vec{a} \cdot \vec{b}_1 = 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{a} \perp \vec{c}_2$$

$$\therefore (\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c}_2) \text{ પરસ્પર લંબ છે.}$$

(નોંધ : આને ગ્રામ સ્મીડની લંબકરણવિધિ કહે છે.)

જવાબ : (B)

(71) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સમાન માનવાળા શૂન્યેતર પરસ્પર લંબ સદિશો હોય અને જો સદિશ $\vec{x}$ એ

$$\vec{a} \times \{(\vec{x} - \vec{b}) \times \vec{a}\} + \vec{b} \times \{(\vec{x} - \vec{c}) \times \vec{b}\} + \vec{c} \times \{(\vec{x} - \vec{a}) \times \vec{c}\} = \vec{0} \text{ નું સમાધાન કરે, તો } \vec{x} = \dots\dots$$

$$(A) \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \quad (B) \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \quad (C) \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad (D) \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

ઉકેલ : ધારો કે $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = m$ તથા $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$

$$\vec{a} \times \{(\vec{x} - \vec{b}) \times \vec{a}\} + \vec{b} \times \{(\vec{x} - \vec{c}) \times \vec{b}\} + \vec{c} \times \{(\vec{x} - \vec{a}) \times \vec{c}\} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{a} \cdot \vec{a}(\vec{x} - \vec{b}) - (\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{b}))\vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}(\vec{x} - \vec{c}) - (\vec{b} \cdot (\vec{x} - \vec{c}))\vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}(\vec{x} - \vec{a}) - (\vec{c} \cdot (\vec{x} - \vec{a}))\vec{c} \\ = \vec{0}\end{aligned}$$

$$\therefore m^2(\vec{x} - \vec{b}) + m^2(\vec{x} - \vec{c}) + m^2(\vec{x} - \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{x})\vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore 3m^2 \vec{x} - m^2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{x})\vec{c} = \vec{0}$$

$\vec{a}$ સાથે અંતઃગુણન લેતાં,

$$3m^2(\vec{x} \cdot \vec{a}) - m^2(\vec{a} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{x})(\vec{a} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\therefore 3m^2(\vec{x} \cdot \vec{a}) - m^2(m^2) - (\vec{a} \cdot \vec{x})m^2 = 0$$

$$\therefore 2(\vec{x} \cdot \vec{a}) - m^2 = 0 \quad (m \neq 0)$$

$$\therefore \vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{m^2}{2}. \text{ તે જ પ્રમાણે, } \vec{x} \cdot \vec{b} = \frac{m^2}{2} \text{ અને } \vec{x} \cdot \vec{c} = \frac{m^2}{2}$$

$$\therefore 3m^2 \vec{x} - m^2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{m^2}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$$

$$\therefore 3\vec{x} = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

જવાબ : (C)

$$(72) \text{ જો } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) \text{ અને } [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] \neq 0 \text{ તો } \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \dots\dots$$

$$(A) \vec{a} \times \vec{b}$$

$$(B) \vec{b} \times \vec{c}$$

$$(C) \vec{c} \times \vec{a}$$

$$(D) \vec{0}$$

$$\text{ઉકેલ : } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

$$\therefore (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{0}$$

હવે $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] \neq 0$ હોવાથી $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ વિષમતલીય છે.

$$\therefore l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow l = m = n = 0$$

$$\therefore \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \text{ તથા } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{હવે, } \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} = \vec{0}$$

જવાબ : (D)

$$(73) \text{ જો } \vec{a} = \alpha \hat{i} + 2\hat{j} + \beta \hat{k} \text{ એ } \vec{b} = \hat{i} + \hat{j} \text{ અને } \vec{c} = \hat{j} + \hat{k} \text{ ના સમતલમાં આવેલો સદિશ હોય તથા } \vec{a} \text{ એ } \vec{b}$$

અને $\vec{c}$ વચ્ચેના ખૂણાનો કોણદ્વિભાજક હોય, તો α અને β નાં મૂલ્ય અનુક્રમે

[AIEEE : 2008]

$$(A) 1 \text{ અને } 1$$

$$(B) 2 \text{ અને } 2$$

$$(C) 1 \text{ અને } 2$$

$$(D) 2 \text{ અને } 1$$

$$\text{ઉકેલ : } \vec{b} \text{ અને } \vec{c} \text{ નો કોણદ્વિભાજક સદિશ } \vec{a} = \lambda \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} + \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right)$$

$$\therefore \alpha \hat{i} + 2\hat{j} + \beta \hat{k} = \lambda \left(\frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\therefore \alpha \hat{i} + 2\hat{j} + \beta \hat{k} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \hat{i} + \sqrt{2}\lambda \hat{j} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \hat{k}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \quad 2 = \sqrt{2}\lambda, \quad \beta = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \lambda = \sqrt{2}$$

$$\therefore \alpha = 1 \text{ અને } \beta = 1$$

જવાબ : (A)

(74) શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ માટે જો $\vec{a} = 8\vec{b}$, $\vec{c} = -7\vec{b}$ હોય, તો $(\vec{a}, \vec{c}) = \dots\dots$

(A) π

(B) 0

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

$$\text{ઉકેલ : } \cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = \frac{(8\vec{b}) \cdot (-7\vec{b})}{|8\vec{b}| |-7\vec{b}|} = -\frac{56|\vec{b}|^2}{56|\vec{b}|^2} = -1$$

$$\therefore (\vec{a}, \vec{c}) = \pi$$

જવાબ : (A)

નોંધ : $\vec{a}$ એ $\vec{b}$ ની દિશામાં તથા $\vec{c}$ એ $\vec{b}$ ની દિશાની વિરુદ્ધ દિશામાં છે.

$$\therefore (\vec{a}, \vec{c}) = \pi$$

(75) એક સમાંતર ફલકની ધારોની લંબાઈ 1 એકમ છે અને તે વિષમતલીય સદિશો $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ ને સમાંતર છે.

જો $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{c} = \hat{c} \cdot \hat{a} = \frac{1}{2}$ હોય, તો સમાંતર ફલકનું ઘનફળ થાય.

[IIT : 2008]

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ઉકેલ : સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $[\hat{a} \hat{b} \hat{c}]$ ના માનક જેટલું થશે.

$$\begin{aligned} \text{હવે } [\hat{a} \hat{b} \hat{c}]^2 &= \begin{vmatrix} \hat{a} \cdot \hat{a} & \hat{a} \cdot \hat{b} & \hat{a} \cdot \hat{c} \\ \hat{a} \cdot \hat{b} & \hat{b} \cdot \hat{b} & \hat{b} \cdot \hat{c} \\ \hat{a} \cdot \hat{c} & \hat{b} \cdot \hat{c} & \hat{c} \cdot \hat{c} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore [\hat{a} \hat{b} \hat{c}] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{સમાંતર ફલકનું ઘનફળ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

જવાબ : (A)

- (76) ધારો કે બે અસમરેખ એકમ સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ લઘુકોણ બનાવે છે. કોઈ પણ t સમયે બિંદુ Pનો બિંદુગણ $\vec{OP}$ છે જે $\hat{a} \cos t + \hat{b} \sin t$ છે. જ્યારે P ઊગમબિંદુથી મહત્તમ અંતરે હોય, ત્યારે $\vec{OP}$ ની લંબાઈ m છે. જો $\vec{OP}$ ની દિશાનું એકમ સદિશ $\hat{u}$ હોય, તો

[IIT : 2008]

- (A) $\hat{u} = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{|\hat{a} + \hat{b}|}$ અને $m = (1 + \hat{a} \cdot \hat{b})^{\frac{1}{2}}$ (B) $\hat{u} = \frac{\hat{a} - \hat{b}}{|\hat{a} - \hat{b}|}$ અને $m = (1 + \hat{a} \cdot \hat{b})^{\frac{1}{2}}$
 (C) $\hat{u} = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{|\hat{a} + \hat{b}|}$ અને $m = (1 + 2\hat{a} \cdot \hat{b})^{\frac{1}{2}}$ (D) $\hat{u} = \frac{\hat{a} - \hat{b}}{|\hat{a} - \hat{b}|}$ અને $m = (1 + 2\hat{a} \cdot \hat{b})^{\frac{1}{2}}$

ઉકેલ : $|\vec{OP}| = |\hat{a} \cos t + \hat{b} \sin t|$

$$\begin{aligned} \therefore m &= (|\hat{a}|^2 \cos^2 t + |\hat{b}|^2 \sin^2 t + 2\hat{a} \cdot \hat{b} \cos t \sin t)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\cos^2 t + \sin^2 t + 2\hat{a} \cdot \hat{b} \sin 2t)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1 + \hat{a} \cdot \hat{b} \sin 2t)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

મહત્તમ $|\vec{OP}|$ માટે $\sin 2t = 1$. આથી, $t = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore m = (1 + \hat{a} \cdot \hat{b})^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \vec{OP} = \hat{a} \cos \frac{\pi}{4} + \hat{b} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \vec{OP} \text{ ની દિશામાં એકમ સદિશ } \hat{u} = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{|\hat{a} + \hat{b}|}$$

જવાબ : (A)

- (77) 5 એકમનું બળ સદિશ $\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ની દિશામાં એક કણ પર લગાડતાં કણનું (3, 1, 2) થી (7, 5, 3) સુધી સ્થાનાંતર થાય, તો કાર્ય એકમ થાય.

- (A) $\frac{70}{3}$ (B) $\frac{50}{3}$ (C) $\frac{25}{3}$ (D) $\frac{35}{3}$

ઉકેલ : બળ $\vec{F} = \frac{5(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})}{|\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}|} = \frac{5}{3}(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$$\text{સ્થાનાંતર } \vec{d} = (7, 5, 3) - (3, 1, 2) = 4\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{કાર્ય} &= \vec{F} \cdot \vec{d} \\ &= \frac{5}{3}(4 + 8 - 2) = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

જવાબ : (B)

$$(78) \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{5\pi}{6} \text{ તથા } \text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = -2\sqrt{3} \text{ તો } |\vec{a}| = \dots$$

(A) 4

(B) 6

(C) 12

(D) $4|\vec{b}|$

$$\text{ઉકેલ : } \text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\therefore -2\sqrt{3} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{5\pi}{6}}{|\vec{b}|}$$

$$\therefore -2\sqrt{3} = |\vec{a}| \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\therefore |\vec{a}| = 4$$

જવાબ : (A)

(79) સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ ના માન સમાન છે તથા પ્રત્યેક બે સદિશની જોડ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ સમાન છે. જો $\vec{a} = \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{k} + \hat{i}$ હોય, તો $\vec{c} = \dots$

(A) $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ (B) $\hat{i} - \hat{j}$

(C) $\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} - \frac{4}{3}\hat{k}$

(D) $-\frac{1}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{4}{3}\hat{k}$

$$\text{ઉકેલ : } |\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2} = |\vec{c}|$$

$$\text{ધારો કે } \vec{c} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \text{ તેથી } x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad (1)$$

પ્રત્યેક બે સદિશોની જોડ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ સમાન છે.

$$\therefore \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}| |\vec{a}|}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$\therefore 1 = y + z \text{ અને } 1 = x + z$$

$$\therefore 1 - z = y \text{ અને } 1 - z = x$$

હવે x અને y ની મૂલ્ય (1)માં મૂકતાં

$$(1 - z)^2 + (1 - z)^2 + z^2 = 2$$

$$\therefore 3z^2 - 4z = 0$$

$$\therefore z = 0 \text{ અથવા } z = \frac{4}{3}$$

$$\therefore x = y = 1 \text{ અથવા } x = y = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \vec{c} = \hat{i} + \hat{j} \text{ અથવા } \vec{c} = -\frac{1}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{4}{3}\hat{k}$$

જવાબ : (D)

- (80) $3\hat{i} + 60\hat{j}, -52\hat{i} + a\hat{j}$ અને $-8\hat{i} + 40\hat{j}$ સ્થાન સદિશવાળાં બિંદુઓ સમરેખ હોય, તો $a = \dots$
 (A) 20 (B) -20 (C) 40 (D) -40

ઉકેલ : $A(3\hat{i} + 60\hat{j}), B(-52\hat{i} + a\hat{j})$ અને $C(-8\hat{i} + 40\hat{j})$ સમરેખ છે.

$$\therefore \vec{AB} = \lambda \vec{BC}$$

$$\therefore (-52\hat{i} + a\hat{j}) - (3\hat{i} + 60\hat{j}) = \lambda \{(-8\hat{i} + 40\hat{j}) - (-52\hat{i} + a\hat{j})\}$$

$$\therefore -55\hat{i} + (a - 60)\hat{j} = \lambda (44\hat{i} + (40 - a)\hat{j})$$

$$\therefore -55 = 44\lambda \text{ અને } a - 60 = \lambda(40 - a)$$

$$\therefore -\frac{5}{4} = \lambda. \text{ તથા } a - 60 = -\frac{5}{4}(40 - a)$$

$$\therefore 4a - 240 = -200 + 5a$$

$$\therefore -40 = a$$

જવાબ : (D)

- (81) જો ABCDEF નિયમિત ષટ્કોણ હોય તથા $\vec{AB} = x, \vec{BC} = y, \vec{CD} = z$ હોય, તો $\vec{AE} = \dots$

(A) $\vec{x} + \vec{y}$

(B) $\vec{y} + \vec{z}$

(C) $\vec{z} + \vec{x}$

(D) $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$

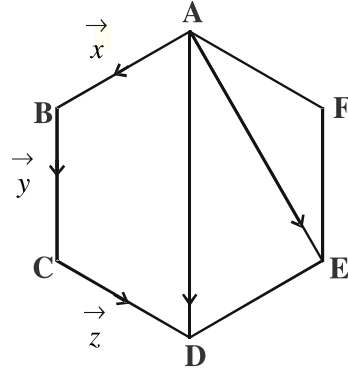
ઉકેલ : $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}$

$$= \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{BA}$$

$$= \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} - \vec{AB}$$

$$= \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} - \vec{x}$$

$$= \vec{y} + \vec{z}$$



આકૃતિ 20.10

જવાબ : (B)

બીજી રીત :

$$\vec{AE} = \vec{AF} + \vec{FE}$$

$$= \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{y} + \vec{z}$$

જવાબ : (B)

- (82) જો ABCDEF નિયમિત ષટ્કોણ હોય, તો $\vec{AD} + \vec{EB} + \vec{FC} = \dots$

(A) $\vec{AB}$

(B) $2\vec{AB}$

(C) $3\vec{AB}$

(D) $4\vec{AB}$

ઉકેલ : નિયમિત ષટ્કોણ ABCDEF માટે

$$\vec{AD} \parallel \vec{BC} \text{ અને } \vec{AD} = 2\vec{BC}$$

$$\vec{EB} \parallel \vec{FA} \text{ અને } \vec{EB} = 2\vec{FA}$$

$$\text{અને } \vec{FC} \parallel \vec{AB} \text{ અને } \vec{FC} = 2\vec{AB}$$

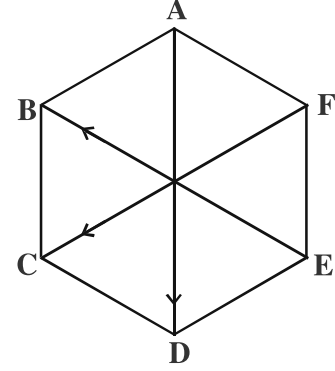
$$\text{હવે } \vec{AD} + \vec{EB} + \vec{FC} = 2(\vec{BC} + \vec{FA} + \vec{AB})$$

$$= 2(\vec{BC} + \vec{FB})$$

$$= 2\vec{FC}$$

$$= 2(2\vec{AB})$$

$$= 4\vec{AB}$$



આકૃતિ 20.11

જવાબ : (D)

(83) જો $\vec{u}, \vec{v}$ અને $\vec{w}$ વિષમતલીય સદિશો હોય અને

$$[3\vec{u} \ \vec{p} \ \vec{v} \ \vec{p} \ \vec{w}] - [p \ \vec{v} \ \vec{w} \ q \ \vec{u}] - [2\vec{w} \ q \ \vec{v} \ q \ \vec{u}] = 0, \text{ તો } \dots [AIEEE : 2009]$$

(A) (p, q) ની એક જ કિંમત મળે.

(B) (p, q) ની બે જ કિંમત મળે.

(C) (p, q) ની બે કરતાં વધારે કિંમત મળે પરંતુ બધી જ નહિ

(D) (p, q) ની બધી જ કિંમતો મળે.

$$\text{ઉકેલ : } [3\vec{u} \ \vec{p} \ \vec{v} \ \vec{p} \ \vec{w}] - [p \ \vec{v} \ \vec{w} \ q \ \vec{u}] - [2\vec{w} \ q \ \vec{v} \ q \ \vec{u}] = 0$$

$$\therefore 3p^2[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}] - pq[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}] + 2q^2[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}] = 0$$

$$\therefore 3p^2 - pq + 2q^2 = 0 \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ વિષમતલીય હોવાથી } [\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}] \neq 0)$$

$$\therefore q^2 - 24q^2 \geq 0 \quad (p \text{ માં દ્વિઘાત સમીકરણ લેતાં})$$

$$\therefore -23q^2 \geq 0$$

$$\therefore q^2 \leq 0 \text{ પરંતુ } q^2 \geq 0 \text{ હોવાથી } q = 0 \text{ અને તેથી } p = 0$$

$$\therefore (p, q) = (0, 0) \text{ એક જ કિંમત મળે.}$$

જવાબ : (A)

(84) જો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ અને $\vec{d}$ એવા એકમ સદિશો હોય કે જેથી $\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$ અને $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = 1$ થાય, તો [IIT : 2009]

(A) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ વિષમતલીય છે.

(B) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ વિષમતલીય છે.

(C) $\vec{b}$ અને $\vec{d}$ સમાંતર નથી.

(D) $\vec{a}$ અને $\vec{d}$ સમાંતર તથા $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમાંતર છે.

ઉકેલ : ધારો કે $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha, (\vec{c}, \vec{d}) = \beta$ અને $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}) = \gamma$

$$\text{હવે, } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = 1$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c} \times \vec{d}| \cos \gamma = 1$$

$$\therefore (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha) (|\vec{c}| |\vec{d}| \sin \beta) \cos \gamma = 1$$

$$\therefore \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = 1$$

અ $\sin \alpha = 1, \sin \beta = 1$ અને $\cos \gamma = 1$ માટે જ શક્ય છે. $(\sin \alpha \geq 0, \sin \beta \geq 0)$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = 0$$

$$\therefore \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{c} \perp \vec{d} \text{ અને } (\vec{a} \times \vec{b}) \parallel (\vec{c} \times \vec{d}). \text{ અર્થાત્, } \vec{a} \times \vec{b} = k(\vec{c} \times \vec{d})$$

$\vec{c}$ અને $\vec{d}$ વડે ક્રમશઃ અંતઃગુણન કરતાં,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = k(\vec{c} \times \vec{d}) \cdot \vec{c} = 0 \text{ અને } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} = k(\vec{c} \times \vec{d}) \cdot \vec{d} = 0$$

$$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ સમતલીય છે અને } \vec{a}, \vec{b}, \vec{d} \text{ સમતલીય છે.}$$

$\therefore$ વિકલ્પ (A) અને (B) શક્ય નથી.

$$\text{હવે } \vec{b} \parallel \vec{d} \text{ લેતાં, } \vec{b} = \pm \vec{d} \quad (|\vec{b}| = |\vec{d}| \text{ અને } \vec{b} \parallel \vec{d})$$

$$\text{વળી } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = 1. \text{ અર્થાત્, } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = \pm 1 \quad (\vec{d} = \pm \vec{b} \text{ લેતાં})$$

$$\therefore [\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{b}] = \pm 1$$

$$\therefore [\vec{c} \quad \vec{b} \quad \vec{a} \times \vec{b}] = \pm 1$$

$$\therefore \vec{c} \cdot (\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = \pm 1$$

$$\therefore \vec{c} \cdot ((\vec{b} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{b}) = \pm 1$$

$$\therefore \vec{c} \cdot \vec{a} = \pm 1. \text{ પરંતુ } \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} \quad (\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 1 \text{ અને } \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$$

$\therefore \vec{b}$ અને $\vec{d}$ સમાંતર સદિશો નથી.

$$\text{હવે, જો } \vec{a} \parallel \vec{d} \text{ અને } \vec{b} \parallel \vec{c} \text{ લઈએ, તો } \vec{d} = \pm \vec{a} \text{ અને } \vec{c} = \pm \vec{b}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = 0. \text{ પરંતુ } \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

જવાબ : (C)

(85) $\vec{a} \cdot \hat{i} = \vec{a} \cdot (\hat{i} + \hat{j}) = \vec{a} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ તો $\vec{a} = \dots\dots$

- (A) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ (B) $\hat{i}$ (C) $\hat{j}$ (D) $\hat{k}$

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$

હવે, $\vec{a} \cdot \hat{i} = \vec{a} \cdot (\hat{i} + \hat{j}) = \vec{a} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$\therefore a_1 = a_1 + a_2 = a_1 + a_2 + a_3$

$\therefore a_1 = a_1 + a_2$ અને $a_1 + a_2 = a_1 + a_2 + a_3$

$\therefore a_2 = 0$ અને $a_3 = 0$

$\therefore \vec{a} = a_1 \hat{i}$. હવે, $a_1 = 1$ લેતાં, $\vec{a} = \hat{i}$

જવાબ : (B)

(86) જો 10 માનવાળો $-3\hat{i} + 4\hat{j}$ ની દિશાનો સદિશ $x\hat{i} + 8\hat{j}$ હોય, તો $x = \dots\dots$

- (A) 6 (B) 2 (C) -6 (D) -2

ઉકેલ : $-3\hat{i} + 4\hat{j}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ $\frac{1}{5}(-3\hat{i} + 4\hat{j})$

$\therefore -3\hat{i} + 4\hat{j}$ ની દિશાનો 10 માનવાળો સદિશ $= \frac{10}{5}(-3\hat{i} + 4\hat{j})$

$\therefore x\hat{i} + 8\hat{j} = -6\hat{i} + 8\hat{j}$

$\therefore x = -6$

જવાબ : (C)

(87) જો $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (5, -1, 1)$ અને $\vec{c} = (1, -1, 0)$ હોય, તો $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ ને સમાંતર અને વિરુદ્ધ દિશાનો 3 માનવાળો સદિશ $\dots\dots$ છે.

- (A) $\frac{1}{3}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ (B) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ (C) $\frac{1}{3}(-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ (D) $-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

ઉકેલ : $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (2, 1, -1) - (5, -1, 1) + (1, -1, 0)$

$= (-2, 1, -2)$

$\therefore |\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$

$\therefore \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ ને સમાંતર, વિરુદ્ધ દિશાનો 3 માનવાળો સદિશ

$= -3 \left(\frac{\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}|} \right)$

$= 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

જવાબ : (B)

(88) $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સદિશો માટે પ્રત્યેક બે સદિશની જોડ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ હોય તથા

$$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 2 \text{ હોય, તો } |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = \dots$$

- (A) $3\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{55}$ (C) 27 (D) 55

ઉકેલ : અહીં $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = \frac{\pi}{3}$

$$\text{હવે, } |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$= 9 + 16 + 4 + 2\left(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} - |\vec{b}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3} - |\vec{c}||\vec{a}|\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 29 + 2\left\{(3)(4)\left(\frac{1}{2}\right) - (4)(2)\frac{1}{2} - (2)(3)\frac{1}{2}\right\}$$

$$= 29 + 2\{6 - 4 - 3\} = 29 - 2 = 27$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = 3\sqrt{3}$$

જવાબ : (A)

(89) ધારો કે $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ છે. જો $(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{c} = \vec{0}$ અને $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ હોય, તો $\vec{b} = \dots$

[AIEEE : 2010]

- (A) $-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ (B) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ (C) $\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ (D) $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

ઉકેલ : $(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{c} = \vec{0}$

$$\therefore \vec{a} \times [(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{c}] = \vec{a} \times \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore 3(\hat{j} - \hat{k}) - 2\vec{b} + (-2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) = \vec{0}$$

$$\therefore -2\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} = 2\vec{b}$$

$$\therefore -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} = \vec{b}$$

જવાબ : (A)

(90) $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{c} = \lambda\hat{i} + \hat{j} + \mu\hat{k}$ પરસ્પર લંબ સદિશો હોય, તો

$$(\lambda, \mu) = \dots$$

[AIEEE : 2010]

- (A) $(-3, 2)$ (B) $(2, -3)$ (C) $(-2, 3)$ (D) $(3, -2)$

ઉકેલ : આપેલ સદિશો પરસ્પર લંબ છે.

$$\begin{array}{l|l} \therefore \vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 & \vec{b} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \\ \Rightarrow \lambda - 1 + 2\mu = 0 & \Rightarrow 2\lambda + 4 + \mu = 0 \\ \Rightarrow \lambda + 2\mu = 1 & \Rightarrow 2\lambda + \mu = -4 \end{array}$$

સમીકરણો ઉકેલતાં $(\lambda, \mu) = (-3, 2)$

જવાબ : (A)

- (91) સમતલમાં બિંદુઓ P, Q, R અને S ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $-2\hat{i} - \hat{j}$, $4\hat{i}$, $3\hat{i} + 3\hat{j}$ અને $-3\hat{i} + 2\hat{j}$ હોય, તો ચતુષ્કોણ PQRS [IIT : 2010]

- (A) લંબચોરસ કે સમભુજ ચતુષ્કોણ ન હોય તેવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
 (B) ચોરસ છે.
 (C) લંબચોરસ છે પરંતુ ચોરસ નથી.
 (D) સમભુજ ચતુષ્કોણ છે.

ઉકેલ : બાજુઓ $\vec{PQ} = 6\hat{i} + \hat{j}$, $\vec{QR} = -\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{RS} = -6\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{SP} = \hat{i} - 3\hat{j}$ અને વિકર્ણો $\vec{PR} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$ તથા $\vec{QS} = -7\hat{i} + 2\hat{j}$ થાય.

અહીં, $\vec{PQ} \parallel \vec{RS}$ અને $\vec{QR} \parallel \vec{SP}$ હોવાથી ચતુષ્કોણ PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

$\vec{PQ} \cdot \vec{QR} \neq 0$ તેથી તે લંબચોરસ કે ચોરસ નથી.

$\vec{PR} \cdot \vec{QS} \neq 0$ તેથી સમભુજ ચતુષ્કોણ નથી.

$\therefore$ ચતુષ્કોણ PQRS એ લંબચોરસ કે સમભુજ ચતુષ્કોણ ન હોય તેવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

જવાબ : (A)

- (92) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની પાસપાસેની બાજુઓના સદિશો $\vec{AB} = 2\hat{i} + 10\hat{j} + 11\hat{k}$ અને $\vec{AD} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ છે. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDના સમતલમાં બાજુ $\vec{AD}$ ને લઘુકોણ α માપના ખૂણે પરિભ્રમણ આપતા તે $\vec{AD'}$ થાય છે. જો $\vec{AD'}$ એ $\vec{AB}$ સાથે કાટખૂણો બનાવે, તો $\cos\alpha = \dots$ [ITT : 2010]

- (A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{\sqrt{17}}{9}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

ઉકેલ : ધારો કે $m\angle BAD = \beta$

અહીં $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = -2 + 20 + 22 = 40 > 0$

$\therefore \cos\beta > 0$

$\therefore 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

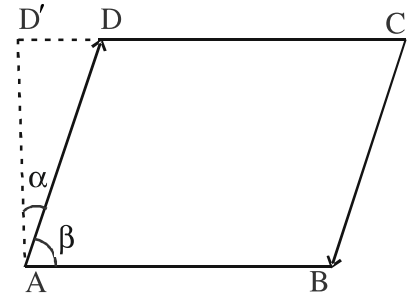
એટલે કે β લઘુકોણ છે.

$$\cos\beta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| |\vec{AD}|} = \frac{40}{(15)(3)} = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \sin\beta = \frac{\sqrt{17}}{9}$$

હવે $(\vec{AD}, \vec{AD'}) = \alpha$ તથા $\vec{AD'} \perp \vec{AB}$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$



આકૃતિ 20.12

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\therefore \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\therefore \frac{8}{9} \cos \alpha - \frac{\sqrt{17}}{9} \sin \alpha = 0$$

$$\therefore 8 \cos \alpha = \sqrt{17} \sin \alpha$$

$$\therefore 64 \cos^2 \alpha = 17(1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\therefore 81 \cos^2 \alpha = 17. \text{ આથી, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{9}$$

જવાબ : (B)

(93) સદિશો $\hat{p}\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + q\hat{j} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + \hat{j} + r\hat{k}$ સમતલીય હોય, તો

$$pqr - (p + q + r) = \dots\dots$$

[AIEEE : 2011]

(A) 2

(B) 0

(C) -1

(D) -2

ઉકેલ : આપેલ સદિશો સમતલીય હોવાથી,

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & q & 1 \\ 1 & 1 & r \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore p(qr - 1) - 1(r - 1) + 1(1 - q) = 0$$

$$\therefore pqr - p - r + 1 + 1 - q = 0$$

$$\therefore pqr - (p + q + r) = -2$$

જવાબ : (D)

(94) સદિશો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ માટે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સમતલમાં આવેલા

સદિશ $\vec{v}$ ના $\vec{c}$ પરના પ્રક્ષેપનું માન $\frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તો $\vec{v} = \dots\dots$

[IIT : 2011]

(A) $\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

(B) $-3\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

(C) $3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

(D) $\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

ઉકેલ : $\vec{v}$ એ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સમતલમાં આવેલું સદિશ છે.

$$\therefore \vec{v} = m\vec{a} + n\vec{b}, m, n \in \mathbb{R}$$

$$= (m + n)\hat{i} + (m - n)\hat{j} + (m + n)\hat{k}$$

$$\left| \text{Proj}_{\vec{c}} \vec{v} \right| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{c}|}{|\vec{c}|}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{|(m + n)(1) + (m - n)(-1) + (m + n)(-1)|}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \pm 1 = m + n - m + n - m - n$$

$$\therefore m - n = \pm 1$$

$$\therefore \vec{v} \text{ માં } \hat{i} \text{ અને } \hat{k} \text{ ના યામ સમાન છે, તથા } m - n = -1 \text{ લેતાં,}$$

$$\text{આપેલા વિકલ્પો પરથી } \vec{v} = 3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}.$$

જવાબ : (C)

(95) સદિશો $\vec{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ વચ્ચેનો કોણદ્વિભાજક $\vec{c}$ છે. જો $|\vec{c}| = 3\sqrt{6}$ હોય, તો $\vec{c} = \dots\dots$

- (A) $7\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ (B) $\frac{7\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{9}$ (C) $7\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ (D) $\frac{7\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}}{9}$

ઉકેલ : કોણદ્વિભાજક $\vec{c} = m \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$

$$= m \left(\frac{4\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}}{9} + \frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3} \right)$$

$$= \frac{m}{9} (7\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$\therefore |\vec{c}|^2 = \frac{m^2}{81} (54) = 54 \quad (\text{આપેલ છે.})$$

$$\therefore m = \pm 9$$

$$\therefore \vec{c} = 7\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} \text{ અથવા } \vec{c} = -7\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

જવાબ : (C)

(96) ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળા નિયમિત ષટ્કોણ ABCDEF માટે $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = \dots\dots$

- (A) $6\vec{AO}$ (B) $5\vec{AO}$ (C) $4\vec{AO}$ (D) $3\vec{AO}$

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b} = \vec{AO}$

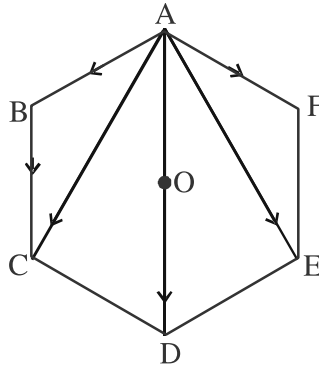
$$\text{હવે, } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{AD} = 2\vec{BC} = 2\vec{b}$$

$$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE}$$

$$= \vec{AD} - \vec{AB}$$

$$= 2\vec{b} - \vec{a}$$



આકૃતિ 20.13

અને $\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF}$

$$= 2\vec{b} - \vec{a} - \vec{BC} = 2\vec{b} - \vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} &= \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) + (2\vec{b}) + (2\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= 6\vec{b} = 6\vec{AO} \end{aligned}$$

જવાબ : (A)

(97) જો $\vec{a} \perp \vec{b}$ તો $\vec{a} \times [\vec{a} \times \{\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})\}] = \dots\dots$

(A) $-|\vec{a}|^2 \vec{b}$ (B) $|\vec{a}|^4 \vec{b}$ (C) $-|\vec{a}|^2 (\vec{a} \times \vec{b})$ (D) $|\vec{a}|^4 (\vec{a} \times \vec{b})$

ઉકેલ : $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} = -|\vec{a}|^2 \vec{b}$ ($\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$)

$$\begin{aligned} \therefore \vec{a} \times [\vec{a} \times \{\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})\}] &= \vec{a} \times [\vec{a} \times (-|\vec{a}|^2 \vec{b})] \\ &= -|\vec{a}|^2 \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -|\vec{a}|^2 (-|\vec{a}|^2 \vec{b}) = |\vec{a}|^4 \vec{b} \end{aligned}$$

જવાબ : (B)

(98) સદિશો $\lambda \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $(\lambda + 1)\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ અને $\lambda \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ એ સમતલીય હોય, તો λ ની કિંમતોનો ગણ $\dots\dots$

(A) R (B) $R - \{2\}$ (C) $R - \{1\}$ (D) $\emptyset$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda + 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \lambda + 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad (C_3 \rightarrow C_3 - C_2)$

$$= -2(\lambda - \lambda - 1) \neq 0, \forall \lambda \in R$$

$\therefore$ કોઈ પણ λ માટે આપેલા સદિશો સમતલીય થશે નહિ.

$\therefore \lambda$ ની કિંમતોનો ગણ $\emptyset$ થશે.

જવાબ : (D)

(99) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ અસમતલીય શૂન્યેતર સદિશો છે. જો $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ અને $\vec{c}'$ એ અનુક્રમે $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ ના વ્યસ્ત

સદિશ હોય, તો $\vec{a}' \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}' \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{c}' \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = \dots\dots$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $\vec{a}'$ એ $\vec{a}$ નો વ્યસ્ત સદિશ છે.

$$\therefore \vec{a}' \cdot \vec{a} = 1 \text{ અને } \vec{a}' \cdot \vec{b} = 0 = \vec{a}' \cdot \vec{c}$$

$$\therefore \vec{a}' \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}' \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{c}' \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 3$$

જવાબ : (D)