1004 (New) (V)

No. of Questions–15

No. of Printed Pages–8 **Regd. No.**

MATHEMATICS (Bridge Course)—I

Paper I

(English Version)

: 3 Hours *Max. Marks : 75*

Note :— Answer *all* questions from Section A and *three* questions from Section B.

SECTION A 10×3=30

Note :— (*i*) Answer ALL questions.

(*ii*) Each question carries THREE marks.

1. If $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, then show that $f(\tan \theta) = \cos 2\theta$.

2. If $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, then find $A \cdot A^T$.

3. Compute :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3 + x} - e^3}{x}.$$

4. Find the derivative of $f(x) = e^x(x^2 + 1)$.

5. Find the equation of locus of a point which is equidistant from A(–3, 2) and B(0, 4).

6. Find the angle between the lines $2x + y + 4 = 0$ and $y - 3x = 7$.

7. Show that the points A(3, –2, 4), B(1, 1, 1) and C(–1, 4, –2) are collinear.

8. Show that :

$$\cos 100^\circ \cos 40^\circ + \sin 100^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2}.$$

9. Prove that :

$$\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0.$$

10. If $\cosh x = \frac{5}{2}$, then prove that $\cosh 2x = \frac{23}{2}$ and $\sinh 2x = \frac{5\sqrt{21}}{2}$.

SECTION B 3×15=45

Note :— (*i*) Answer ANY THREE questions.

(*ii*) Each question carries FIFTEEN marks.

11. (*i*) (*a*) Show that :

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots\dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

for all $n \in \mathbf{N}$ by mathematical induction.

(*b*) Show that :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a).$$

Or

(*ii*) (*a*) If

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

then show that Adj A = $3A^T$.

(b) Find the volume of the tetrahedron having the edges $\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{i} - \bar{j}$ and $\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$.

12. (i) (a) If f is given by

$$f(x) = \begin{cases} k^2x - k & \text{if } x \geq 1 \\ 2 & \text{if } x < 1 \end{cases}$$

is a continuous function on R, then find the value of k.

(b) If $y = \sec\left(\sqrt{\tan x}\right)$, then find $\frac{dy}{dx}$.

Or

(ii) (a) If $f(x) = \log(x)$ $(x > 0)$, then prove that $f'(x) = \frac{1}{x}$ by first principle of derivation.

(b) Find the equations of the tangent and the normal to the curve $y = 5x^4$ at the point $(1, 5)$.

13. (i) (a) If the straight lines $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$, $cx + ay + b = 0$ are concurrent, then prove that $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

(b) Find the length of the perpendicular drawn from the point of intersection of the lines $3x + 2y + 4 = 0$ and $2x + 5y - 1 = 0$ to the straight line $7x + 24y - 15 = 0$.

Or

(ii) (a) When the origin is shifted to $(-1, 2)$ by the translation of axes, find the transformed equation to $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

(b) If P(2, 3, –6), Q(3, –4, 5) are two points, find the dc's of $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{PQ}$ where O is the origin.

14. (i) (a) If A + B + C = 180°, then prove that :

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

(b) If A + B + C = 90°, then prove that :

$\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C$.

Or

(ii) (a) If $a \cos 2\theta + b \sin 2\theta = c$, then prove that :

$\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = \frac{2b}{c+a}$ and $\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 = \frac{c-a}{c+a}$.

(b) Solve :

$\cot^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\cot x + \sqrt{3} = 0$.

15. (i) (a) If the points whose position vectors are $3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$, $2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$, $-\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ and $4\bar{i} + 5\bar{j} + \lambda\bar{k}$ are coplanar, then show that $\lambda = -\frac{146}{17}$.

(b) Find the lengths of normal and subnormal at a point on the curve :

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Or

(ii) (a) Find the circumcentre of the triangle whose vertices are (–2, 3), (2, –1) and (4, 0).

(b) If $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{a+b}{a-b}$, then prove that $a \tan\beta = b \tan\alpha$.

1004 (New)

(Telugu Version)

Time : 3 Hours *Max. Marks : 75*

గమనిక :— విభాగము A నుండి అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు వ్రాయండి. మరియు విభాగము B నుండి **మూడు** ప్రశ్నలకు జవాబులు వ్రాయండి.

విభాగము A 10×3=30

గమనిక :— (*i*) **అన్ని** ప్రశ్నలకు జవాబులు వ్రాయండి.

(*ii*) ప్రతి ప్రశ్నకు **మూడు** మార్కులు..

1. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ అయితే $f(\tan\theta) = \cos 2\theta$ అని చూపండి.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ అయితే $A \cdot A^T$ ను కనుగొనండి.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3+x} - e^3}{x}$ ను గణించండి.

4. $f(x) = e^x(x^2 + 1)$ యొక్క అవకలజం కనుగొనండి.

5. A(–3, 2) మరియు B(0, 4) బిందువుల నుండి సమాన దూరంలో గల బిందువు బిందుపథ సమీకరణం వ్రాయండి.

6. $2x + y + 4 = 0$ మరియు $y - 3x = 7$ రేఖల మధ్య గల కోణమును కనుగొనండి.

7. A(3, –2, 4), B(1, 1, 1) మరియు C(–1, 4, –2) బిందువులు సరేఖీయాలు అని చూపండి.

8. $\cos 100^\circ \cos 40^\circ + \sin 100^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2}$ అని చూపండి.

9. $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$ అని చూపండి.

10. $\cosh x = \frac{5}{2}$ అయితే $\cosh 2x = \frac{23}{2}$ మరియు $\sinh 2x = \frac{5\sqrt{21}}{2}$ అని నిరూపించండి.

విభాగము B $\qquad 3\times15=45$

గమనిక :— (i) ఏవేని మూడు ప్రశ్నలకు జవాబులు వ్రాయండి.

(ii) ప్రతి ప్రశ్నకు పదిహేను మార్కులు.

11. (i) (a) గణితానుగమన సూత్రమును ఉపయోగించి ప్రతీ :

$$n \in \mathbf{N} \text{ కు } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

అని నిరూపించండి.

(b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ అని చూపండి.

లేదా

(ii) (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే

అను $A \cdot A^T = 3I$ ...

(b) $\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{i} - \bar{j}$ మరియు $\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ లు అంచులుగా కలిగిన చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

12. (i) (a) $f(x) = \begin{cases} k^2x - k & x \geq 1 \text{ అయినపుడు} \\ 2 & x < 1 \text{ అయినపుడు} \end{cases}$ గా

నిర్వచితమయిన ప్రమేయం R పై అవిచ్ఛిన్నమయితే k విలువ కనుగొనండి.

(b) $y = \sec\left(\sqrt{\tan x}\right)$ అయితే $\dfrac{dy}{dx}$ ను కనుగొనండి.

లేదా

(ii) (a) $f(x) = \log(x)$ $(x > 0)$, అయితే అవకలజ ప్రాథమిక సూత్రమును ఉపయోగించి $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ అని నిరూపించండి.

(b) $y = 5x^4$ వక్రానికి బిందువు (1, 5) వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ రేఖ సమీకరణాలు కనుగొనండి.

13. (i) (a) $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$, $cx + ay + b = 0$ సరళరేఖలు అనుషక్తాలు అయితే $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ అని చూపండి.

(b) $3x + 2y + 4 = 0$ మరియు $2x + 5y - 1 = 0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు నుండి సరళరేఖ $7x + 24y - 15 = 0$ కు గల లంబదూరమును కనుగొనండి.

లేదా

(ii) (a) అక్షాల సమాంతర పరివర్తనము ద్వారా మూల బిందువును (–1, 2) కు మార్చినపుడు $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ యొక్క రూపాంతర సమీకరణం కనుగొనండి.

(b) మూలబిందువు O, మరియు P(2, 3, –6), Q(3, –4, 5) లు అయితే $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{PQ}$ ల దిక్‌కొసైన్‌లు కనుగొనండి.

14. (i) (a) $A + B + C = 180°$, అయితే :
$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ అని నిరూపించండి.

(b) $A + B + C = 90°$ అయితే :
$\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C$ అని నిరూపించండి.

లేదా

(ii) (a) $a \cos 2\theta + b \sin 2\theta = c$ అయితే :

$\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = \frac{2b}{c+a}$ మరియు

$\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 = \frac{c-a}{c+a}$ అని నిరూపించండి.

(b) $\cot^2 x - (\sqrt{3}+1)\cot x + \sqrt{3} = 0$ ను సాధించండి.

15. (i) (a) $3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$, $2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$, $-\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ మరియు $4\bar{i} + 5\bar{j} + \lambda\bar{k}$ లు స్థాన సదిశలుగా కలిగిన బిందువులు సతలీయాలు అయితే $\lambda = -\frac{146}{17}$ అని చూపండి.

(b) $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ వక్రంపై ఏదేని బిందువు వద్ద అభిలంబ ఖండము, ఉపలంబ ఖండములను కనుగొనండి.

లేదా

(ii) (a) (–2, 3), (2, –1) మరియు (4, 0) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ పరికేంద్రం కనుగొనండి..

(b) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{a+b}{a-b}$ అయితే $a \tan\beta = b \tan\alpha$. అని నిరూపంచండి.