(133) પરવલય $x^2 = 8y$ અને ઉપવલય $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ નાં છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ ......

(A) $y - 3 = 0$ (B) $y + 3 = 0$ (C) $3y + 1 = 0$ (D) $3y - 1 = 0$

ઉકેલ : $x^2 = 8y$ અને $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ ઉકેલતાં,

$\frac{8y}{3} + y^2 = 1$

$\therefore\ 3y^2 + 8y - 3 = 0$

$\therefore\ (3y-1)(y+3) = 0$

$\therefore\ y = \frac{1}{3}$ અથવા $y = -3$

બીજી રીત : માંગેલ વક્ર $x^2 - 8y + \lambda\left(\frac{x^2}{3} + y^2 - 1\right) = 0$

તે રેખા હોવાથી $\lambda = -3$

$\therefore\ 3y^2 + 8y - 3 = 0$

માંગેલ રેખાઓ $y = \frac{1}{3}$ અથવા $y = -3$ છે.

પરંતુ $x^2 = 8y$ હોવાથી $y > 0$

$\therefore$ માંગેલ રેખા $3y - 1 = 0$ છે. **જવાબ : (D)**

જો $y = \frac{1}{3}$ તો $x^2 = \frac{8}{3}$. આથી $x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

અને જો $y = -3$ તો $x^2 = -24$ જે શક્ય નથી.

$\therefore$ બંને વક્રનાં છેદબિંદુઓ $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$ અને $\left(\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$

$\therefore$ અહી, બંને બિંદુઓના y-યામ સમાન છે તેથી બંને બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા સમક્ષિતિજ રેખા મળે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $y = \frac{1}{3}$ એટલે કે $3y - 1 = 0$. **જવાબ : (D)**

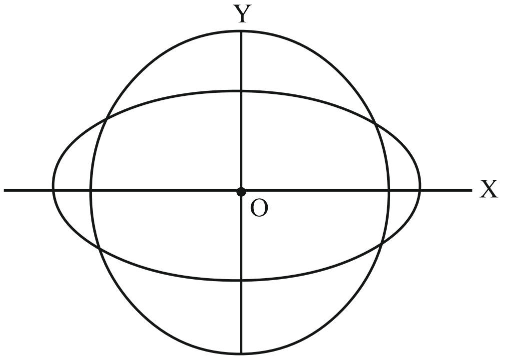
(134) જો a અને c ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય અને ઉપવલય $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ નાં ચાર ભિન્ન બિંદુઓ વર્તુળ $x^2 + y^2 = 9a^2$ પર પણ હોય, તો ......

(A) $9ac - 9a^2 - 2c^2 < 0$ (B) $6ac - 9a^2 - 2c^2 < 0$

(C) $9ac - 9a^2 - 2c^2 > 0$ (D) $6ac + 9a^2 - 2c^2 > 0$

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ પરથી $a^2 = 4c^2, b^2 = c^2$. આથી $a > b$,

વળી, વર્તુળ $x^2 + y^2 = 9a^2$ નું કેન્દ્ર $(0, 0)$ તથા ત્રિજ્યા $3a$ છે.



આકૃતિ 9.62

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે $3a > c$ અને $3a < 2c$ થશે.

$\therefore\ c < 3a < 2c$

હવે, $c < 3a < 2c \Rightarrow c^2 < 9a^2 < 4c^2$ (1)

તથા $c < 3a < 2c \Rightarrow 2c^2 < 6ac < 4c^2$ (2)

(1) અને (2) પરથી, $c^2 + 2c^2 < 9a^2 + 6ac < 4c^2 + 4c^2$

$\therefore\ 3c^2 < 9a^2 + 6ac < 8c^2$

$\therefore\ 3c^2 - 2c^2 < 9a^2 + 6ac - 2c^2 < 8c^2 - 2c^2$

$\therefore\ c^2 < 9a^2 + 6ac - 2c^2 < 6c^2$

$\therefore\ 9a^2 + 6ac - 2c^2 > 0$ **જવાબ : (D)**

(135) જો $\overline{OB}$ એ ઉપવલયની અર્ધ ગૌણ અક્ષ હોય, S_1 તથા S_2 તેની નાભિઓ હોય અને $\overline{S_1B}$ અને $\overline{S_2B}$ વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય, તો ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતાનો વર્ગ ......

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : અહીં $O(0, 0), B(0, b)$ તથા નાભિ $S_1(ae, 0)$ અને $S_2(-ae, 0)$ છે.

હવે, $m\angle S_1 B S_2 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\overline{S_1B}$ નો ઢાળ $\times$ $\overline{S_2B}$ નો ઢાળ $= -1$

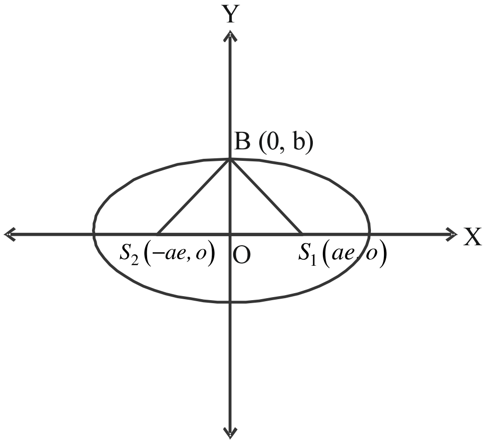
$\therefore\ \left(\frac{b-0}{0-ae}\right)\left(\frac{b-0}{0+ae}\right) = -1$

$\therefore\ b^2 = a^2e^2$

$\therefore\ a^2(1-e^2) = a^2e^2$

$\therefore\ 1 - e^2 = e^2$

$\therefore\ 2e^2 = 1$



આકૃતિ 9.63

આથી $e^2 = \frac{1}{2}$ **જવાબ : (A)**

(136) $5x + 7y = 0$ જેનો અનંત સ્પર્શક હોય અને $(-7, 0)$ શિરોબિંદુવાળા અતિવલયનું સમીકરણ ......

(A) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ (B) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$ (C) $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{25} = 1$ (D) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{49} = 1$

ઉકેલ : $5x + 7y = 0$ અનંત સ્પર્શક છે. તેથી સ્પષ્ટ છે કે બીજો અનંત સ્પર્શક $5x - 7y = 0$ મળે તથા શિરોબિંદુ $(-7, 0)$ છે.

$\therefore$ માંગેલ અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$. **જવાબ : (A)**

(137) જો $(k-6)x^2 + (k-2)y^2 = 24$ લંબાતિવલય દર્શાવે, તો k = ...

(A) 6 (B) 2 (C) 4 (D) એક પણ કિંમત ન મળે.

ઉકેલ : આપેલ વક્ર $(k-6)x^2 + (k-2)y^2 = 24$ લંબાતિવલય દર્શાવે, તો $k - 6 \neq 0, k - 2 \neq 0$.

આપેલ વક્ર $\frac{x^2}{\frac{24}{k-6}} + \frac{y^2}{\frac{24}{k-2}} = 1$

તથા x^2 નો સહગુણક $+ y^2$ નો સહગુણક $= 0$.

$\therefore\ k-6+k-2=0$

$\therefore\ 2k=8$

$\therefore\ k=4$ **જવાબ : (C)**

(138) જો $|m| < \frac{b}{a}$ તો અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ના m ઢાળવાળા ...... સ્પર્શક મળે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

ઉકેલ : રેખા $y = mx + d$ સ્પર્શક બને તે માટેની જરૂરી શરત : $c^2 = a^2m^2 - b^2$

$\therefore\ \frac{c^2}{a^2} = m^2 - \frac{b^2}{a^2}$

હવે, જો $|m| < \frac{b}{a}$, તો $m^2 < \frac{b^2}{a^2}$

$\therefore\ m^2 - \frac{b^2}{a^2} < 0$. આથી, $\frac{c^2}{a^2} < 0$ આ શક્ય નથી.

$\therefore$ જો $|m| < \frac{b}{a}$, તો અતિવલયનો m ઢાળવાળો કોઈ સ્પર્શક ન મળે. **જવાબ : (D)**

(139) અતિવલય $\frac{4x^2}{81} - \frac{2y^2}{25} = 1$ પરના બિંદુ $\left(\frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}\right)$ ના ઉત્કેન્દ્રીકોણનું માપ ......

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$ (C) $-\frac{\pi}{3}$ (D) $-\frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : અહીં અતિવલય $\frac{4x^2}{81} - \frac{2y^2}{25} = 1$ પરથી $a^2 = \frac{81}{4}, b^2 = \frac{25}{2}$.

જો અતિવલય પરનું બિંદુ $\left(\frac{9}{2}sec\theta, \frac{5}{\sqrt{2}}tan\theta\right)$ હોય, તો $\frac{9}{2}sec\theta = \frac{9}{\sqrt{2}}$, $\frac{5}{\sqrt{2}}tan\theta = \frac{-5}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ sec\theta = \sqrt{2},\ tan\theta = -1$

$\therefore\ P(\theta)$ ચતુર્થ ચરણમાં છે તથા $\theta = -\frac{\pi}{4}$ **જવાબ : (B)**

(140) અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ની ઉત્કેન્દ્રતા e હોય તથા અતિવલયના અનંત સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો e = ...

(A) $tan\,\frac{\alpha}{2}$ (B) $sec\,\frac{\alpha}{2}$ (C) $sec\,\frac{\alpha}{2} \cdot tan\,\frac{\alpha}{2}$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : જો અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ની ઉત્કેન્દ્રતા e હોય, તો

$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$. આથી, $e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$

હવે, જો અતિવલયના અનંત સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો $tan\,\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$

$\therefore\ sec^2\frac{\alpha}{2} = 1 + tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = e^2$

$\therefore\ e = sec\frac{\alpha}{2}$ $(e > 1)$ **જવાબ : (B)**

(141) અતિવલય $3\sqrt{3}x^2 - 7\sqrt{3}y^2 = 63$ ના અનંત સ્પર્શકો પર અતિવલય પરના કોઈ બિંદુમાંથી દોરેલ લંબની લંબાઈઓનો ગુણાકાર ......

(A) $21\sqrt{3}$ (B) $\frac{21\sqrt{3}}{5}$ (C) $\frac{21\sqrt{3}}{10}$ (D) $\frac{21\sqrt{3}}{50}$

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $\frac{3\sqrt{3}\,x^2}{63} - \frac{7\sqrt{3}\,y^2}{63} = 1$ છે.

$\therefore \frac{x^2}{7\sqrt{3}} - \frac{y^2}{3\sqrt{3}} = 1$. આથી $a^2 = 7\sqrt{3},\ b^2 = 3\sqrt{3}$

અતિવલય પરના (x_1, y_1)માંથી અતિવલયના અનંત સ્પર્શકો પર દોરેલા લંબની લંબાઈ અનુક્રમે p_1 અને p_2 હોય, તો,

$$p_1 = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad p_2 = \frac{|bx_1 + ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$p_1 p_2 = \frac{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore\ p_1 p_2 = \frac{(7\sqrt{3})(3\sqrt{3})}{7\sqrt{3} + 3\sqrt{3}} = \frac{21 \times 3}{10\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3}}{10}$$

જવાબ : (C)

(142) અતિવલય $7x^2 - 12y^2 = 84$ પરના કોઈ બિંદુથી નાભિ સુધીના અંતરનો તફાવત ......

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $5\sqrt{3}$

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{7} = 1$ પરથી $a^2 = 12,\ b^2 = 7$.

આપણે જાણીએ છીએ કે, અતિવલય પરનું કોઈ બિંદુ P હોય તથા નાભિઓ અનુક્રમે S અને S' હોય, તો

$|SP - S'P| = 2a = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ **જવાબ : (C)**

(143) જેની નાભિઓ $(3, 4)$ અને $(24, 7)$ હોય તથા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતાં હોય, તેવા અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા = ...

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

ઉકેલ : ધારો કે $S(3, 4)$ અને $S'(24, 7)$ છે તથા $P(0, 0)$ અતિવલય પરનું બિંદુ છે.

$\therefore\ |S'P - SP| = 2a$ પરથી,

$$\left|\sqrt{(24-0)^2 + (7-0)^2} - \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}\right| = 2a$$

$\therefore\ \sqrt{625} - \sqrt{25} = 2a$. આથી, $2a = 20$

વળી, $SS' = \sqrt{(24-3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{441 + 9} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$

પરંતુ $SS' = 2ae$, જ્યાં e ઉત્કેન્દ્રતા છે.

$\therefore \ 2a = \frac{SS'}{e}$

$\therefore \ 15\sqrt{2} = 20\,e$

$\therefore \ e = \frac{15\sqrt{2}}{20} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ **જવાબ : (C)**

(144) અતિવલય અને તેના અનુબદ્ધ અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા અનુક્રમે e_1 અને e_2 હોય, તો e_1 અને e_2 વચ્ચેનો સંબંધ ......

(A) $e_1 + e_2 = 2$ (B) $\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} = 1$ (C) $e_1^2 + e_2^2 = 2$ (D) $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$

ઉકેલ : અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ છે તથા તેની ઉત્કેન્દ્રતા e_1 લઈએ તથા અનુબદ્ધ અતિવલય $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ની ઉત્કેન્દ્રતા e_2 લઈએ.

$\therefore \ b^2 = a^2\left(e_1^2 - 1\right)$ તથા $a^2 = b^2\left(e_2^2 - 1\right)$

$\therefore \ e_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$ તથા $e_2^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$

$\therefore \ \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$ **જવાબ : (D)**

(145) અતિવલય $x^2 - y^2 = 16$ ના અનંત સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $x^2 - y^2 = 16$ લંબાતિવલય દર્શાવે છે. તેથી તેના અનંત સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{2}$ છે.

જવાબ : (D)

(146) લંબાતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા e = ...

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $-\sqrt{2}$ (D) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : લંબાતિવલયમાં પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ = ગૌણ અક્ષની લંબાઈ

$\therefore$ લંબાતિવલયનું સમીકરણ $x^2 - y^2 = a^2$ છે. આથી, $a^2 = a^2\left(e^2 - 1\right)$

$\therefore \ e^2 = 2$ આથી $e = \sqrt{2}$ **જવાબ : (A)**

(147) જો $(a-3)x^2 + ay^2 = 9$ વક્ર લંબાતિવલય હોય, તો a = ...

(A) 0 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $\pm\frac{3}{2}$

ઉકેલ : લંબાતિવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $x^2 - y^2 = a^2$ અર્થાત્ $a = b$

$\therefore \ a - 3 = -a$

$\therefore \ a = \frac{3}{2}$ **જવાબ : (B)**

(148) અતિવલય $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=-1$ ના સહાયકવૃત્તનું સમીકરણ ......

(A) $x^2+y^2=16$ (B) $x^2+y^2=25$ (C) $x^2+y^2=9$ (D) $x^2+y^2=41$

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=-1$

$\therefore$ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ પરથી $b^2=25,\ a^2=16$

$\therefore$ સહાયકવૃત્તનું સમીકરણ $x^2+y^2=b^2$ પરથી, $x^2+y^2=25$ **જવાબ : (B)**

(149) અતિવલય $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ ના અનંત સ્પર્શકોના સમીકરણ ......

(A) $x=\pm\frac{25}{16}y$ (B) $x=\pm\frac{4}{5}y$ (C) $y=\pm\frac{5}{4}x$ (D) $y=\pm\frac{4}{5}x$

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ પરથી $a=5,\ b=4$.

$\therefore$ માંગેલ અતિવલયના અનંત સ્પર્શકોનાં સમીકરણો,

$y=\pm\frac{b}{a}x$ પરથી $y=\pm\frac{4}{5}x$ **જવાબ : (D)**

(150) અતિવલય $y^2-16x^2=16$ ના નાભિલંબની લંબાઈ ......

(A) 2 (B) –2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : અતિવલય $y^2-16x^2=16$ પરથી $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{1}=1$. આથી $a^2=1,\ b^2=16$. આથી, મુખ્ય અક્ષ Y-અક્ષ છે.

$\therefore$ નાભિલંબની લંબાઈ $=\frac{2a^2}{b}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **જવાબ : (D)**

(151) અતિવલય $y^2-64x^2=64$ ના મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ ......

(A) 16 (B) 32 (C) 4 (D) 8

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $y^2-64x^2=64$ પરથી,

$\therefore$ $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{1}=1$

$\therefore$ $a^2=1,\ b^2=64$. આથી $b=8$ અહીં મુખ્ય અક્ષ Y-અક્ષ છે.

$\therefore$ મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $=2b=2(8)=16$ **જવાબ : (A)**

(152) જો વક્ર $xy=c^2$ પરના બિંદુ $\left(ct,\frac{c}{t}\right)$ પરનો અભિલંબ વક્રને ફરી $\left(ct',\frac{c}{t'}\right)$ આગળ છેદે તો ......

(A) $t'=-\frac{1}{t^3}$ (B) $t'=-\frac{1}{t}$ (C) $t'=-\frac{1}{t^2}$ (D) $t'=-\frac{1}{t^4}$

ઉકેલ : વક્ર $xy=c^2$ પરના બિંદુ $\left(ct,\frac{c}{t}\right)$ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ મેળવીએ,

$xy=c^2$

$\therefore\ x\frac{dy}{dx}+y=0.$ આથી $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ $=\frac{x}{y}=\frac{ct}{\frac{c}{t}}=t^2$

$\therefore\ \left(ct, \frac{c}{t}\right)$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $y-\frac{c}{t}=t^2(x-ct)$

$\therefore\ t^3x-ty-ct^4+c=0$ એટલે કે $ty=t^3x-ct^4+c$ છે.

તે $\left(ct', \frac{c}{t'}\right)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ \frac{t\cdot c}{t'}=t^3(ct')-ct^4+c$

$\therefore\ t=t^3t'^2-t^4t'+t'$

$\therefore\ t-t'=t'\cdot t^3(t'-t)$ આથી $t'\cdot t^3=\frac{t-t'}{t'-t}=-1$ આથી $t'=-\frac{1}{t^3}$ $(t-t'\neq 0)$ **જવાબ : (A)**

(153) અતિવલય $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ પરના બિંદુ $\left(6\sqrt{2}, 3\right)$ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ ......

(A) $\sqrt{2}x+y-15=0$ (B) $\sqrt{2}x+y+15=0$

(C) $\sqrt{2}x-y-15=0$ (D) $\sqrt{2}x-y+15=0$

ઉકેલ : અતિવલય $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ પરના બિંદુ (x_1, y_1) આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}+\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=0$ છે.

તેથી આપેલા અતિવલય $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ પરના બિંદુ $\left(6\sqrt{2}, 3\right)$ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ,

$$\frac{x-6\sqrt{2}}{\frac{6\sqrt{2}}{36}}+\frac{y-3}{\frac{3}{9}}=0$$

$\therefore\ 3\sqrt{2}\left(x-6\sqrt{2}\right)+3(y-3)=0$

$\therefore\ \sqrt{2}x+y-15=0$ **જવાબ : (A)**

(154) રેખા $y=\alpha x+\beta$ એ અતિવલય $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ નો સ્પર્શક હોય, તો બિંદુ $P(\alpha, \beta)$ ના બિંદુગણનું સમીકરણ ...... વક્ર દર્શાવે છે.

(A) વર્તુળ (B) ઉપવલય (C) પરવલય (D) અતિવલય

ઉકેલ : અહીં રેખા $y=\alpha x+\beta$ પરથી $m=\alpha, c=\beta$,

હવે, રેખા $y=\alpha x+\beta$ એ અતિવલય $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ નો સ્પર્શક છે.

$\therefore\ c^2=a^2m^2-b^2$ આથી, $\beta^2=a^2\alpha^2-b^2$ એટલે કે $a^2\alpha^2-\beta^2=b^2$

$\therefore$ તે વ્યાપક રીતે $\frac{x^2}{\frac{b^2}{a^2}}-\frac{y^2}{b^2}=1$ છે.

$\therefore$ સમીકરણ અતિવલય દર્શાવે છે. **જવાબ : (D)**

(155) અતિવલય $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ તથા અતિવલય $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ ......

(A) $y=\pm x\pm\sqrt{b^2-a^2}$ (B) $y=-x\pm\sqrt{a^2-b^2}$

(C) $y=\pm x\mp\left(a^2-b^2\right)$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલા અતિવલય $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ તથા અતિવલય $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ $y=mx+c$ છે.

તે માટેની જરૂરી શરત અનુક્રમે $c^2=a^2m^2-b^2$ અને $c^2=a^2-b^2m^2$

$a^2m^2-b^2=a^2-b^2m^2$

$\therefore\ m^2\left(a^2+b^2\right)=a^2+b^2$

$\therefore\ m=\pm 1$

$\therefore\ c^2=a^2-b^2$. આથી, $c=\pm\sqrt{a^2-b^2}$

$\therefore$ માંગેલ સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ $y=x\pm\sqrt{a^2-b^2}$, $y=-x\pm\sqrt{a^2-b^2}$ **જવાબ : (B)**

(156) અતિવલય $x^2-y^2=a^2$ અને $xy=a^2$ ની ઉત્કેન્દ્રતાનો ગુણોત્તર = ...

(A) 1:1 (B) $\sqrt{2}:1$ (C) $2a^2:a^2$ (D) $a^2:2a^2$

ઉકેલ : આપેલ વક્ર $x^2-y^2=a^2$ લંબાતિવલય દર્શાવે છે, તેથી તેની ઉત્કેન્દ્રતા e_1 હોય, તો $e_1=\sqrt{2}$ આપેલ વક્ર $xy=a^2$ પણ લંબાતિવલય દર્શાવે છે, તેથી તેની ઉત્કેન્દ્રતા e_2 હોય, તો $e_2=\sqrt{2}$

$\therefore\ \frac{e_1}{e_2}=1$.

આથી માંગેલ ગુણોત્તર $=1:1$ **જવાબ : (A)**

(157) અતિવલય $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$ ના સ્પર્શકો કાટખૂણે છેદતાં હોય, તો તેનાં છેદબિંદુઓ જેના પર હોય તેવા વક્રનું સમીકરણ ......

(A) $x^2+y^2=3$ (B) $x^2+y^2=4$ (C) $x^2+y^2=7$ (D) ન મળે.

ઉકેલ : અતિવલય $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$ પરથી $a^2=7$, $b^2=3$. સમતલમાં આવેલ કોઈક બિંદુમાંથી અતિવલયને દોરેલા સ્પર્શકો પરસ્પર લંબ છે. આથી તે બિંદુ નિયામિકાવૃત્ત પર આવેલું છે.

$\therefore$ માંગેલ વક્રનું બિંદુગણનું સમીકરણ $x^2+y^2=a^2-b^2$ પરથી,

$x^2+y^2=4$ **જવાબ : (B)**

(158) ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (જ્યાં $a>b$) અને અતિવલય $x^2-y^2=c^2$ પરસ્પર લંબચ્છેદી વક્રો હોય, તો ......

(A) $a^2+b^2=2c^2$ (B) $b^2-a^2=2c^2$ (C) $a^2b^2=2c^2$ (D) $a^2-b^2=2c^2$

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલયના સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન લેતાં,

$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$. આથી $\frac{dy}{dx}=\frac{-b^2x}{a^2y}$

આપેલ લંબાતિવલયના સમીકરણ $x^2 - y^2 = c^2$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન લેતાં,

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0. \text{ આથી } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

બંને વક્રો પરસ્પર લંબચ્છેદી છે.

છેદબિંદુ આગળ (પ્રથમ વક્રનો ઢાળ) (બીજા વક્રનો ઢાળ) $= -1$

$$\therefore \left(\frac{-b^2x}{a^2y}\right)\left(\frac{x}{y}\right) = -1. \text{ આથી } \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \quad (1)$$

આપેલ ઉપવલયમાં (1) ની કિંમત મૂકતા $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ (2)

આપેલ લંબાતિવલય $x^2 - y^2 = c^2$ છે. (3)

(2) અને (3) પરથી, $\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} = c^2$

$\therefore\ a^2 - b^2 = 2c^2$ **જવાબ : (D)**

(159) અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ની બે નાભિઓ વચ્ચેના અંતર અને બે નિયામિકાઓ વચ્ચેના અંતરનો ગુણોત્તર $3:2$ હોય, તો $a:b =$ ......

(A) $1:2$ (B) $2:1$ (C) $\sqrt{2}:1$ (D) $\sqrt{3}:\sqrt{2}$

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ની બે નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર $= 2ae$. બે નિયામિકા વચ્ચેનું અંતર $= \frac{2a}{e}$

આપેલ શરત મુજબ, $\frac{2ae}{\frac{2a}{e}} = \frac{3}{2}$. આથી, $e^2 = \frac{3}{2}$

હવે, $b^2 = a^2\left(e^2 - 1\right)$

$\therefore\ \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$. આથી, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{1}$

$\therefore\ a:b = \sqrt{2}:1$ **જવાબ : (C)**

(160) $16x^2 - 36y^2 + 32x + 72y - 596 = 0$ ની નાભિના યામ ......

(A) $\left(2\sqrt{13}, 0\right)$ (B) $\left(-2\sqrt{13}, 0\right)$ (C) $\left(\pm 2\sqrt{13}, 0\right)$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ $16x^2 - 36y^2 + 32x + 72y - 596 = 0$ પરથી,

$$16x^2 + 32x + 16 - 36y^2 + 72y - 36 - 576 = 0$$

$$\therefore\ 16\left(x^2 + 2x + 1\right) - 36\left(y^2 - 2y + 1\right) = 576$$

$$\therefore\ \frac{(x+1)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

મુખ્ય અક્ષ X-અક્ષ છે તથા $a^2 = 36,\ b^2 = 16$

હવે, $b^2 = a^2\left(e^2 - 1\right)$ પરથી, $e^2 = \frac{16}{36} + 1 = \frac{13}{9}$. આથી, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$

અતિવલય $\frac{(x+1)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ ની નાભિના યામ $(x', y') = (\pm ae, 0) = \left(\pm\frac{6\times\sqrt{13}}{3}, 0\right) = \left(\pm 2\sqrt{13}, 0\right)$

તેથી $x + 1 = 2\sqrt{13},\ y - 1 = 0$

$\therefore\ x = \pm 2\sqrt{13} - 1,\ y = 1$

$\therefore$ નાભિના યામ $\left(2\sqrt{13} - 1, 1\right), \left(-2\sqrt{13} - 1, 1\right)$ **જવાબ : (D)**

(161) અતિવલય $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 7x - 5y + 11 = 0$ ના અનંત સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $tan^{-1}\frac{3}{4}$ (B) $tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$ (C) $tan^{-1}\frac{4}{3}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 7x - 5y + 11 = 0$ પરથી,

$a = 3,\ 2h = 10,\ b = 3$

અનંત સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $= tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right)$

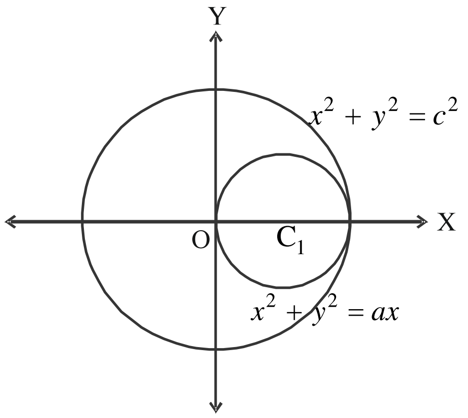
$= tan^{-1}\frac{2\sqrt{25 - 9}}{6}$

$= tan^{-1}\frac{4}{3}$ **જવાબ : (C)**

(162) બે વર્તુળો $x^2 + y^2 = ax$ અને $x^2 + y^2 = c^2\ (c > 0)$ એકબીજાને સ્પર્શે, તો ......

(A) $|a| = c$ (B) $a = 2c$ (C) $|a| = 2c$ (D) $2|a| = c$

(AIEEE : 2011)



આકૃતિ 9.64

ઉકેલ : $x^2 + y^2 = ax$ પરથી $x^2 + y^2 - ax = 0$

તેને $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ સાથે સરખાવતાં, $2g = -a,\ 2f = 0,\ c = 0$

$\therefore$ કેન્દ્ર $C_1 = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$, ત્રિજ્યા $r_1 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \frac{|a|}{2}$

વળી, વર્તુળ $x^2+y^2=c^2$નું કેન્દ્ર $C_2=(0,0)$, $r_2=c$

અહીં, સ્પષ્ટ છે કે, બંને વર્તુળોના સમીકરણ પરથી એક વર્તુળનું કેન્દ્ર (0, 0) છે અને બીજું વર્તુળ (0, 0)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ બંને વર્તુળો અંદરથી સ્પર્શે છે.

$\therefore\ C_1C_2=|r_1-r_2|$

$\therefore\ \left(\frac{a}{2}-0\right)^2+(0-0)^2=\left(\frac{|a|}{2}-c\right)^2$

$\therefore\ \frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-2\left(\frac{|a|}{2}\right)c+c^2$

$\therefore\ c=|a| \qquad (c\neq 0)$ **જવાબ : (A)**

(163) (0, 3) કેન્દ્ર અને 2 ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને સ્પર્શતા અને X-અક્ષને સ્પર્શતા વર્તુળના કેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) વર્તુળ (B) ઉપવલય (C) પરવલય (D) અતિવલય (AIEEE : 2005)

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર (*h, k*) છે અને r_1 અને r_2 બે વર્તુળોની ત્રિજ્યા છે.

$\therefore\ r_1=2,\quad r_2=|k|$

હવે, બે વર્તુળ એકબીજાને સ્પર્શે છે.

$\therefore\ C_1C_2=|r_1\pm r_2|$

$\therefore\ (h-0)^2+(k-3)^2=|2\pm|k||^2$

$\therefore\ h^2+k^2-6k+9=4\pm4|k|+k^2$

$\therefore\ h^2-6k+5=4k$ અથવા $h^2-6k+5=-4k$

$\therefore\ h^2-10k+5=0$ અથવા $h^2-2k+5=0$

$\therefore$ વ્યાપક સ્વરૂપે કેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ,

$x^2=10y-5$ અથવા $x^2=2y-5$

આ સમીકરણો પરવલય દર્શાવે છે. **જવાબ : (C)**

(164) (*a, b*)માંથી પસાર થતા અને વર્તુળ $x^2+y^2=p^2$ ને લંબચ્છેદી વર્તુળના કેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(AIEEE : 2005)

(A) $2ax+2by-(a^2-b^2+p^2)=0$ (B) $x^2+y^2-3ax-4by-(a^2+b^2-p^2)=0$

(C) $2ax+2by-(a^2+b^2+p^2)=0$ (D) $x^2+y^2-2ax-3by+(a^2-b^2-p^2)=0$

ઉકેલ : ધારો કે (*a, b*)માંથી પસાર થતા વર્તુળનું કેન્દ્ર $C_1(h,k)$ અને ત્રિજ્યા r_1 છે.

તથા $x^2+y^2=p^2$નું કેન્દ્ર $C_2(0,0)$ અને ત્રિજ્યા $r_2=p$ થશે.

$\therefore$ બંને વર્તુળો કાટખૂણે છેદે છે, તો

$$(C_1C_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$$

$$\therefore \quad h^2+k^2 = r_2^2+(h-a)^2+(k-b)^2$$

$$\therefore \quad h^2+k^2 = p^2+h^2+k^2-2ha-2kb+a^2+b^2$$

$$\therefore \quad p^2+a^2+b^2-2ha-2kb = 0$$

$\therefore$ વ્યાપક સ્વરૂપે માંગેલ બિંદુગણનું સમીકરણ,

$p^2+a^2+b^2-2ax-2by = 0$ એટલે કે

$2ax+2by = (a^2+b^2+p^2)$ **જવાબ : (C)**

(165) વર્તુળ A(p, q)માંથી પસાર થાય અને X-અક્ષને સ્પર્શે, તો બિંદુ Aમાંથી પસાર થતા વ્યાસના બીજા અંત્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ...... (AIEEE : 2004)

(A) $(x-p)^2=4qy$ (B) $(x-q)^2=4qy$ (C) $(y-p)^2=4qx$ (D) $(y-q)^2=4px$

ઉકેલ : ધારો કે A(p, q) અને વ્યાસ $\overline{AB}$નું બીજું અંત્યબિંદુ $B(x_1, y_1)$ છે.

$\therefore$ વ્યાસાંત બિંદુઓવાળા વર્તુળનું સમીકરણ

$$(x-p)(x-x_1)+(y-q)(y-y_1)=0$$

$\therefore \; x^2+y^2-x(p+x_1)-y(q+y_1)+px_1+qy_1=0$ (1)

વર્તુળ X-અક્ષને સ્પર્શે છે તેથી (1)માં $y=0$ લેતાં,

$x^2-x(p+x_1)+px_1+qy_1=0$. X-અક્ષ એ સ્પર્શક હોવાથી $\Delta=0$.

$\therefore \; (p+x_1)^2-4(1)(px_1+qy_1)=0$

$\therefore \; p^2-2px_1+x_1^2=4qy_1$ આથી $(p-x_1)^2=4qy_1$

વ્યાપક સ્વરૂપે માંગેલ બિંદુગણ $(p-x)^2=4qy$ એટલે કે $(x-p)^2=4qy$ **જવાબ : (A)**

(166) રેખા $y=x$ અને વર્તુળ $x^2+y^2-2x=0$ એકબીજાને A અને B આગળ છેદે છે. $\overline{AB}$ વર્તુળનો વ્યાસ હોય, તેવા વર્તુળનું સમીકરણ ...... (AIEEE : 2004)

(A) $x^2+y^2+x+y=0$ (B) $x^2+y^2-x+y=0$

(C) $x^2+y^2-(x+y)=0$ (D) $x^2+y^2+x-y=0$

ઉકેલ : રેખા $y=x$ અને વર્તુળ $x^2+y^2-2x=0$ ને ઉકેલતાં A(0, 0) અને B(1, 1) મળે.

હવે $\overline{AB}$ વર્તુળનો વ્યાસ થશે.

$\therefore$ વર્તુળનું સમીકરણ $(x-0)(x-1)+(y-0)(y-1)=0$

$\therefore\ x^2+y^2-x-y=0$

$\therefore\ x^2+y^2-(x+y)=0$ **જવાબ : (C)**

બીજી રીત :

માંગેલ વર્તુળ $x^2+y^2-2x+\lambda(x-y)=0$

તેનું કેન્દ્ર $\left(1-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$ એ $y=x$ પર છે.

$\therefore\ 1-\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}$

$\therefore\ \lambda=1$

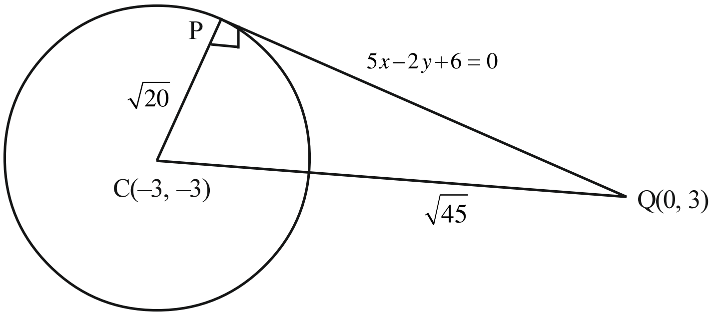
$x^2+y^2-2x+x-y=0$

$\therefore\ x^2+y^2-x-y=0$ માંગેલ સમીકરણ છે.

(167) વર્તુળ $x^2+y^2+6x+6y=2$ની બિંદુ P આગળની સ્પર્શરેખા $5x-2y+6=0$ એ Y-અક્ષને Q આગળ છેદે છે, તો PQ = ... (AIEEE : 2004)

(A) 4 (B) 2 (C) 5 (D) 3

ઉકેલ : અહીં રેખા $5x-2y+6=0$ એ Y-અક્ષને (0 3)માં છેદે છે. તેથી બિંદુ Qના યામ (0, 3) થશે.



આકૃતિ 9.65

$\therefore\ PQ$ ની લંબાઈ $=Q(0,3)$થી વર્તુળ $x^2+y^2+6x+6y-2=0$ પરના સ્પર્શકની લંબાઈ

$\therefore\ PQ=\sqrt{0+9+0+18-2}=\sqrt{25}=5$

બીજી રીત :

ત્રિજ્યા $=\sqrt{9+9+2}=\sqrt{20},\ CQ=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

$\therefore\ PQ=\sqrt{45-20}=5$ **જવાબ : (C)**

(168) રેખાઓ $2x+y-11=0$ અને $x+4y-23=0$ એ 10π પરિઘવાળા વર્તુળના બે વ્યાસને સમાવતી હોય, તો આ વર્તુળનું સમીકરણ ...... (AIEEE 2004)

(A) $(x+3)^2+(y+5)^2=25$ (B) $(x-3)^2+(y+5)^2=25$

(C) $(x-3)^2+(y-5)^2=25$ (D) $(x+3)^2+(y-5)^2=25$

ઉકેલ : અહીં સ્પષ્ટ છે કે રેખાઓ $2x+y-11=0$ અને $x+4y-23=0$નું છેદબિંદુ (3, 5) વર્તુળનું કેન્દ્ર થશે. વર્તુળનો પરિઘ $2\pi r=10\pi$ છે. આથી, $r=5$

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $(x-3)^2+(y-5)^2=25$ **જવાબ : (C)**

(169) $\left(m_i, \frac{1}{m_i}\right), i = 1, 2, 3, 4$ એ વર્તુળ પરનાં ચાર ભિન્ન બિંદુઓ હોય, તો ...... (ચક્રીય બિંદુઓ હોય.) (IIT : 1998)

(A) $m_1 m_2 m_3 m_4 = 1$ (B) $m_1 m_2 m_3 m_4 = -1$

(C) $m_1 . m_2 . m_3 . m_4 = \frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4}=\frac{1}{4}$

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળનું સમીકરણ $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ છે.

$\left(m_i, \frac{1}{m_i}\right), i = 1, 2, 3, 4$ એ વર્તુળ પરનાં બિંદુઓ છે.

$\therefore \ m_i^2 + \frac{1}{m_i^2} + 2gm_i + \frac{2f}{m_i} + c = 0$ (જ્યાં $i = 1, 2, 3, 4$)

$\therefore \ m_i^4 + 2gm_i^3 + cm_i^2 + 2fm_i + 1 = 0$ (જ્યાં $i = 1, 2, 3, 4$)

$\therefore$ m_1, m_2, m_3 અને m_4 એ આ સમીકરણનાં બીજ હોય.

$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 = 1$ **જવાબ : (A)**

(170) ધારો કે બિંદુ $P(1, 0)$ અને બિંદુ Q પરવલય $y^2 = 8x$ પરનું બિંદુ છે, તો $\overline{PQ}$ ના મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ...... (AIEEE : 2005)

(A) $x^2 + 4y + 2 = 0$ (B) $x^2 - 4y + 2 = 0$ (C) $y^2 - 4x + 2 = 0$ (D) $y^2 + 4x + 2 = 0$

ઉકેલ : ધારો કે $P(1, 0)$ તથા $Q(at_1^2, 2at_1) = Q(2t_1^2, 4t_1)$ તથા જીવા $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ (α, β) છે.

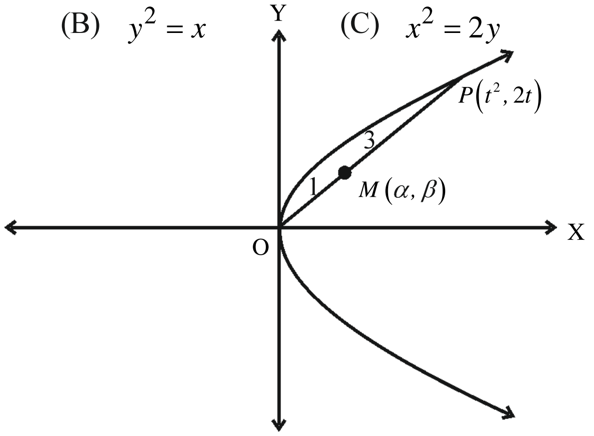
$\therefore \ (\alpha, \beta) = \left(\frac{2t_1^2+1}{2}, \frac{4t_1}{2}\right)$ આથી $\alpha = \frac{2t_1^2+1}{2}$, $\beta = 2t_1$

$\therefore \ 2\alpha = 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + 1$. આથી $2\alpha = \frac{\beta^2+2}{2}$

$\therefore \ \beta^2 - 4\alpha + 2 = 0$. આથી માંગેલ બિંદુગણનું સમીકરણ $y^2 - 4x + 2 = 0$ **જવાબ : (C)**

(171) પરવલય $y^2 = 4x$ પરનું બિંદુ (x, y) છે. બિંદુ $(0, 0)$ તથા (x, y)ને જોડતા રેખાખંડનું 1:3 ભાગમાં વિભાજન કરતા બિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ = ... (IIT : 2011)

(A) $y^2 = 2x$ (B) $y^2 = x$ (C) $x^2 = 2y$ (D) $x^2 = y$



આકૃતિ 9.66

ઉકેલ : ધારો કે $O(0,0)$ તથા $P(at^2, 2at) = P(t^2, 2t)$ પરવલય $y^2 = 4x$ પરનું બિંદુ છે તથા $\overline{OP}$ નું 1:3માં વિભાજન કરતું બિંદુ $M(\alpha, \beta)$ હોય, તો

$(\alpha, \beta) = \left(\frac{t^2+0}{1+3}, \frac{2t+0}{1+3}\right) = \left(\frac{t^2}{4}, \frac{t}{2}\right)$. આથી, $\alpha = \frac{t^2}{4}$, $\beta = \frac{t}{2}$

$\therefore \ \beta^2 = \alpha$

આથી, વ્યાપક રીતે માંગેલ બિંદુગણ $y^2 = x$ **જવાબ : (B)**

(172) પરવલય $y^2 = 4ax$ પરના કોઈ પણ બિંદુને તેની નાભિ સાથે જોડતા મળતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ બીજો પરવલય હોય, તો બીજા પરવલયની નિયામિકાનું સમીકરણ ...... (IIT : 2002)

(A) $x = -a$ (B) $x = \frac{-a}{2}$ (C) $x = 0$ (D) $x = \frac{a}{2}$

ઉકેલ : ધારો કે પરવલય $y^2 = 4ax$ પરનું બિંદુ $P(at^2, 2at)$ છે અને પરવલયનું નાભિ $S(a, 0)$ છે.

જો $\overline{SP}$ નું મધ્યબિંદુ $M(x, y)$ હોય, તો $(x, y) = \left(\frac{a+at^2}{2}, \frac{2at+0}{2}\right)$

$\therefore \ x = \frac{a}{2}(1+t^2), \ y = at$

$\therefore \ x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\left(\frac{y^2}{a^2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{y^2}{2a} = \frac{a^2+y^2}{2a}$

$\therefore \ y^2 = 2ax - a^2$

$y^2 = 2a\left(x - \frac{a}{2}\right)$

ઊગમબિંદુનું $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ આગળ સ્થાનાંતર કરતાં, $x = x' + h, \ \ y = y' + k$ પરથી,

$x' = x - \frac{a}{2}, \ y' = y - 0$. આથી, $y'^2 = 2ax'$

$y'^2 = 4Ax'$ સાથે સરખાવતાં, $4A = 2a$ આથી, $A = \frac{a}{2}$

$\therefore$ પરવલયની નિયામિકા $x' = -A$ પરથી $x - \frac{a}{2} = -\frac{a}{2}$

$\therefore \ x = 0$ માંગેલ નિયામિકા છે. **જવાબ : (C)**

(173) પરવલય $y^2 = 4x$ ને બિંદુ $(1, 4)$ માંથી દોરેલા સ્પર્શકો કેટલા માપનો ખૂણો બનાવે ?

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ પરથી $a = 1$

$\therefore$ પરવલયના m ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx + \frac{1}{m}$ અને તે $(1, 4)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \ 4 = m + \frac{1}{m}$

$\therefore \ m^2 - 4m + 1 = 0$

$\therefore \ m = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

ધારો કે $m_1 = 2+\sqrt{3}, \ m_2 = 2-\sqrt{3}$

જો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો, $tan\alpha = \left| \frac{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \right| = \left| \frac{2\sqrt{3}}{1+4-3} \right| = \sqrt{3}$

$\therefore \ \alpha = \frac{\pi}{3}$ **જવાબ : (C)**

(174) પરવલય $y^2 = 4ax$ પરના બિંદુ $P(at_1^2, 2at_1)$માંથી દોરેલો અભિલંબ પરવલય પરના બિંદુ $Q(at_2^2, 2at_2)$માંથી પસાર થાય, તો ...... (AIEEE : 2003)

(A) $t_1 + t_2 = \frac{2}{t_1}$ (B) $t_1 + t_2 = \frac{-2}{t_1}$ (C) $t_1 \times t_2 = \frac{2}{t_1}$ (D) $t_1 \times t_2 = \frac{-2}{t_1}$

ઉકેલ : $(at_1^2, 2at_1)$ અને $(at_2^2, 2at_2)$માંથી પસાર થતી જીવાનું સમીકરણ

$y - 2at_1 = \frac{2a(t_2 - t_1)}{a(t_2^2 - t_1^2)} (x - at_1^2)$

$\therefore \ y(t_1 + t_2) - 2x + 2at_1^2 - 2at_1t_2 - 2at_1^2 = 0$

$\therefore \ -2x + (t_1 + t_2)y - 2at_1t_2 = 0$ (1)

$(at_1^2, 2at_1)$ આગળના પરવલયના અભિલંબનું સમીકરણ,

$y = -t_1x + 2at_1 + at_1^3$ (2)

$\therefore$ (1) અને (2) પરથી

$t_1x + y = 2at_1 + at_1^3$ તથા $-2x + (t_1 + t_2)y = 2at_1t_2$ એક જ રેખા છે.

$\therefore \ \frac{t_1}{-2} = \frac{1}{t_1 + t_2}$

$\therefore \ t_1 + t_2 = \frac{-2}{t_1}$ **જવાબ : (B)**

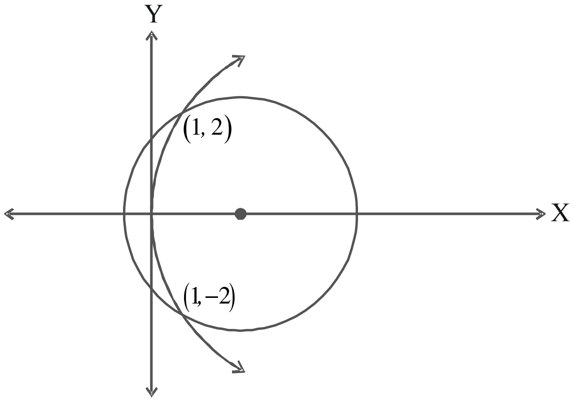
(175) ધારો કે વક્ર $C_1 : y^2 = 4x$ અને $C_2 : x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$, તો ......

(A) C_1 અને C_2 એકબીજાને માત્ર એક બિંદુમાં સ્પર્શે. (B) C_1 અને C_2 એકબીજાને બે બિંદુમાં છેદે.

(C) C_1 તથા C_2 છેદે પરંતુ બે બિંદુમાં છેદે નહિ. (D) C_1 તથા C_2 છેદે પણ નહિ તથા સ્પર્શે પણ નહિ.

(IIT : 2008)

ઉકેલ :



આકૃતિ 9.67

અહીં વક્રનાં સમીકરણ $y^2 = 4x$ અને વક્ર $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ પરથી છેદબિંદુ મેળવવા,

$x^2 + 4x - 6x + 1 = 0$. આથી, $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\therefore (x-1)^2 = 0$

$\therefore x = 1$ પરથી $y^2 = 4$. આથી, $y = \pm 2$

$\therefore C_1$ અને C_2ના છેદબિંદુ $(1, 2)$ તથા $(1, -2)$ થાય. **જવાબ : (B)**

(176) ઊગમબિંદુ પરવલયનું નાભિ હોય તથા નિયામિકા $x = 2$ હોય, તેવા પરવલયનું શિરોબિંદુ = ... થાય. (AIEEE : 2008)

(A) $(1, 0)$ (B) $(2, 0)$ (C) $(0, 1)$ (D) $(0, 2)$

ઉકેલ : $S = (0, 0)$, $l : x - 2 = 0$

$SP = PM$ પરથી $x^2 + y^2 = (x-2)^2$

$\therefore y^2 = -4(x-1)$

$\therefore$ શિરોબિંદુ $(1, 0)$ છે. **જવાબ : (A)**

(177) પરવલય $y^2 = 8x$ પરનો એક સ્પર્શક $y = x + 2$ હોય તથા પરવલયનો બીજો સ્પર્શક એ આપેલા સ્પર્શકને કાટખૂણે છેદતો હોય, તો બંને સ્પર્શકોના છેદબિંદુના યામ ...... (AIEEE : 2007)

(A) $(-1, 1)$ (B) $(0, 2)$ (C) $(2, 4)$ (D) $(-2, 0)$

ઉકેલ : પરવલયનો આપેલ સ્પર્શક $y = x + 2$ છે તથા પરવલયનો બીજો સ્પર્શક જે આપેલા સ્પર્શકને કાટખૂણે છેદતો હોવાથી, બંને સ્પર્શકોનું છેદબિંદુ પરવલયની નિયામિકા $x = -2$ પર હોય. $(x = -a,\ a = 2)$

આમ, $x = -2$ અને $y = x + 2$ ઉકેલતાં $(-2, 0)$ મળે.

$\therefore$ છેદબિંદુના યામ $(-2, 0)$ થશે. **જવાબ : (D)**

(178) ઉપવલય $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{1} = 1$ પરનાં બિંદુ $\left(3\sqrt{3}\cos\theta, \sin\theta\right)$ આગળ સ્પર્શક દોરવામાં આવે અને સ્પર્શકના અક્ષો સાથેના અંતઃખંડોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય, તો $\theta =$ .... (IIT : 2003)

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{3\pi}{8}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

ઉકેલ : ઉપવલય $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{1}=1$ પરનાં બિંદુ $(3\sqrt{3}\cos\theta, \sin\theta)$ આગળનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$$\frac{x(3\sqrt{3}\cos\theta)}{27}+\frac{y(\sin\theta)}{1}=1$$

$$\therefore \frac{x}{3\sqrt{3}\sec\theta}+\frac{y}{\operatorname{cosec}\theta}=1$$

$\therefore$ x-અંતઃખંડ $=3\sqrt{3}\sec\theta$, y-અંતઃખંડ $=\operatorname{cosec}\theta$

હવે, ધારો કે $f(\theta)$ = અંતઃખંડોનો સરવાળો $=3\sqrt{3}\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$

$\therefore$ $f'(\theta)=3\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta-\operatorname{cosec}\theta\cot\theta$

અંતઃખંડોનો સરવાળો ન્યૂનતમ થવા માટે $f'(\theta)=0$ થવું જોઈએ.

$$\therefore 3\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta-\operatorname{cosec}\theta\cot\theta=0$$

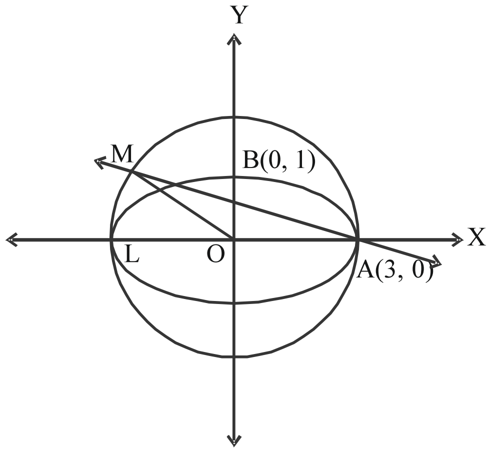
$$\therefore \frac{3\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}=0$$

$\therefore \tan^3\theta=\frac{1}{3\sqrt{3}}$. આથી $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ આથી, $\theta=\frac{\pi}{6}$

તથા $f''(\theta)=f''\left(\frac{\pi}{6}\right)>0$ ચકાસો. આથી, $\theta=\frac{\pi}{6}$ **જવાબ : (A)**

(179) ઉપવલય $x^2+9y^2=9$ના મુખ્ય અક્ષનાં અંત્યબિંદુ A અને ગૌણ અક્ષનાં અંત્યબિંદુ Bમાંથી પસાર થતી રેખા સહાયક વૃત્તને M માં મળે છે, તો ત્રિકોણના AMOનું ક્ષેત્રફળ = ... , જ્યાં O(0, 0). (IIT : 2009)

(A) $\frac{21}{10}$ (B) $\frac{27}{10}$ (C) $\frac{29}{10}$ (D) $\frac{31}{10}$



આકૃતિ 9.68

ઉકેલ : અહીં, ઉપવલય $x^2+9y^2=9$ એટલે કે $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ (1)

સહાયક વૃત્તનું સમીકરણ $x^2+y^2=9$ (2)

વળી, $A(3,0), B(0,1)$ હોવાથી $\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}=1$ (3)

સમીકરણ (2) અને (3) ઉકેલતાં, $(3-3y)^2+y^2=9$

$\therefore\ 9-18y+9y^2+y^2=9$

$\therefore\ 10y^2-18y=0$

$\therefore\ y=0$ અથવા $y=\frac{9}{5}$. પરંતુ $y=0$ તો $x=3$ અને A બિંદુ મળે.

$\therefore\ y=\frac{9}{5}$. તેથી $x=\frac{-12}{5}$

$\therefore\ M$ ના યામ $=\left(\frac{-12}{5},\frac{9}{5}\right)$

અહીં $A(3,0)$, $O(0,0), M\left(\frac{-12}{5},\frac{9}{5}\right)$ હોવાથી,

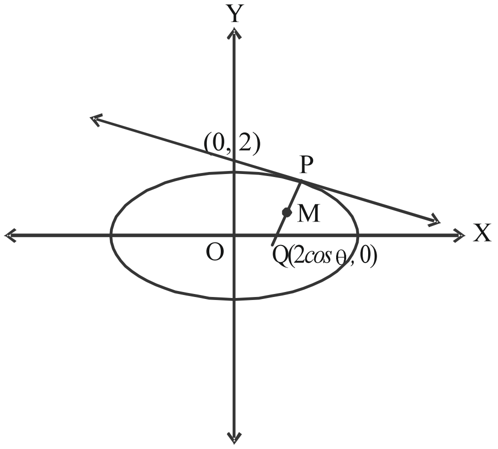
$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \frac{-12}{5} & \frac{9}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{27}{5}$$

$\therefore\ \Delta$ AOM નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{1}{2}\times|D| = \frac{1}{2}\times\left|\frac{27}{5}\right| = \frac{27}{10}$ **જવાબ : (B)**

(180) ઉપવલય $x^2+4y^2=16$ પરના બિંદુ P આગળનો અભિલંબ X-અક્ષને Qમાં છેદે છે. જો M એ $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ હોય, અને M નો બિંદુગણ ઉપવલયના નાભિલંબને છેદે તો છેદબિંદુના યામ ......

(A) $\left(\frac{3\sqrt{5}}{2},\pm\frac{2}{7}\right),\left(\frac{-3\sqrt{5}}{2},\pm\frac{2}{7}\right)$ (B) $\left(\frac{3\sqrt{5}}{2},\pm\frac{\sqrt{19}}{4}\right),\left(\frac{-3\sqrt{5}}{2},\pm\frac{\sqrt{19}}{4}\right)$

(C) $\left(2\sqrt{3},\pm\frac{1}{7}\right),\left(-2\sqrt{3},\pm\frac{1}{7}\right)$ (D) $\left(2\sqrt{3},\pm\frac{4\sqrt{3}}{7}\right),\left(-2\sqrt{3},\pm\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ (IIT : 2009)



આકૃતિ 9.69

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ આથી, $a=4,\ b=2$

$\therefore$ ઉપવલય પરનું બિંદુ $P(a\cos\theta, b\sin\theta) = P(4\cos\theta, 2\sin\theta)$

$\therefore$ ઉપવલય પરના બિંદુ P આગળનો સ્પર્શક $\frac{x}{4}\cos\theta+\frac{y}{2}\sin\theta-1=0$

$\therefore$ ઉપવલય પરના બિંદુ P આગળનો અભિલંબ, $\left(\frac{1}{2}sin\theta\right)x - \left(\frac{1}{4}cos\theta\right)y + k = 0$. વળી તે $(4cos\theta, 2sin\theta)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \quad 2sin\theta cos\theta - \frac{sin\theta cos\theta}{2} + k = 0$ આથી $k = \frac{-3}{2}sin\theta cos\theta$

$\therefore$ P આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(2sec\theta)x - (cosec\theta)y - 6 = 0$

અભિલંબ X-અક્ષને Qમાં છેદે છે તેથી $y = 0$ લેતાં $x = 3cos\theta$

$\therefore$ Qના યામ $= (3cos\theta, 0)$

$\therefore$ $\overline{PQ}$ ના મધ્યબિંદુ Mના યામ $= \left(\frac{7cos\theta}{2}, sin\theta\right)$

મધ્યબિંદુ $M(x, y)$ લઈએ, તો $x = \frac{7cos\theta}{2}, y = sin\theta$

$\therefore cos^2\theta + sin^2\theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{2x}{7}\right)^2 + y^2 = 1$

$\therefore \frac{4x^2}{49} + y^2 = 1$

$\therefore$ મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ $\frac{4x^2}{49} + y^2 = 1$

હવે, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ પરથી $a^2 = 16,\ b^2 = 4$. તેથી $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

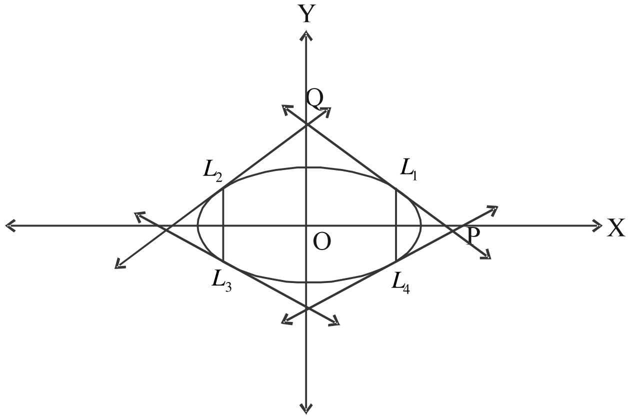
$\therefore$ ઉપવલયની નાભિઓ $= (\pm ae, 0) = (\pm 2\sqrt{3}, 0)$. નાભિલંબનાં સમીકરણ $x = \pm 2\sqrt{3}$.

$\therefore x = \pm 2\sqrt{3}$ ની કિંમત $\frac{4x^2}{49} + y^2 = 1$માં મૂકતાં, $y^2 = \frac{1}{49}$. આથી, $y = \pm \frac{1}{7}$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુઓ $\left(-2\sqrt{3}, \pm \frac{1}{7}\right)$ અને $\left(2\sqrt{3}, \pm \frac{1}{7}\right)$ **જવાબ : (C)**

(181) ઉપવલય $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ ના નાભિલંબના અંત્યબિંદુ આગળ દોરેલા સ્પર્શકો વડે બનતાં ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = ...

(IIT : 2003)



આકૃતિ 9.70

(A) $\frac{27}{2}$ (B) $\frac{27}{4}$ (C) $\frac{27}{5}$ (D) 27

ઉકેલ : અહીં, ઉપવલય $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ પરથી, $a^2=9,\ b^2=5$. આથી, $a>b$

હવે, $b^2=a^2\left(1-e^2\right)$ પરથી, $5=9\left(1-e^2\right)$

$\therefore\ 1-e^2=\frac{5}{9}$. આથી, $e^2=\frac{4}{9}$. આથી, $e=\frac{2}{3}$

$\therefore$ નાભિલંબના અંત્યબિંદુ $L_1\left(2,\frac{5}{3}\right),\ L_2\left(-2,\frac{5}{3}\right),\ L_3\left(-2,\frac{-5}{3}\right)$ અને $L_4\left(2,\frac{-5}{3}\right)$ છે.

$\therefore\ L_1\left(2,\frac{5}{3}\right)$ આગળનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ $\frac{2x}{9}+\frac{y}{3}=1$

$\therefore\ \frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{3}=1$

$\therefore\ \Delta\,OPQ$નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)(3)=\frac{27}{4}$

માંગેલ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = 4($\Delta\,OPQ$નું ક્ષેત્રફળ) = 27 **જવાબ : (D)**

(182) ઉપવલયની નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર 6 અને ગૌણ અક્ષની લંબાઈ 8 હોય, તો તેની ઉત્કેન્દ્રતા = $(a>b)$ ...... (AIEEE : 2006)

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

ઉકેલ : ઉપવલયની બે નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર 6 છે.

$\therefore\ 2ae=6$ તથા ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $2b=8$ છે.

$\therefore\ b=4,\ ae=3$

હવે, $b^2=a^2\left(1-e^2\right)$. આથી, $16=a^2-9$. આથી, $a^2=25$

$\therefore\ 1-e^2=\frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{25}$. આથી, $e^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$. આથી, $e=\frac{3}{5}$ **જવાબ : (A)**

(183) જેની નાભિ $(\pm 2,0)$ અને ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{1}{2}$ હોય, તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ ...... (AIEEE : 2002)

(A) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$ (B) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ (C) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : ઉપવલયની નાભિઓ $=(\pm 2,0)=(\pm ae,0)$. તેથી $ae=2$ તથા $e=\frac{1}{2}$ છે. આથી, $a=4$

$\therefore\ b^2=a^2\left(1-e^2\right)$ પરથી, $b^2=16\left(\frac{3}{4}\right)$ = 12

$\therefore$ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ **જવાબ : (B)**

(184) ઉપવલય $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ના નાભિમાંથી પસાર થતા વર્તુળનું કેન્દ્ર $(0, 3)$ હોય, તો તેની ત્રિજ્યા = ... (AIEEE : 2002)

(A) 4 (B) 3 (C) $\sqrt{12}$ (D) $\frac{7}{2}$

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય પરથી, $a^2=16,\ b^2=9$. આથી, $a>b$ થશે.

હવે, $b^2=a^2\left(1-e^2\right)$ પરથી,

$e^2=1-\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e^2=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$. આથી, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore$ ઉપવલયની નાભિઓ $\left(\pm\sqrt{7}, 0\right)$

$\therefore$ વર્તુળની ત્રિજ્યા = કેન્દ્ર $(0, 3)$થી નાભિઓ $\left(\pm\sqrt{7}, 0\right)$ વચ્ચેનું અંતર $=\sqrt{7+9}=4$ **જવાબ : (A)**

(185) ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{1}{2}$ હોય, નિયામિકા $x=4$ હોય તથા તેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ આગળ છે, તો ઉપવલયનું સમીકરણ ...... (AIEEE : 2004)

(A) $3x^2+4y^2=12$ (B) $4x^2+3y^2=12$ (C) $3x^2+4y^2=1$ (D) $4x^2+3y^2=1$

ઉકેલ : અહીં ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા $e=\frac{1}{2}$ અને ઉપવલયની નિયામિકા $x=4$ છે. તેથી $\frac{a}{e}=4$.

આથી, $a=2$

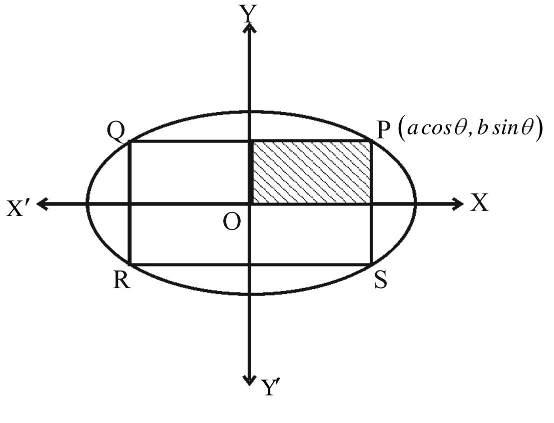
હવે $b^2=a^2\left(1-e^2\right)=4\left(1-\frac{1}{4}\right)=3$. આથી, $b=\sqrt{3}$

$\therefore$ માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

$\therefore$ $3x^2+4y^2=12$ **જવાબ : (A)**

(186) ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ માં અંતર્ગત ઘેરાયેલા લંબચોરસનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ ...... (AIEEE : 2005)

(A) ab (B) $2ab$ (C) $\frac{a}{b}$ (D) $\sqrt{ab}$



આકૃતિ 9.71

ઉકેલ : ધારો કે ઉપવલય પરનું કોઈક બિંદુ $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ, પ્રથમ ચરણમાં આવેલા ભાગનું ક્ષેત્રફળ $= l \times b$

$$= a\cos\theta \bullet b\sin\theta$$

$\therefore$ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= 4(a\cos\theta)(b\sin\theta)$

$$= 4ab\cos\theta\sin\theta$$

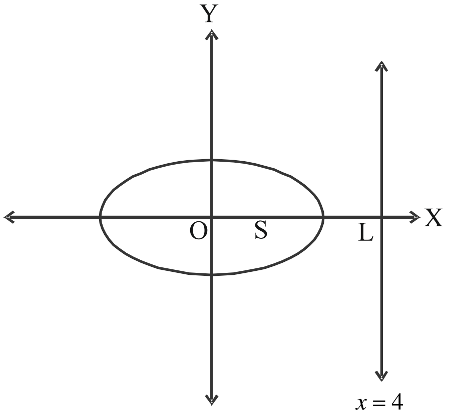
$$= 2ab\sin 2\theta$$

અહીં $\sin 2\theta = 1$ ત્યારે ક્ષેત્રફળ મહત્તમ બને.

$\therefore$ મહત્તમ ક્ષેત્રફળ $= 2ab$ **જવાબ : (B)**

(187) ઉપવલયની નાભિ ઊગમબિંદુ, નિયામિકા $x = 4$ અને ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{1}{2}$ હોય, તો ઉપવલયના અર્ધ મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ = ... (AIEEE : 2008)

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$



આકૃતિ 9.72

ઉકેલ : અહીં નિયામિકા $x = 4$ છે. સ્પષ્ટ છે કે ઉપવલયની મુખ્ય અક્ષ X-અક્ષ છે.

O$(0, 0)$ છે. તેથી નાભિ $(0, 0)$થી નિયામિકાનું લંબઅંતર $= 4$ છે.

$$\therefore \left|\frac{a}{e} - ae\right| = 4$$

$$\therefore \frac{a}{e} - ae = 4 \qquad \left(e = \frac{1}{2}\right)$$

$$a\left(\frac{1-e^2}{e}\right) = 4$$

$\therefore a\left(\frac{3}{2}\right) = 4$ આથી, અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $a = \frac{8}{3}$ **જવાબ : (D)**

(188) ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા $\sqrt{\frac{2}{5}}$ હોય તે બિંદુ $(-3, 1)$માંથી પસાર થાય તથા જેની અક્ષો યામાક્ષો હોય, તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ ...... (AIEEE : 2011)

(A) $3x^2 + 5y^2 - 32 = 0$ (B) $5x^2 + 3y^2 - 48 = 0$

(C) $3x^2 + 5y^2 - 15 = 0$ (D) $5x^2 + 3y^2 - 32 = 0$

ઉકેલ : ધારો કે જેની અક્ષો યામાક્ષો હોય, તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ છે.

તે $(-3,1)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$

$\therefore \frac{9}{a^2}+\frac{1}{\frac{3a^2}{5}}=1$ $\quad\left(b^2=a^2\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{3a^2}{5}\right)$

$\therefore \frac{1}{a^2}\left(9+\frac{5}{3}\right)=1$ તેથી, $a^2=\frac{32}{3}$

હવે $b^2=\frac{3}{5}\times a^2 = \frac{3}{5}\times\frac{32}{3} = \frac{32}{5}$

$\therefore$ માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $3x^2+5y^2-32=0$

જો $a<b$ હોય તો $a^2=b^2\left(1-e^2\right)$

$\therefore a^2=b^2\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{3b^2}{5}$

$\therefore \frac{9}{\frac{3b^2}{5}}+\frac{1}{b^2}=1.$ આથી $b^2=16$

જો $b^2=16,$ તો $a^2=\frac{3b^2}{5}=\frac{48}{5}$

$\therefore \frac{5x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1$

$\therefore 5x^2+3y=48$ **જવાબ : (A, B)**

(189) ઉપવલય $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ અને અતિવલય $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=\frac{1}{25}$ માટે બંને વક્રોની નાભિ સમાન હોય, તો $b^2=$ ......

(AIEEE : 2003)

(A) 1 (B) 5 (C) 7 (D) 9

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=\frac{1}{25}$ પરથી, $\frac{x^2}{\frac{144}{25}}-\frac{y^2}{\frac{81}{25}}=1$ તેથી $a^2=\frac{144}{25}, b^2=\frac{81}{25}$ છે.

હવે, $b^2=a^2\left(e^2-1\right)$ પરથી, $\frac{81}{25}=\frac{144}{25}\left(e^2-1\right)$

$\therefore e^2=\frac{9}{16}+1=\frac{25}{16}$. આથી, $e=\frac{5}{4}$

$\therefore$ આપેલા અતિવલયની નાભિ $=(\pm 3,0)$ (1)

હવે, ઉપવલય માટે, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ આપેલ છે. $4>b$ જરૂરી છે. $(a>b)$ (નાભિ સમાન હોવા માટે)

$\therefore b^2=a^2\left(1-(e')^2\right)$. આથી, $(e')^2=1-\frac{b^2}{16}$ (2)

$\therefore$ ઉપવલયની નાભિ $= (\pm 4e', 0)$ (3)

આપેલ શરત મુજબ (1) અને (3) પરથી $4e' = 3$. આથી, $e' = \frac{3}{4}$

$\therefore$ સમીકરણ (2) પરથી $(e')^2 = 1 - \frac{b^2}{16}$

$\therefore \frac{b^2}{16} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

$\therefore b^2 = 7$.

$\therefore b = \sqrt{7} < 4$ છે જ. **જવાબ : (C)**

(190) અતિવલય $\frac{x^2}{cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{sin^2 \alpha} = 1$ માં α ની કિંમત ......થી સ્વતંત્ર છે. (જ્યાં $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

(A) ઉત્કેન્દ્રતા (B) નાભિના યામ (C) નિયામિકાનાં સમીકરણ (D) શિરોબિંદુ

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $\frac{x^2}{cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{sin^2 \alpha} = 1$ છે.

$\therefore a^2 = cos^2 \alpha, b^2 = sin^2 \alpha$

હવે, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\therefore e^2 - 1 = tan^2 \alpha$

$\therefore e^2 = sec^2 \alpha$. આથી, ઉત્કેન્દ્રતા $e = sec\alpha$ (જ્યાં $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

અતિવલયની નિયામિકાનાં સમીકરણ $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{cos\alpha}{sec\alpha} \Rightarrow x = \pm cos^2 \alpha$

અતિવલયનાં શિરોબિંદુના યામ $= (\pm a, 0) = (\pm cos\alpha, 0)$

અતિવલયની નાભિના યામ $= (\pm ae, 0) = (\pm 1, 0)$

$\therefore$ સ્પષ્ટ છે કે નાભિના યામ એ α થી સ્વતંત્ર છે. **જવાબ : (B)**

(191) ઉપવલય $3x^2 + 4y^2 = 12$ ના પ્રધાન અક્ષ અને ગૌણ અક્ષ એ અતિવલયની મુખ્ય અક્ષ તથા સહાયક અક્ષ હોય, તથા અતિવલયના મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $2sin\theta$ હોય, તેવા અતિવલયનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 cosec^2\theta - y^2 sec^2\theta = 1$ (B) $x^2 sec^2\theta - y^2 cosec^2\theta = 1$

(C) $x^2 sec^2\theta - y^2 cos^2\theta = 1$ (D) $x^2 cos^2\theta - y^2 sin^2\theta = 1$ (IIT : 2007)

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય $3x^2 + 4y^2 = 12$ પરથી, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

$\therefore a^2 = 4, b^2 = 3$

હવે, $b^2 = a^2(1 - e^2)$. આથી, $e^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ અને આથી, $e = \frac{1}{2}$

માંગેલ અતિવલય માટે મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $2d = 2sin\theta$, $(a = d = sin\theta)$ છે. અહીં $ae = 1$ છે.

$\therefore e\,sin\theta = 1$

$\therefore\ e = cosec\theta$

હવે, $b^2 = a^2\left(e^2 - 1\right)$ પરથી, $\left(b'\right)^2 = sin^2\theta\left(cosec^2\theta - 1\right)$

$\left(b'\right)^2 = cos^2\theta$

$\therefore$ માંગેલ અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{sin^2\theta} - \frac{y^2}{cos^2\theta} = 1$

$\therefore\ x^2 cosec^2\theta - y^2 sec^2\theta = 1$ **જવાબ : (A)**

(192) જેની નાભિઓ $(-2, 0)$ અને $(2, 0)$ હોય તથા ઉત્કેન્દ્રતા 2 હોય તેવા અતિવલયનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 - 3y^2 = 3$ (B) $3x^2 - y^2 = 3$ (C) $3y^2 - x^2 = 3$ (D) $y^2 - 3x^2 = 3$

(AIEEE : 2011)

ઉકેલ : અહીં નાભિ $(2, 0) = (ae, 0)$ લઈએ. $ae = 2$ અને $e = 2$ હોવાથી $a = 1$.

$\therefore\ b^2 = a^2\left(e^2 - 1\right)$ પરથી $b^2 = 3$.

$\therefore$ અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$

$\therefore\ 3x^2 - y^2 = 3$ **જવાબ : (B)**

JEE માં પુછાયેલા દાખલાઓ

(193) જો રેખાઓ $5x+8y=13$ અને $4x-y=3$ એ વર્તુળ

$x^2 + y^2 - 2\left(a^2 - 7a + 11\right)x - 2\left(a^2 - 6a + 6\right)y + b^3 + 1 = 0$ ના વ્યાસને સમાવે તો ......

(JEE online April : 2013)

(A) $a = 5$ અને $b \in (-\infty, 1)$ (B) $a = 5$ અને $b \notin (-1, 1)$

(C) $a = 1$ અને $b \notin (-1, 1)$ (D) $a = 2$ અને $b \in (-\infty, 1)$

ઉકેલ : અહીં, $5x+8y=13$ અને $4x-y=3$ એ આપેલા વર્તુળના વ્યાસને સમાવતી રેખાઓ છે.
તેથી બંને રેખાઓનું છેદબિંદુ (1, 1) એ આપેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર થશે.

આપેલ વર્તુળ $x^2 + y^2 - 2\left(a^2 - 7a + 11\right)x - 2\left(a^2 - 6a + 6\right)y + b^3 + 1 = 0$

પરથી, $g = -\left(a^2 - 7a + 11\right), f = -\left(a^2 - 6a + 6\right), c = b^3 + 1$

$\therefore$ વર્તુળનું કેન્દ્ર $= \left(a^2 - 7a + 11, a^2 - 6a + 6\right)$

$\therefore$ (1, 1) $= \left(a^2 - 7a + 11, a^2 - 6a + 6\right)$

$\therefore\ a^2 - 7a + 10 = 0$ અને $a^2 - 6a + 5 = 0$

$\therefore\ (a-5)(a-2) = 0$ અને $(a-5)(a-1) = 0$

$\therefore\ a - 5 = 0$ હોવું જોઈએ. આથી $a = 5$

વળી, વર્તુળ થવા માટે $g^2 + f^2 - c > 0$

$\therefore\ 1+1-\left(b^3+1\right)>0$

$\therefore\ b^3<1$

$\therefore\ b<1$

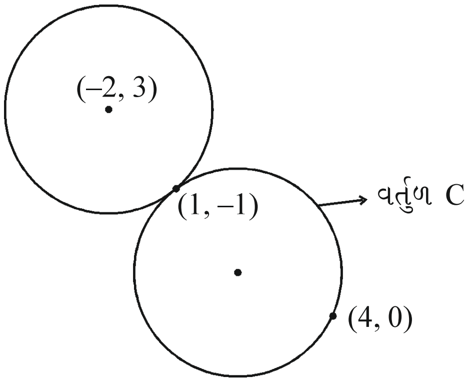
$\therefore\ b\in\left(-\infty,1\right)$

આમ, $a=5$ અને $b\in\left(-\infty,1\right)$ **જવાબ : (A)**

(194) જો વર્તુળ C એ (4, 0)માંથી પસાર થાય અને વર્તુળ $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ને (1, –1) આગળ બહારથી સ્પર્શે, તો Cની ત્રિજ્યા ......

(A) 5 (B) $2\sqrt{5}$ (C) 4 (D) $\sqrt{57}$

(JEE online April : 2013)



આકૃતિ 9.73

ઉકેલ : વર્તુળ $x^2+y^2+4x-6y-12=0$નું કેન્દ્ર $=\left(-2,3\right)$

ધારો કે વર્તુળ Cનું સમીકરણ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ છે. આ વર્તુળ (4, 0) અને (1, –1)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ 16+8g+c=0$ (1)

$2g-2f+c+2=0$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી, $3g+f+7=0$ (3)

હવે, બંને વર્તુળો (1, –1) આગળ બહારથી સ્પર્શે છે.

∴ બંને વર્તુળોનાં કેન્દ્રો અને સ્પર્શબિંદુ સમરેખ હોય.

અર્થાત્, (–2, 3), (–g, –f), (1, –1) સમરેખ છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -g & -f & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ -2\left(-f+1\right)-3\left(-g-1\right)+1\left(g+f\right)=0$

$\therefore\ 4g+3f+1=0$ (4)

સમીકરણ (3) અને (4) ઉકેલતાં, $g=-4, f=5$. તેથી $c=16$ મળે.

∴ માંગેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા $=\sqrt{g^2+f^2-c}=5$ **જવાબ : (A)**

(195) જો વર્તુળ $x^2+y^2-6x-8y+\left(25-a^2\right)=0$ એ X-અક્ષને સ્પર્શે તો a = ...

(A) 0 (B) ± 4 (C) ± 2 (D) ± 3 (JEE online April : 2013)

ઉકેલ : વર્તુળ $x^2+y^2-6x-8y+\left(25-a^2\right)=0$ પરથી,

$2g=-6,\ 2f=-8,\ c=25-a^2$

$\therefore$ વર્તુળનું કેન્દ્ર $=(-g,-f)=(3,4)$

વર્તુળની ત્રિજ્યા $=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{9+16-25+a^2}=|a|$

અહીં, વર્તુળ X-અક્ષને સ્પર્શે છે.

$\therefore$ ત્રિજ્યા = | કેન્દ્રનો y-યામ |

$|a| = |4|$

$\therefore\ a=\pm 4$

બીજી રીત :

$y=0$ લેતાં $x^2-6x+25-a^2=0$ ને સમાન બીજ છે.

$\therefore\ 36=4\left(25-a^2\right)$

$\therefore\ a^2=16$

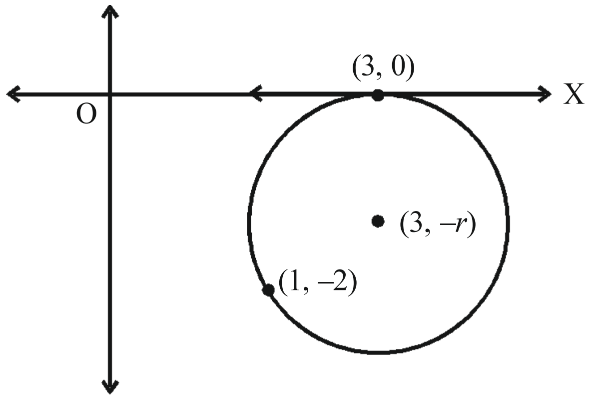
$\therefore\ a=\pm 4$

જવાબ : (B)

(196) (1, –2) માંથી પસાર થતું અને X-અક્ષને (3, 0) આગળ સ્પર્શતું વર્તુળ ...... બિંદુમાંથી પણ પસાર થાય છે.

(A) (–5, 2) (B) (2, –5) (C) (5, –2) (D) (–2, 5)

(JEE April : 2013)



આકૃતિ 9.74

ઉકેલ : અહીં વર્તુળ X-અક્ષને (3, 0) આગળ સ્પર્શે છે અને (1, –2) માંથી પસાર થાય છે.

ધારો કે વર્તુળનું કેન્દ્ર (3, $-r$) છે.

કેન્દ્રથી વર્તુળ પરના બિંદુ સુધીનું અંતર ત્રિજ્યા જેટલું હોય.

$\therefore$ ત્રિજ્યા $=\sqrt{(3-1)^2+(-r+2)^2}$

$r^2 = 4+4-4r+r^2$

$\therefore\ 4r=8$. આથી, $r=2$

$\therefore$ વર્તુળનું કેન્દ્ર $(3,-2)$ છે.

$\therefore$ વર્તુળનું સમીકરણ $(x-3)^2+(y+2)^2=4$

વળી $(5,-2)$એ વર્તુળના સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

$\therefore$ આપેલ વર્તુળ $(5,-2)$માંથી પણ પસાર થાય છે. **જવાબ : (C)**

(197) વર્તુળો $x^2+y^2-4x-4y+6=0$ અને $x^2+y^2-10x-10y+\lambda=0$ હોય, તો બંને વર્તુળોને બરાબર બે સામાન્ય સ્પર્શકો દોરી શકાય તેવી λ ની તમામ કિંમતોનો ગણ ...... (JEE online April : 2014)

(A) (12, 32) (B) (18, 42) (C) (11, 24) (D) (18, 48)

ઉકેલ : અહીં વર્તુળને બરાબર બે સામાન્ય સ્પર્શકો દોરી શકાય છે. તેથી બંને વર્તુળો બે ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે.

હવે, $x^2+y^2-4x-4y+6=0$ નું કેન્દ્ર, $C_1(2, 2)$, ત્રિજ્યા $r_1=\sqrt{2}$

હવે, આપેલાં વર્તુળો $x^2+y^2-4x-4y+6=0$ અને $x^2+y^2-10x-10y+\lambda=0$ ની સામાન્ય જીવાને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $6x+6y+6-\lambda=0$ મળે.

અહીં, બંને વર્તુળો બે ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદતાં હોવાથી, વર્તુળના કેન્દ્રનું રેખા $6x+6y+6-\lambda=0$ સુધીનું અંતર ત્રિજ્યા કરતાં ઓછું થાય.

$$\therefore \quad \left|\frac{6(2)+6(2)+6-\lambda}{\sqrt{(6)^2+(6)^2}}\right| < \sqrt{2}$$

$\therefore \quad |30-\lambda| < 12$

$\therefore \quad -12 < 30-\lambda < 12$

$\therefore \quad 30-\lambda > -12,$ અને $30-\lambda < 12$

$\therefore \quad \lambda < 42, \qquad \lambda > 18$

$\therefore \quad 18 < \lambda < 42$

$\therefore \quad \lambda \in (18, 42)$ **જવાબ : (B)**

બીજી રીત :

$C_1(2, 2),\ C_2(5, 5)$

$|r_1-r_2| < C_1C_2 < r_1+r_2$

$\left|\sqrt{2}-\sqrt{50-\lambda}\right| < \sqrt{18} < \sqrt{2}+\sqrt{50-\lambda}$

$\therefore \quad 52-\lambda-2\sqrt{100-2\lambda} < 18 < 52-\lambda+2\sqrt{100-2\lambda}$

$\therefore \quad 34-\lambda < -2\sqrt{100-2\lambda}$ તથા $\lambda-34 < 2\sqrt{100-2\lambda}$

$\therefore \quad (34-\lambda)^2 < 400-8\lambda$

$\therefore \quad 1156-68\lambda+\lambda^2 < 400-8\lambda$

$\therefore \quad \lambda^2-60\lambda+756 < 0$

$(\lambda-18)(\lambda-42) < 0$

$\therefore \quad \lambda \in (18, 42)$

(198) બે વર્તુળો $x^2+y^2=16$ અને $x^2+y^2-2y=0$ ને ...... સામાન્ય સ્પર્શકો દોરી શકાય.

(A) એક (B) બે (C) ત્રણ (D) શૂન્ય

(JEE online April : 2014)

ઉકેલ : અહીં $x^2+y^2=16$ નું કેન્દ્ર $C_1(0,0)$ તથા ત્રિજ્યા $r_1=4$ તથા વર્તુળ $x^2+y^2-2y=0$ નું કેન્દ્ર $C_2(0,1)$ તથા ત્રિજ્યા $r_2=1$

અહીં $C_1C_2=\sqrt{0^2+1^2}=1$ તથા $|r_1-r_2|=3$

$\therefore \quad C_1C_2<|r_1-r_2|$

એક વર્તુળ બીજા વર્તુળના અંદરના ભાગમાં છે તેમ કહી શકાય.

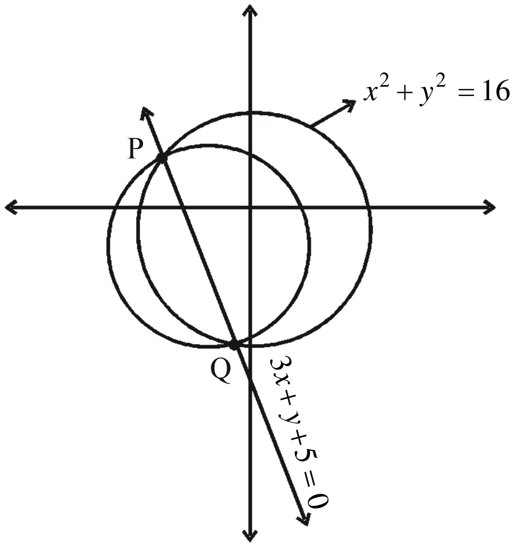
$\therefore$ એક પણ સ્પર્શક ન દોરી શકાય. **જવાબ : (D)**

(199) વર્તુળ $x^2+y^2=16$ ની જીવાને સમાવતી રેખા $3x+y+5=0$ ને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલ વર્તુળનું સમીકરણ ......

(JEE online April : 2014)

(A) $x^2+y^2+3x+y+1=0$ (B) $x^2+y^2+3x+y-11=0$

(C) $x^2+y^2+3x+y-2=0$ (D) $x^2+y^2+3x+y-22=0$



આકૃતિ 9.75

ઉકેલ : અહીં આપેલ માહિતી પરથી માંગેલ વર્તુળ $x^2+y^2=16$ ની સામાન્ય જીવાને સમાવતી રેખા $3x+y+5=0$ છે.

તેથી, માંગેલ વર્તુળ $x^2+y^2=16$ અને $3x+y+5=0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

તેથી, ધારો કે માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $(x^2+y^2-16)+\lambda(3x+y+5)=0$ છે.

$\therefore \; x^2+y^2+3\lambda x+\lambda y+5\lambda-16=0$ છે.

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર $=\left(\frac{-3\lambda}{2},\frac{-\lambda}{2}\right)$ થશે અને તે રેખા $3x+y+5=0$ પર છે.

$3\left(\frac{-3\lambda}{2}\right)+\left(\frac{-\lambda}{2}\right)+5=0$

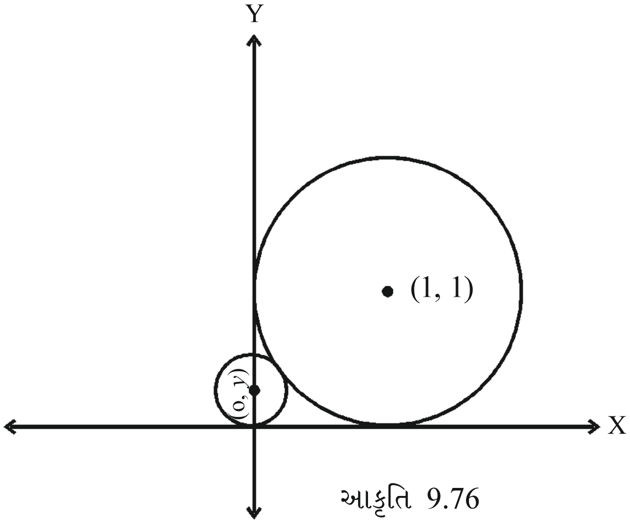
આથી $-5\lambda + 5 = 0$

$\therefore \lambda = 1$

તેથી માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ, $x^2 + y^2 + 3x + y - 11 = 0$ **જવાબ : (B)**

(200) ધારો કે C એ (1, 1) કેન્દ્ર અને 1 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ C છે. જો T એ $(0, y)$ કેન્દ્રવાળુ, ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતું અને વર્તુળ C ને બહારથી સ્પર્શતું વર્તુળ હોય, તો વર્તુળ Tની ત્રિજ્યા = ... (JEE April : 2014)

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



આકૃતિ 9.76

ઉકેલ : અહીં વર્તુળ C નું કેન્દ્ર $C_1(1,1)$ અને ત્રિજ્યા $r_1 = 1$ છે.

વર્તુળ Tનું કેન્દ્ર $C_2(0, y)$ અને ત્રિજ્યા r_2 છે.

હવે, વર્તુળ Tનું કેન્દ્ર Y-અક્ષ પર છે અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે એટલે કે વર્તુળ T, X-અક્ષને ઊગમબિંદુ આગળ સ્પર્શે છે.

$\therefore$ ત્રિજ્યા $r_2 = |$ કેન્દ્રનો y-યામ $| = y$ (બંને વર્તુળો બહારથી સ્પર્શતા હોવાથી $y > 0$)

હવે, બંને વર્તુળો પરસ્પર બહારથી સ્પર્શે છે.

$\therefore C_1C_2 = r_1 + r_2$

$\therefore (1-0)^2 + (y-1)^2 = (1+y)^2$

$\therefore 1 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$

$\therefore 4y = 1$. આથી, $y = \frac{1}{4}$

$\therefore$ વર્તુળ Tની ત્રિજ્યા $r_2 = \frac{1}{4}$ **જવાબ : (B)**

(201) જો બિંદુ (1, 4) એ વર્તુળ $x^2+y^2-6x-10y+p=0$ની અંદરના ભાગમાં હોય અને વર્તુળ અક્ષોને સ્પર્શતું કે કાપતું ન હોય, તો pની તમામ કિંમતોનો ગણ ......

(A) (0, 25) (B) (25, 39) (C) (9, 25) (D) (25, 29)

(JEE online April : 2014)

ઉકેલ : બિંદુ (1, 4) એ વર્તુળ $x^2+y^2-6x-10y+p=0$ના અંદરના ભાગમાં છે.

$\therefore\ 1+16-6(1)-10(4)+p<0$

$\therefore\ p<29$

હવે, વર્તુળ $x^2+y^2-6x-10y+p=0$નું કેન્દ્ર (3, 5) તથા ત્રિજ્યા $=\sqrt{34-p}$

આપેલ શરત મુજબ, વર્તુળ અક્ષોને સ્પર્શતું કે કાપતું નથી.

$\therefore$ વર્તુળની ત્રિજ્યા <3 (<5 પણ)

$\therefore\ \sqrt{34-p}<3$

$\therefore\ 34-p<9$

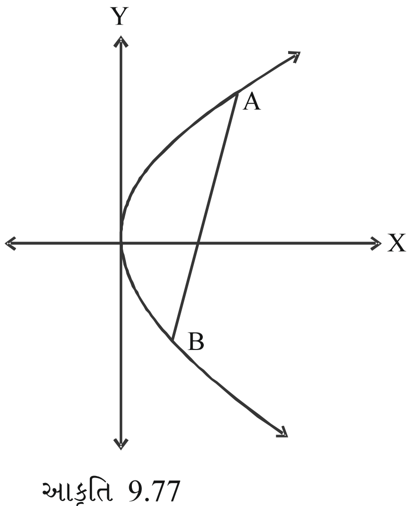
$\therefore\ p>25$

આમ, $25<p<29$. આથી $p\in(25, 29)$ **જવાબ : (D)**

(202) જો પરવલય $y^2=6x$ની નાભિમાંથી જીવા દોરવામાં આવે છે કે જેથી પરવલયનાં શિરોબિંદુથી નાભિજીવાનું અંતર $\frac{\sqrt{5}}{2}$ હોય તો તેનો ઢાળ...... હશે.

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (JEE online)

ઉકેલ :



આકૃતિ 9.77

અહીં $y^2=6x$ પરથી $a=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ નાભિ $S(a, 0)=\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ છે.

ધારો કે નાભિજીવાનું એક અંત્યબિંદુ $A\left(at^2, 2at\right)=\left(\frac{3}{2}t^2, 3t\right)$ છે. $(t>0)$

$\therefore$ નાભિજીવાનો ઢાળ $=\frac{3t-0}{\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}}=\frac{2t}{t^2-1}$

$\therefore$ નાભિજીવાનું સમીકરણ $y-0=\frac{2t}{t^2-1}\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$\therefore\ 2tx + (1 - t^2)\, y - 3t = 0$ મળે.

હવે, ઊગમબિંદુ (શિરોબિંદુ) (0,0)થી નાભિજીવાનું અંતર $\frac{\sqrt{5}}{2}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{|3t|}{\sqrt{4t^2 + (1-t^2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \quad 6|t| = \sqrt{5}\,(1 + t^2)$$

$$\therefore \quad \sqrt{5}\, t^2 - 6|t| + \sqrt{5} = 0$$

$$\therefore \quad (\sqrt{5}t - 1)(t - \sqrt{5}) = 0 \qquad (|t| = t)$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{5} \text{ અથવા } t = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ જો $t = \sqrt{5}$, તો નાભિજીવાનો ઢાળ $= \frac{\sqrt{5}}{2}$

જો $t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ તો ઢાળ $= \frac{-\sqrt{5}}{2}$

જવાબ : (A)

(203) ઉપવલય $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ની નાભિઓમાંથી પસાર થતા $(0, 3)$ કેન્દ્ર ધરાવતાં વર્તુળનું સમીકરણ ...... છે.

(A) $x^2 + y^2 - 6y + 7 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 6y - 5 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ (JEE : 2013)

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ પરથી $a^2 = 16, b^2 = 9$. આથી $a > b$

હવે, $b^2 = a^2(1 - e^2)$. આથી, $9 = 16(1 - e^2)$

$\therefore\ e^2 = \frac{7}{16}$. આથી, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

ઉપવલયની નાભિઓ $(\pm ae, 0) = (\pm\sqrt{7}, 0)$

વર્તુળ $(\sqrt{7}, 0)$, $(-\sqrt{7}, 0)$માંથી પસાર થાય છે અને વર્તુળનું કેન્દ્ર $(0, 3)$ છે.

તેથી, વર્તુળની ત્રિજ્યા $= \sqrt{7 + 9} = 4$

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = (4)^2$

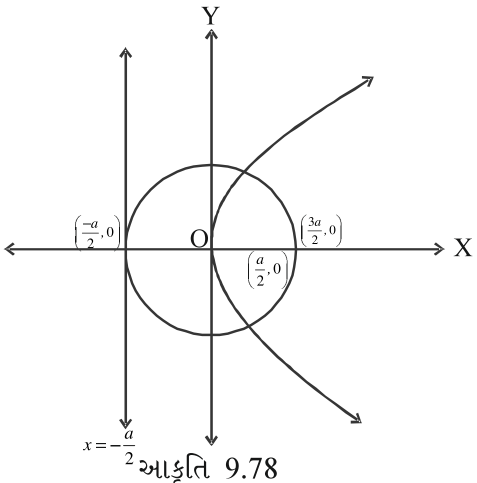
$\therefore\ x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$

જવાબ : (C)

એક કરતાં વધુ વિકલ્પો સાચા હોય તેવા પ્રશ્નો :

(204) પરવલય $y^2 = 2ax$નું નાભિ એ વર્તુળનું કેન્દ્ર હોય તથા પરવલય $y^2 = 2ax$ની નિયામિકા તે વર્તુળનો એક સ્પર્શક હોય, તો તે વર્તુળ અને પરવલયના છેદબિંદુના યામ ...... $(a > 0)$

(A) $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{a}{2}, -a\right)$ (C) $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{a}{2}, a\right)$



આકૃતિ 9.78

ઉકેલ : પરવલયના નાભિલંબની લંબાઈ $=2a$ તથા નાભિના યામ $\left(\frac{a}{2},0\right)$ અને પરવલયની નિયામિકા $x=-\frac{a}{2}$

આપેલ માહિતી પરથી, વર્તુળનું કેન્દ્ર $=\left(\frac{a}{2},0\right)$ તથા રેખા $x=-\frac{a}{2}$ વર્તુળને સ્પર્શે છે.

$\therefore$ વર્તુળની ત્રિજ્યા $=a$ થશે.

$\therefore$ વર્તુળનું સમીકરણ $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=a^2$

$\therefore$ સમીકરણ $y^2=2ax$ અને $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=a^2$ ઉકેલતાં,

$x^2-ax+\frac{a^2}{4}+2ax-a^2=0$

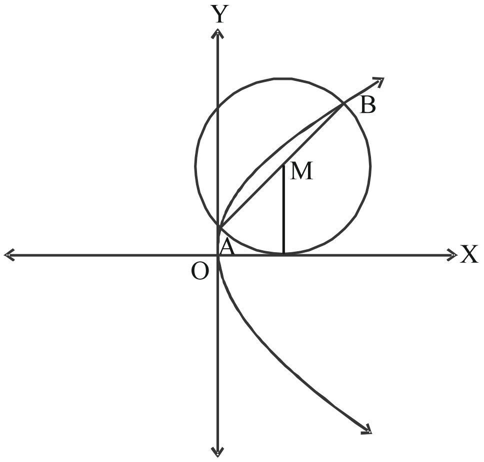
$\therefore$ $x^2+ax-\frac{3a^2}{4}=0$ એટલે કે $4x^2+4ax-3a^2=0$

$\therefore$ $(2x+3a)(2x-a)=0.$ તેથી $x=\frac{a}{2}$ $(x>0)$

$\therefore$ માંગેલ છેદબિંદુ $=\left(\frac{a}{2},\pm a\right)$ **જવાબ : (B), (D)**

(205) જો A અને B એ પરવલય $y^2=4x$ પરનાં બે ભિન્ન બિંદુઓ હોય તથા r ત્રિજ્યાવાળું અને $\overline{AB}$ જેનો વ્યાસ હોય તેવું વર્તુળ પરવલયની અક્ષને સ્પર્શે, તો $\overline{AB}$નો ઢાળ ......

(A) $\frac{1}{r}$ (B) $-\frac{1}{r}$ (C) $\frac{2}{r}$ (D) $-\frac{2}{r}$



આકૃતિ 9.79

ઉકેલ : અહીં, પરવલય $y^2 = 4ax$ પરથી $4a = 4$. આથી, $a = 1$

A અને B પરવલય પરના બિંદુ છે.

ધારો કે Aના યામ $= (at_1^2, 2at_1) = (t_1^2, 2t_1)$ તથા Bના યામ $= (at_2^2, 2at_2) = (t_2^2, 2t_2)$

$\overline{AB}$ વર્તુળનો વ્યાસ છે. તેથી, વર્તુળનું કેન્દ્ર $\left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}, t_1 + t_2\right)$

હવે, વર્તુળ પરવલયની અક્ષને સ્પર્શે છે અર્થાત્ વર્તુળ X-અક્ષને સ્પર્શે છે.

$\therefore$ વર્તુળના કેન્દ્રથી X-અક્ષ સુધીનું અંતર $=$ ત્રિજ્યા

$\therefore \ r = | t_1 + t_2 |$

$\therefore \ t_1 + t_2 = r$ અથવા $t_1 + t_2 = -r$

$\therefore \ \overline{AB}$ નો ઢાળ $= \frac{2t_2 - 2t_1}{t_2^2 - t_1^2} = \frac{2}{t_1 + t_2}$ $\therefore$ માંગેલ ઢાળ $= \frac{2}{r}$ અથવા $= -\frac{2}{r}$

જવાબ : (C), (D)

(206) પરવલય $y^2 - kx + 12 = 0$ ની નિયામિકા $x + 2 = 0$ હોય, તો kની કિંમત = ...

(A) 4 (B) -4 (C) 12 (D) 16

ઉકેલ : અહીં, $y^2 = kx - 12$

$\therefore \ (y - 0)^2 = k\left(x - \frac{12}{k}\right)$

ઊગમબિંદુનું $\left(\frac{12}{k}, 0\right)$ આગળ સ્થાનાંતર કરતાં, $x' = x - \frac{12}{k}$, $y' = y - 0$

$\therefore$ પરવલયનું સમીકરણ $y'^2 = kx'$ આથી, $4a = k$. આથી, $a = \frac{k}{4}$

$\therefore \ y'^2 = kx'$ પરવલયની નિયામિકા $x' = -a$ પરથી $x' = -\frac{k}{4}$ પરંતુ $x' = x - \frac{12}{k}$

$\therefore \ x - \frac{12}{k} = \frac{-k}{4}$. આથી, $x = \frac{12}{k} - \frac{k}{4}$. વળી, તે તો $x = -2$ છે.

$\therefore \ -2 = \frac{48 - k^2}{4k}$

$\therefore \ k^2 - 8k - 48 = 0$

$\therefore \ k = 12$ અથવા $k = -4$ **જવાબ : (B), (C)**

(207) જો પરવલય $x^2 - 2y - 4x + 4 = 0$નું શિરોબિંદુ M હોય, નાભિલંબની લંબાઈ L હોય તો જે પરવલયનું શિરોબિંદુ M, નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{1}{2}$L તથા જેનો અક્ષ આપેલ પરવલયના અક્ષને લંબ હોય, તેવા પરવલયનું સમીકરણ ...... (AIEEE : 2005)

(A) $y^2 = 2x - 1$ (B) $y^2 = x - 2$ (C) $y^2 = 2 - x$ (D) $y^2 = x - 1$

ઉકેલ : પરવલય $x^2 - 2y - 4x + 4 = 0$ પરથી, $x^2 - 4x + 4 = 2y$

$\therefore\ (x-2)^2 = 2y$

$\therefore\ x'^2 = 2y'$ $\quad (x' = x-2,\ y' = y-0)$

નાભિલંબની લંબાઈ $= 4|a| = 2$. આથી, $|a| = \frac{1}{2}$

પરવલયનું શિરોબિંદુ $M(2, 0)$ છે. વળી $L = 2$

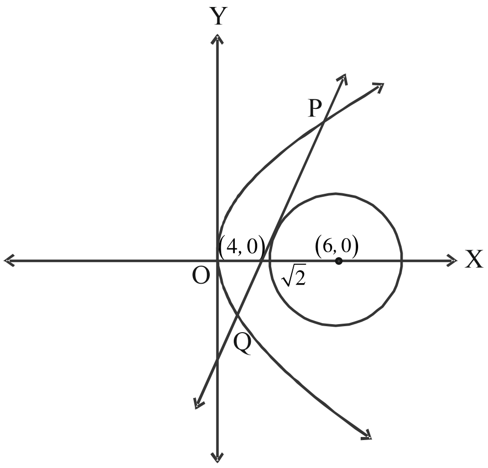
હવે, માંગેલ પરવલયના નાભિલંબની લંબાઈ $= \frac{1}{2}(2) = 1$

$\therefore$ માંગેલ પરવલયનું સમીકરણ, $(y-0)^2 = \pm 1(x-2)$

$\therefore\ y^2 = x - 2$ અથવા $y^2 = 2 - x$ **જવાબ : (B), (C)**

(208) પરવલય $y^2 = 16x$ની નાભિજીવા વર્તુળ $(x-6)^2 + y^2 = 2$નો સ્પર્શક હોય, તો નાભિજીવાનો ઢાળ = ...

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2



આકૃતિ 9.80

ઉકેલ : વર્તુળ $(x-6)^2 + y^2 = 2$નું કેન્દ્ર $(6, 0)$ તથા ત્રિજ્યા $= \sqrt{2}$

પરવલય $y^2 = 16x$ પરથી $a = 4$ આથી, પરવલયનું નાભિ $(4, 0)$ થશે.

$\therefore$ પરવલયની નાભિજીવા $\overleftrightarrow{PQ}$નું સમીકરણ $y = m(x-4)$

રેખા $mx - y - 4m = 0$ એ વર્તુળ $(x-6)^2 + y^2 = 2$નો સ્પર્શક છે.

$\therefore$ કેન્દ્ર $(6, 0)$થી $mx - y - 4m = 0$નું લંબઅંતર = વર્તુળની ત્રિજ્યા

$$\therefore\ \frac{|m(6) - 4m|}{\sqrt{1+m^2}} = \sqrt{2}$$

$\therefore\ 4m^2 = 2(1 + m^2)$

$\therefore\ 2m^2 = 2$

$\therefore\ m^2 = 1$ આથી, $m = \pm 1$ **જવાબ : (A), (B)**

(209) ધારો કે L_1 એ વક્રો $x^2 + y^2 = 9$ અને $y^2 = 8x$ની સામાન્ય જીવાની લંબાઈ છે અને L_2 એ $y^2 = 8x$ ના નાભિલંબની લંબાઈ છે, તો ......

(A) $L_1 > L_2$ (B) $L_1 = L_2$ (C) $L_1 < L_2$ (D) $\frac{L_2}{L_1} = \sqrt{2}$ (JEE online)

ઉકેલ : આપેલ વક્રો $x^2 + y^2 = 9$ અને $y^2 = 8x$ પરથી છેદબિંદુ શોધીએ.

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$\therefore (x+9)(x-1) = 0$

$\therefore$ $x = -9$ અથવા $x = 1$

પરંતુ $x = -9$, તો $y^2 = -72 < 0$ જે શક્ય નથી.

$\therefore x = 1$ તો $y^2 = 8$. આથી, $y = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore$ બંને વક્રોના છેદબિંદુ $\left(1, 2\sqrt{2}\right)$ અને $\left(1, -2\sqrt{2}\right)$

$\therefore$ $L_1 =$ બંને વક્રોના સામાન્ય જીવાની લંબાઈ $= 4\sqrt{2}$

હવે, $y^2 = 8x$ પરથી $a = 2$

$\therefore$ વક્ર $y^2 = 8x$ના નાભિલંબની લંબાઈ $L_2 = 4|a| = 8$

$\therefore L_2 = \sqrt{2}\, L_1$, તથા $L_2 > L_1$ **જવાબ : (C), (D)**

(210) ઉપવલય $4x^2 + 9y^2 = 1$ પરનાં જે બિંદુઓ આગળ દોરેલા સ્પર્શકો રેખા $8x - 9y = 0$ને સમાંતર હોય, તેવાં બિંદુઓના યામ = ...

(A) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (B) $\left(\frac{-2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ (D) $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

ઉકેલ : ઉપવલયનો સ્પર્શક અને રેખા $8x - 9y = 0$ સમાંતર રેખાઓ હોવાથી બંનેના ઢાળ સમાન થશે.

રેખા $8x - 9y = 0$નો ઢાળ $= \frac{8}{9} = m$

ઉપવલય $4x^2 + 9y^2 = 1$ $\Rightarrow 8x + 18y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore$ ઉપવલયના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y}$

આપેલ શરત મુજબ $\frac{-4x}{9y} = \frac{8}{9}$ આથી, $x = -2y$

ઉપવલય $4x^2 + 9y^2 = 1$ પરના બિંદુનો x-યામ $= -2y$ હોવાથી $16y^2 + 9y^2 = 1$

$\therefore$ $25y^2 = 1$. આથી, $y = \pm\frac{1}{5}$

$y = \frac{1}{5} \Rightarrow x = -2y$ પરથી $x = \frac{-2}{5}$

$y = \frac{-1}{5} \Rightarrow x = -2y$ પરથી $x = \frac{2}{5}$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુઓ $\left(\frac{-2}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

બીજી રીત :

સ્પર્શકના સમીકરણ

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ પરથી,

$y = \frac{8}{9}x \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} \times \frac{64}{81}\right) + \frac{1}{9}}$ એટલે કે $y = \frac{8x}{9} \pm \frac{5}{9}$

સ્પર્શબિંદુના યામ $= \left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$

$$= \left(\frac{-\frac{1}{4}\times\frac{8}{9}}{\pm\frac{5}{9}}, \frac{\frac{1}{9}}{\pm\frac{5}{9}}\right) = \left(\mp\frac{2}{5}, \pm\frac{1}{5}\right)$$

$= \left(\frac{-2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ અથવા $\left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ **જવાબ : (B), (C)**

(211) ધારો કે d એ ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ના કેન્દ્રથી ઉપવલય પરના બિંદુ P એ દોરેલા સ્પર્શક પરનું લંબઅંતર છે. જો S અને S′ ઉપવલયની નાભિઓ હોય તો $(PS - PS')^2 =$ ......

(A) $4a^2e^2 cos^2\theta$ (B) $2a^2e^2 cos^2\theta$ (C) $4a^2\left(1 + \frac{b^2}{d^2}\right)$ (D) $4a^2\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right)$

ઉકેલ : ધારો કે ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ માં $a > b$ છે તથા e તેની ઉત્કેન્દ્રતા છે.

$S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$ ઉપવલયની નાભિઓ છે.

હવે, ઉપવલય પરનાં બિંદુ $P(a cos\theta, b sin\theta)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $\frac{x}{a}cos\theta + \frac{y}{b}sin\theta = 1$ છે.

હવે, $SP = a - ex = a - ae cos\theta$, $S'P = a + ex = a + ae cos\theta$

$(SP - S'P)^2 = 4a^2e^2 cos^2\theta$

અહીં, $d = (0, 0)$થી બિંદુ P આગળના સ્પર્શક સુધીનું લંબઅંતર

$$\therefore d^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 cos^2\theta + a^2 sin^2\theta}$$

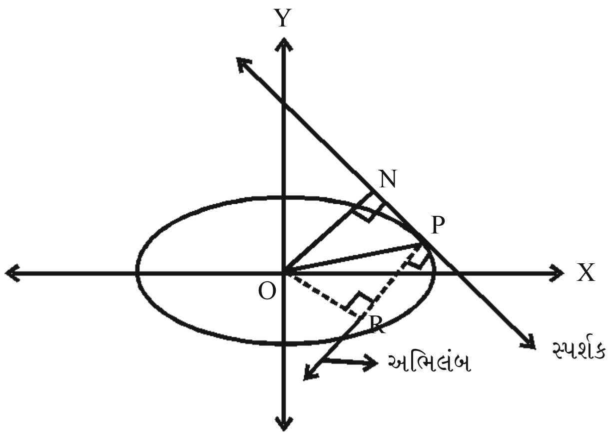
હવે, $4a^2\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right) = 4a^2\left(1 - \frac{b^2 cos^2\theta + a^2 sin^2\theta}{a^2}\right)$

$= 4a^2e^2 cos^2\theta$ **જવાબ : (A), (D)**

(212) ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ પરનાં બિંદુ P ના યામ શોધો કે જેથી ΔPON નું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ થાય, જ્યાં O ઊગમબિંદુ તથા ON એ કેન્દ્રથી સ્પર્શક પરનું લંબઅંતર છે. P ઉપવલય પરનું ચલ બિંદુ છે.

(A) $\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ (B) $\left(\frac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

(C) $\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ (D) $\left(\frac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$



આકૃતિ 9.81

ઉકેલ : અહીં, ઉપવલય પરના બિંદુ $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ છે.

$\therefore \quad ON = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$

આકૃતિ પરથી, $NP = OR$

જ્યાં OR = કેન્દ્રથી સ્પર્શબિંદુ Pમાંથી પસાર થતા અભિલંબ પરનું લંબઅંતર

હવે, Pમાંથી પસાર થતા અભિલંબનું સમીકરણ $bx\cos\theta - ay\sin\theta + a^2\sin\theta\cos\theta - b^2\sin\theta\cos\theta = 0$ હોવાથી,

$$OR = \frac{(a^2 - b^2)|\sin\theta\cos\theta|}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$$

$\therefore \quad \Delta\ ONP$નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times ON \times NP$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{ab(a^2-b^2)\tan\theta}{(b^2+a^2\tan^2\theta)}$$

$\Delta\ ONP$નું ક્ષેત્રફળ A મહત્તમ થવા માટે $\dfrac{dA}{d\theta} = 0$ થવું જોઈએ.

$\therefore \quad \left(b^2 + a^2\tan^2\theta\right)\sec^2\theta - \tan\theta\left(2a^2\tan\theta\sec^2\theta\right) = 0$

$\therefore \quad \sec^2\theta\left(b^2 - a^2\tan^2\theta\right) = 0$

$\therefore \quad \tan\theta = \pm\dfrac{b}{a}$ થવું જોઈએ. $\qquad (\sec^2\theta \neq 0)$

$\therefore \quad \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta = \dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ તથા $\cos\theta = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta = \dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ Pના યામ $= \left(\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(\dfrac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{\pm b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

જવાબ : **(A), (B), (C), (D)**

(213) ઉપવલય $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$ ના કેન્દ્રથી 3 એકમ અંતરે આવેલ ઉપવલયના બિંદુનો ઉત્કેન્દ્રીકોણ = ...

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ બિંદુનો ઉત્કેન્દ્રીકોણ θ છે.

અહીં, ઉપવલય $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$ પરથી $a^2=15,\ b^2=3$

ધારો કે ઉપવલય પરનું બિંદુ $P(\theta)=P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ તથા $O(0,0)$ છે.

તેથી $P\left(\sqrt{15}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta\right)$. હવે, $OP = 3 \Rightarrow OP^2 = 9$

$\therefore\ 15\cos^2\theta+3\sin^2\theta=9$

$\therefore\ 15\cos^2\theta+3\left(1-\cos^2\theta\right)=9$

$\therefore\ 12\cos^2\theta=6$. તેથી, $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. આથી, $\theta=\frac{\pi}{4}$ અથવા $\theta=\frac{3\pi}{4}$ **જવાબ : (A), (D)**

(214) ઉપવલય $25x^2+50x+16y^2-64y-311=0$ ની નાભિઓના યામ = ...

(A) $(-1,1)$ (B) $(-1,-1)$ (C) $(-1,5)$ (D) $(-5,5)$

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય પરથી,

$25x^2+50x+25+16y^2-64y+64-400=0$

$\therefore\ 25\left(x^2+2x+1\right)+16\left(y^2-4y+4\right)=400$

$\therefore\ \frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$ (1)

ઊગમબિંદુનું $(-1,2)$ આગળ સ્થાનાંતર કરતાં,

$\therefore$ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{25}=1$. આથી, $a^2=16,\ b^2=25$. આથી, $a<b$ (2)

$\therefore\ a^2=b^2\left(1-e^2\right)$ પરથી,

$e^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$. તેથી, $e=\frac{3}{5}$

$\therefore$ ઉપવલયની નાભિઓ $S(0,be)=S(0,3)$ તથા $S'(0,-be)=S'(0,-3)$ મળે.

$x+1=0,\ y-2=3$ તથા $x+1=0,\ y-2=-3$ પરથી,

$\therefore$ આપેલ ઉપવલયની નાભિઓ = $(-1,5),\ (-1,-1)$ **જવાબ : (B), (C)**

(215) ઉપવલય $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{81}=1$ ની નિયામિકાનું સમીકરણ = ...

(A) $y=\frac{81}{4\sqrt{2}}$ (B) $y=\frac{81}{3\sqrt{2}}$ (C) $y=\frac{-81}{4\sqrt{2}}$ (D) $y=\frac{-81}{3\sqrt{2}}$

ઉકેલ : ઉપવલય $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{81}=1$ પરથી, $a^2=49,\ b^2=81$

$\therefore\ a<b$ હોવાથી, $a^2=b^2\left(1-e^2\right)$

$\therefore$ ઉત્કેન્દ્રતા $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}\ =\ \sqrt{1-\frac{49}{81}}\ =\ \sqrt{\frac{32}{81}}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\therefore$ ઉપવલયની નિયામિકા $y=\pm\frac{b}{e}=\pm\frac{9}{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$

$$y=\pm\frac{81}{4\sqrt{2}}$$

$\therefore$ માંગેલ નિયામિકા $y=\frac{81}{4\sqrt{2}},\ y=\frac{-81}{4\sqrt{2}}$ **જવાબ : (A), (C)**

(216) ધારો કે $E_1:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ અને $E_2:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ બે ઉપવલયનાં સમીકરણો છે. બંને ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતાઓનો ગુણાકાર $\frac{1}{2}$ હોય, તો E_2 ના ગૌણ અક્ષની લંબાઈ ......

(A) 8 (B) 9 (C) 2 (D) 4

ઉકેલ : ઉપવલય $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ માં $a^2=3, b^2=2, a>b$ છે.

જો ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા e_1 હોય, તો $e_1^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$. આથી, $e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ઉપવલય $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ માં $a^2=16,\quad a>b$ લઈએ.

જો ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા e_2 હોય, તો $e_2^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{16-b^2}{16}$

$\therefore\ e_1^2\times e_2^2=\frac{1}{3}\left(\frac{16-b^2}{16}\right)=\frac{16-b^2}{48}$

$\therefore\ \frac{1}{4}=\frac{16-b^2}{48}$ ($e_1e_2=\frac{1}{2}$ આપેલ છે.)

$\therefore\ b^2=4$. આથી, $b=2$

$\therefore\ E_2$ ના ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $=\ 2b=4$

જો $a<b$ હોય તો એટલે કે $b>a$ હોય, તો

$e_2^2=\frac{b^2-a^2}{b^2}=\frac{b^2-16}{b^2}$. આથી, $e_1e_2=\frac{1}{2}\Rightarrow e_1^2e_2^2=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left(\frac{b^2-16}{b^2}\right)$

$\therefore\ 3b^2=4b^2-64$. આથી, $b^2=64$

તો ગૌણ અક્ષ $=2a=8$ **જવાબ : (A), (D)**

(217) અતિવલય $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ ના સ્પર્શકો રેખા $2x-y-1=0$ને સમાંતર સ્પર્શકો છે, તો અતિવલય પરના સ્પર્શબિંદુના યામ ......

(A) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (B) $\left(\frac{-9}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (C) $\left(3\sqrt{3}, -2\sqrt{2}\right)$ (D) $\left(-3\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right)$

(IIT : 2012)

ઉકેલ : સ્પર્શકો રેખા $2x-y-1=0$ ને સમાંતર છે. આથી, સ્પર્શકોનો ઢાળ = 2.

$a^2=9,\ b^2=4,\ c^2=a^2m^2-b^2=36-4=32$

સ્પર્શબિંદુના યામ $\left(\frac{-a^2m}{c}\ \frac{-b^2}{c}\right)=\left(\frac{-18}{\pm4\sqrt{2}}\ \frac{-4}{\pm4\sqrt{2}}\right)$

$=\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{-9}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **જવાબ : (A), (B)**

(218) ઉપવલય $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ની નાભિમાંથી પસાર થતા તથા જેની મુખ્ય અક્ષ અને અનુબદ્ધ અક્ષો એ ઉપવલયની મુખ્ય અક્ષ અને ગૌણ અક્ષ હોય અને ઉત્કેન્દ્રતાનો ગુણાકાર 1 હોય તેવા અતિવલય માટે ......

(A) સમીકરણ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (B) નાભિ $(5, 0)$

(C) સમીકરણ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ (D) નાભિ $\left(5\sqrt{3}, 0\right)$ (IIT : 2006)

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ માટે $a^2=25,\ b^2=16,\ a>b$

∴ ઉપવલયનો પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ અને ગૌણ અક્ષ Y-અક્ષ છે.

∴ માંગેલ અતિવલયનો મુખ્ય અક્ષ X-અક્ષ અને અનુબદ્ધ અક્ષ Y-અક્ષ થશે.

ધારો કે, માંગેલા અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ છે તથા તેની ઉત્કેન્દ્રતા e_1 છે.

$\therefore\ e_1=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

જો ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા e_2 લઈએ, તો $e_2=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$

આપેલ શરત મુજબ $e_1\times e_2=1$

$\therefore\ \left(\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=1$

$\therefore\ \left(\frac{9}{25}\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=1$

$\therefore\ \frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{9}$ (1)

અહી $e_2=\frac{3}{5},\ a^2=25,\ b^2=16$. આથી ઉપવલયની નાભિ $=(\pm3, 0)$

માંગેલ અતિવલય $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ એ ઉપવલયની નાભિ $(\pm3, 0)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \ \frac{9}{a^2} = 1$. આથી $a^2 = 9$

(1) પરથી $\frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{9}$ માં $a^2 = 9$ લેતાં $b^2 = 16$.

$e_1 = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{5}{3}$. $ae = 5$

$\therefore$ માંગેલ અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, નાભિ $(\pm 5, 0)$ છે. **જવાબ : ((A), (B))**

(219) અતિવલય $7x^2 - 9y^2 - 28x + 18y - 44 = 0$ મુખ્ય અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવતા સ્પર્શકનું સમીકરણ ......

(A) $x + y + \sqrt{2} - 1 = 0$ (B) $x - y + \sqrt{2} - 1 = 0$

(C) $x - y + \sqrt{2} + 1 = 0$ (D) $x - y - (\sqrt{2} + 1) = 0$

ઉકેલ : આપેલ અતિવલયનું સમીકરણ,

$$7x^2 - 28x + 28 - 9y^2 + 18y - 9 - 63 = 0$$

$$\therefore \ 7(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 2y + 1) = 63$$

$$\therefore \ \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$

$$\therefore \ \frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{7} = 1 \qquad (X = x - 2,\ Y = y - 1 \text{ લેતાં})$$

$\therefore$ માંગેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$Y = mX \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ પરથી,

$$\therefore \ (y-1) = tan\frac{\pi}{4}\ (x-2) \pm \sqrt{9\ tan^2\frac{\pi}{4} - 7}$$

$$\therefore \ y - 1 = (x-2) \pm \sqrt{9-7}$$

$$\therefore \ y - 1 = (x-2) \pm \sqrt{2}$$

$\therefore$ $x - y + \sqrt{2} - 1 = 0$ અથવા $x - y - (\sqrt{2} + 1) = 0$ **જવાબ : (B), (D)**

(220) અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ પરના કોઈ બિંદુમાંથી તેના અનંત સ્પર્શકો પર દોરેલા લંબની લંબાઈઓનો ગુણાકાર અને b^2 નો ગુણોત્તર ...... મળે.

(A) $\frac{b^2}{a^2 + b^2}$ (B) $\frac{a^2}{a^2 + b^2}$ (C) $\frac{1}{e^2}$ (D) e^2

ઉકેલ : અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ના અનંત સ્પર્શકો $y = \pm\frac{b}{a}x$ છે. એટલે કે $bx \pm ay = 0$

હવે, ધારો કે અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ પરના બિંદુ $(a sec\theta, b tan\theta)$ માંથી સ્પર્શક $bx - ay = 0$ પર દોરેલા લંબની લંબાઈ p_1 તથા સ્પર્શક $bx + ay = 0$ પર દોરેલા લંબની લંબાઈ p_2 હોય, તો

$$p_1 = \frac{|ab\sec\theta \; - \; ab\tan\theta|}{\sqrt{b^2+a^2}}, \quad p_2 = \frac{|ab\sec\theta \; + \; ab\tan\theta|}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

$$\therefore \; p_1p_2 = \frac{a^2b^2\sec^2\theta - a^2b^2\tan^2\theta}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \; p_1p_2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \; \frac{p_1p_2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

વળી $b^2 = a^2\left(e^2-1\right)$ પરથી $e^2 = \dfrac{b^2+a^2}{a^2}$

$\therefore \; \dfrac{p_1p_2}{b^2} = \dfrac{a^2}{a^2+b^2} = \dfrac{1}{e^2}$ **જવાબ : (B), (C)**

(221) જો અતિવલય $x^2 - y^2\sec^2\alpha = 7$ ની ઉત્કેન્દ્રતા ઉપવલય $x^2\sec^2\alpha + y^2 = 49$ ની ઉત્કેન્દ્રતા કરતા $\sqrt{3}$ ગણી હોય, તો α ની કિંમત = ...

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : અતિવલય $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{7\cos^2\alpha} = 1$ ની ઉત્કેન્દ્રતા e_1 હોય, તો $e_1^2 = \dfrac{a^2+b^2}{a^2} = \dfrac{7+7\cos^2\alpha}{7} = 1+\cos^2\alpha$

ઉપવલય $x^2\sec^2\alpha + y^2 = 49$ ની ઉત્કેન્દ્રતા e_2 હોય, તો $(a = 7\cos\alpha, \; b = 7)$

$$e_2^2 = \frac{b^2-a^2}{b^2} = \frac{49-49\cos^2\alpha}{49} = 1-\cos^2\alpha$$

આપેલ શરત મુજબ, $e_1 = \sqrt{3}\,e_2$. આથી, $e_1^2 = 3\,e_2^2$

$\therefore \; 1+\cos^2\alpha = 3 - 3\cos^2\alpha$. આથી, $4\cos^2\alpha = 2$

$\therefore \; \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$. આથી, $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \; \alpha = \frac{\pi}{4}$ અથવા $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ **જવાબ : (A), (B)**

(222) અતિવલય $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{5} = 1$ ને દોરેલા સ્પર્શક, રેખા $3x+2y-7=0$ ને સમાંતર હોય, તો તેમનાં સમીકરણ ......

(A) $3x + 2y - \sqrt{43} = 0$ (B) $3x + 2y + \sqrt{45} = 0$

(C) $3x + 2y + \sqrt{43} = 0$ (D) $3x + 2y - \sqrt{45} = 0$

ઉકેલ : ધારો કે અતિવલય $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{5} = 1$ ને દોરેલ સ્પર્શક $y = mx+c$ છે. $m = \frac{-3}{2}$ છે.

$\therefore \; c^2 = m^2a^2 - b^2$ પરથી, $c^2 = \frac{9}{4}\times 7 - 5 = \frac{63}{4} - 5 = \frac{43}{4}$ આથી $c = \pm\frac{\sqrt{43}}{2}$

$\therefore$ માંગેલ સ્પર્શક $y = mx+c$ પરથી, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{43}}{2}$ અને $y = \frac{-3}{2}x - \frac{\sqrt{43}}{2}$

$\therefore \; 3x+2y-\sqrt{43} = 0 \;,\; 3x+2y+\sqrt{43} = 0$ **જવાબ : (A), (C)**

(223) અતિવલય $x^2 - y^2 sec^2 \theta = 9$ ની ઉત્કેન્દ્રતા એ ઉપવલય $x^2 sec^2 \theta + y^2 = 81$ ની ઉત્કેન્દ્રતા કરતા બમણી હોય, તો θ ની કિંમત ......

(A) $tan^{-1} \sqrt{3}$ (B) $tan^{-1} \sqrt{2}$ (C) $tan^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}}$ (D) $tan^{-1} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

ઉકેલ : અતિવલય $x^2 - y^2 sec^2 \theta = 9$ પરથી, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9cos^2 \theta} = 1$

અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા e_1 લઈએ, તો $e_1^2 = \frac{b^2}{a^2} + 1 = cos^2 \theta + 1$

ઉપવલય $x^2 sec^2 \theta + y^2 = 81$ પરથી, $\frac{x^2}{81cos^2 \theta} + \frac{y^2}{81} = 1$

જો ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા e_2 લઈએ, તો $e_2^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$ $(a < b)$

$\therefore$ $e_2^2 = 1 - cos^2 \theta$

હવે, આપેલ શરત મુજબ,

$e_1 = 2 e_2$. આથી, $e_1^2 = 4 e_2^2$

$\therefore$ $1 + cos^2 \theta = 4 \left(1 - cos^2 \theta\right)$

$\therefore$ $5cos^2 \theta = 3$. આથી, $cos^2 \theta = \frac{3}{5}$. આથી, $sin^2 \theta = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ $tan^2 \theta = \frac{2}{3}$. આથી, $tan \theta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\therefore$ $\theta = tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ અથવા $\theta = tan^{-1} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ **જવાબ : (C), (D)**

(224) રેખા $7x - 3y + k = 0$ અતિવલય $7x^2 - 9y^2 = 63$ને સ્પર્શે તો k = ...

(A) $3\sqrt{42}$ (B) $2\sqrt{42}$ (C) $-3\sqrt{42}$ (D) $-2\sqrt{42}$

ઉકેલ : આપેલ અતિવલય $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ પરથી $a^2 = 9, b^2 = 7$.

આપેલ રેખા $7x - 3y + k = 0$ પરથી $y = \frac{7}{3}x + \frac{k}{3}$

$\therefore$ $m = \frac{7}{3}$, $c = \frac{k}{3}$

રેખા, અતિવલયને સ્પર્શે છે તેથી $c^2 = a^2m^2 - b^2$.

$\frac{k^2}{9} = 9 \times \frac{49}{9} - 7 = 42$

$\therefore$ $k^2 = 42 \times 9$

$\therefore$ $k = \pm 3\sqrt{42}$ **જવાબ : (A), (C)**

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના દાખલાઓ

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો :

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાન હોય છે :

વિધાન 1 : નિષ્કર્ષ વિધાન

વિધાન 2 : કારક વિધાન

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો નીચે પ્રમાણે હોય છે :

(A) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 1 એ વિધાન 2ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે અને વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

(225) **વિધાન 1 :** વર્તુળ $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$ તથા પરવલય $y^2 = 4\sqrt{5}x$ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = x + \sqrt{5}$ છે.

વિધાન 2 : જો $y = mx + \frac{\sqrt{5}}{m}(m \neq 0)$ એ સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ હોય, તો mની કિંમત $m^4 - 3m^2 + 2 = 0$ને સંતોષે છે.

ઉકેલ : અહીં પરવલય $y^2 = 4\sqrt{5}x$ પરથી $a = \sqrt{5}$

$\therefore$ પરવલયના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx + \frac{\sqrt{5}}{m}$ $(m \neq 0)$.

આ સ્પર્શક વર્તુળને પણ સ્પર્શે છે.

$\therefore$ વર્તુળના કેન્દ્ર $(0, 0)$થી સ્પર્શક $m^2x - my + \sqrt{5} = 0$નું લંબઅંતર = વર્તુળની ત્રિજ્યા

$\therefore \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{m^4 + m^2}}$

$\therefore m^4 + m^2 - 2 = 0$

$\therefore (m^2 + 2)(m^2 - 1) = 0$

પરંતુ $m^2 = -2$ શક્ય નથી. આથી, $m = \pm 1$

$\therefore y = -x + \sqrt{5}$ અને $y = x + \sqrt{5}$ બંને સામાન્ય સ્પર્શકોના સમીકરણ થશે.

વળી $m^2 = 1 \Rightarrow m^4 - 3m^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ મળે છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 પણ સત્ય છે. વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(226) **વિધાન 1 :** વર્તુળ $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ અને $y^2 = 2x$ પરવલયને સામાન્ય સ્પર્શકો નથી.

વિધાન 2 : વર્તુળ $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ અને પરવલય $y^2 = 2x$ને છેદબિંદુ નથી.

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 2x$ પરથી $a = \frac{1}{2}$

$\therefore$ પરવલયના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx + \frac{1}{2m}$ $(m \neq 0)$

તે $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 1 = 0$ ને સ્પર્શે છે.

$\therefore$ $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 1$ ને સ્પર્શે છે.

$\therefore$ વર્તુળના કેન્દ્ર $(2, 0)$થી સ્પર્શક સુધીનું લંબઅંતર = ત્રિજ્યા

$\therefore \frac{\left|2m - 0 + \frac{1}{2m}\right|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$

$\therefore 4m^2 + 1 = 2m\sqrt{m^2+1}$

$\therefore \left(4m^2+1\right)^2 = 4m^2\left(m^2+1\right)$

$\therefore 16m^4 + 8m^2 + 1 = 4m^4 + 4m^2$

$\therefore 12m^4 + 4m^2 + 1 = 0$

$\therefore$ mની કોઈ પણ કિંમત માટે $12m^4 + 4m^2 + 1 = 0$ ના મળે.

$\therefore$ કોઈ પણ $m \in R$ ના મળે.

$\therefore$ વર્તુળ તથા પરવલયને સામાન્ય સ્પર્શક નથી.

$\therefore$ આપેલ પરવલય અને વર્તુળને સામાન્ય સ્પર્શક ન મળે.

છેદબિંદુ માટે $x^2 + 2x - 4x + 3 = 0$

$\therefore$ $x^2 - 2x + 3 = 0$ નો ઉકેલ Rમાં શક્ય નથી.

$\therefore$ બંને પરસ્પર છેદતા નથી.

$\therefore$ વર્તુળ તથા પરવલય છેદતા નથી.

આમ, વિધાન 1 સત્ય છે અને વિધાન 2 પણ સત્ય છે.

પરંતુ, વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ : (B)**

(227) **વિધાન 1 :** વક્ર $y = \frac{-x^2}{2} + x + 1$ એ $x = 1$ને પ્રત્યે સંમિત વક્ર છે.

વિધાન 2 : પરવલય તેની અક્ષ પ્રત્યે સંમિત વક્ર છે.

ઉકેલ : વક્ર $y = \frac{-x^2}{2} + x + 1$

$\therefore 2y = -x^2 + 2x + 2$

$\therefore x^2 - 2x - 2 = -2y$

$\therefore (x-1)^2 = -2\left(y - \frac{3}{2}\right)$

ઊગમબિંદુનું $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ આગળ સ્થાનાંતર કરતાં, $x' = x - 1$, $y' = y - \frac{3}{2}$

$\therefore$ વક્ર $x'^2 = -2y'$ થશે.

તેને $x'^2 = 4by'$ સાથે સરખાવતાં $4b = -2$. આથી, $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ વક્ર $x'^2 = -2y'$ની નાભિ Y-અક્ષ પર છે.

$\therefore$ આ પરવલય Y-અક્ષ પરત્વે સંમિત છે.

વળી, આ પરવલય $x' = 0$ પરત્વે સંમિત છે.

$\therefore$ $x - 1 = 0$. આથી, $x = 1$ તથા પરવલય તેની અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.

આમ વિધાન 1, 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 3ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ : (A)**

(228) **વિધાન 1 :** પરવલય $y^2 = 4ax$ની નાભિ S છે. P પરવલય પર છે. $\overline{SP}$ ને વ્યાસ લઈને દોરેલું વર્તુળ હંમેશા Y-અક્ષને સ્પર્શે છે.

વિધાન 2 : પરવલય $y^2 = 4ax$નો સ્પર્શક દોરેલ હોય, તો સ્પર્શકનો સ્પર્શબિંદુ અને નિયામિકા સાથેના છેદબિંદુને જોડતો રેખાખંડ નાભિ આગળ કાટખૂણો આંતરે છે.

ઉકેલ : ધારો કે પરવલય $y^2 = 4ax$ પરનું બિંદુ $P\left(at^2, 2at\right)$ છે તથા નાભિ $S(a, 0)$ છે. તેથી $\overline{SP}$ વ્યાસ હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ $(x - a)\left(x - at^2\right) + (y - 0)(y - 2at) = 0$

$\therefore$ $x^2 + y^2 - xat^2 - ax + a^2t^2 - 2aty = 0$

$\therefore$ $x^2 + y^2 - \left(1 + t^2\right)ax - 2aty + a^2t^2 = 0$ (1)

વર્તુળના Y-અક્ષ સાથેના છેદબિંદુ માટે $x = 0$ લેતાં,

$\therefore$ $y^2 - 2aty + a^2t^2 = 0$

$\therefore$ $(y - at)^2 = 0$. આથી, $y = at$

$\therefore$ વર્તુળ Y-અક્ષને માત્ર $(0, at)$માં છેદે છે, એટલે કે સ્પર્શે છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

હવે ધારો કે પરવલય $y^2 = 4ax$ પરનું બિંદુ $P\left(at^2, 2at\right)$ છે.

$\therefore$ $P\left(at^2, 2at\right)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ, $x - ty + at^2 = 0$ છે.

$\therefore$ સ્પર્શક $x - ty + at^2 = 0$ નિયામિકાને છેદે છે.

તેથી $x = -a$ લેતાં, $-a - ty + at^2 = 0$. આથી, $y = \frac{a\left(t^2 - 1\right)}{t}$

$\therefore$ નિયામિકા પરનું બિંદુ $Q = \left(-a, \frac{a\left(t^2-1\right)}{t}\right)$

અહીં $S(a, 0)$, $P\left(at^2, 2at\right)$, $Q\left(-a, \frac{a\left(t^2-1\right)}{t}\right)$

$\therefore$ $\overline{SP}$ નો ઢાળ $= \frac{2t}{t^2-1}$, $\overline{SQ}$ નો ઢાળ $= \frac{-\left(t^2-1\right)}{2t}$

$\therefore$ $\overline{SP} \perp \overline{SQ}$

$\therefore$ $m \angle PSQ = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ વિધાન 2 પણ સત્ય છે, પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ : (B)**

(229) **વિધાન 1** : પરવલય $y^2 = 16\sqrt{3}x$ અને ઉપવલય $2x^2 + y^2 = 4$ ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = 2x + 2\sqrt{3}$ છે.

વિધાન 2 : જો $y = mx + \frac{4\sqrt{3}}{m}$ $(m \neq 0)$ એ પરવલય $y^2 = 16\sqrt{3}x$ અને ઉપવલય $2x^2 + y^2 = 4$ ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ હોય, તો m સમીકરણ $m^4 + 2m^2 = 24$ નો ઉકેલ છે.

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 16\sqrt{3}x$ પરથી $a = 4\sqrt{3}$

$\therefore$ પરવલયના m ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y = mx + \frac{4\sqrt{3}}{m}$ છે.

ઉપવલય $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ પરથી $a^2 = 2$, $b^2 = 4$ ($a < b$ છે.)

$\therefore$ ઉપવલયના m ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સમીકરણ

$x = my \pm \sqrt{b^2m^2 + a^2}$ પરથી, $x = my \pm \sqrt{4m^2 + 2}$

$\therefore$ $y = \frac{x}{m_1} - \sqrt{4 + \frac{2}{m_1^2}}$

$\therefore$ $y = mx - \sqrt{4 + 2m^2}$ ($m = \frac{1}{m_1}$ લેતાં)

$\left(\frac{4\sqrt{3}}{m}\right)^2 = \left(-\sqrt{4 + 2m^2}\right)^2$

$\therefore$ $\frac{48}{m^2} = 4 + 2m^2$

$\therefore$ $m^4 + 2m^2 - 24 = 0$

$\therefore$ $\left(m^2 + 6\right)\left(m^2 - 4\right) = 0$

પરંતુ $m^2 = -6$. આથી $m^2 = 4$

$\therefore \quad (m^2+6)(m^2-4)=0$ શક્ય નથી. આથી $m=\pm 2$

$\therefore \quad y = mx + \frac{4\sqrt{3}}{m} = 2x + 2\sqrt{3}$

વિધાન 2 : જો $y = mx + \frac{4\sqrt{3}}{m}$ એ પરવલય $y^2 = 16\sqrt{3}x$ અને ઉપવલય $2x^2 + y^2 = 4$ નો સામાન્ય સ્પર્શક હોય, તો $m^4 + 2m^2 - 24 = 0$ નું સમાધાન થાય છે. **જવાબ : (A)**

જોડકાં જોડો પ્રકારના પ્રશ્નો

(230)

સ્તંભ 1	સ્તંભ 2
(1) પરવલય $y^2 = 16x$ પરના બિંદુ $(1, 4)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ	(A) $x - 2 = 0$
(2) પરવલય $x^2 - 4x - 3y + 10 = 0$ ના અક્ષનું સમીકરણ	(B) $x + y + 2 = 0$
(3) પરવલય $y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ ની નિયામિકાનું સમીકરણ	(C) $2x - y + 1 = 0$
(4) પરવલય $y^2 = 8x$ અને $x^2 = 8y$ ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ	(D) $4x + 5 = 0$

ઉકેલ : (1) $(1, 4)$ એ પરવલય $y^2 = 16x$ પરનું બિંદુ છે.

$\therefore$ બિંદુ $(1, 4)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $yy_1 = 2a(x + x_1)$

$\therefore \quad y(4) = 2(4)(x+1)$ $\qquad (a = 4, (x_1, y_1) = (1, 4))$

$\therefore \quad 2x - y + 1 = 0$ **જવાબ : (1 → C)**

(2) $x^2 - 4x - 3y + 10 = 0$ પરથી, $x^2 - 4x + 4 - 3y + 6 = 0$

$\therefore \quad (x-2)^2 = 3(y-2)$

$\therefore$ પરવલયના અક્ષનું સમીકરણ : $x - 2 = 0$ **જવાબ : (2 → A)**

(3) પરવલય $(y-3)^2 = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)$

ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર $\left(-\frac{1}{4}, 3\right)$ આગળ કરતાં, $\quad x' = x + \frac{1}{4}, \quad y' = y - 3$

$\therefore \quad y'^2 = 4x' \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$\therefore$ નિયામિકા $x' = -a$ એટલે કે $x' = -1$ આથી, $x + \frac{1}{4} = -1$

$\therefore \quad 4x + 5 = 0$ નિયામિકાનું સમીકરણ છે. **જવાબ : (3 → D)**

(4) પરવલય $y^2 = 8x$ પરથી $a = 2$

પરવલય $x^2 = 8y$ પરથી $b = 2$

બંને પરવલયોના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ

$2^{\frac{1}{3}}.x + 2^{\frac{1}{3}}.y + (4)^{\frac{2}{3}} = 0$

$\therefore\ x + y + 2 = 0$ **જવાબ : (4 $\rightarrow$ B)**

જવાબ : (1 $\rightarrow$ C, 2 $\rightarrow$ A, 3 $\rightarrow$ D, 4 $\rightarrow$ B)

(231)

સ્તંભ 1	સ્તંભ 2
(1) પરવલય $y^2 = 8x$ના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = x + 2$ છે. આ રેખા પરના કયા બિંદુ માટે પરવલયનો સ્પર્શક આપેલ સ્પર્શકને લંબ થાય ?	(A) $(-3, 0)$
(2) પરવલય $y^2 = 12x$ના નાભિલંબના અંત્યબિંદુ આગળના સ્પર્શકોના છેદબિંદુના યામ શું થાય ?	(B) $(-1, 3)$
(3) પરવલય $y^2 - 2x - 6y + 7 = 0$નું શિરોબિંદુ શું થાય ?	(C) $(5, 6)$
(4) રેખા $2x - 3y + 8 = 0$ એ પરવલય $y^2 = 8x$ને P અને Qમાં છેદે, તો $\overline{PQ}$નું મધ્યબિંદુ શું થાય ?	(D) $(-2, 0)$

ઉકેલ : (1) ધારો કે માંગેલ બિંદુ P છે તથા અહીં $a = 2$ છે. પરવલયના બિંદુ P પાસે બે સ્પર્શકો પરસ્પર લંબ હોય, તો Pના બિંદુગણનું સમીકરણ પરવલયની નિયામિકા હોય.

$\therefore$ બિંદુ P પરવલયની નિયામિકા $x = -2$ પર હોય.

$\therefore$ Pના યામ $(-2, 0)$ **જવાબ : (1 $\rightarrow$ D)**

(2) પરવલય $y^2 = 12x$ પરથી $a = 3$

$\therefore$ નાભિલંબના અંત્યબિંદુ $L(a, 2a) = (3, 6)$ અને $L'(a, -2a) = (3, -6)$ મળે.

$$2y\frac{dy}{dx} = 12$$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{12}{2y} = 1$ (L માટે)

$(3, 6)$ બિંદુ તથા $m = 1$ માટે સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - 6) = 1(x - 3)$ $x - y + 3 = 0$ એટલે કે સ્પર્શકોના સમીકરણ અનુક્રમે $x - y + 3 = 0$ અને $x + y + 3 = 0$

આથી $t_1 = 1,\ t_2 = -1$

$\therefore$ બંને સ્પર્શકોના છેદબિંદુના યામ $= (-3, 0)$ ($(at_1t_2, a(t_1 + t_2))$ સૂત્ર મુજબ)

જવાબ : (2 $\rightarrow$ A)

(3) પરવલય $y^2 - 2x - 6y + 7 = 0$ પરથી, $y^2 - 6y + 9 = 2(x + 1)$

$\therefore\ (y - 3)^2 = 2(x + 1)$

ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર $(-1, 3)$ આગળ લેતાં, $x' = x + 1$, $y' = y - 3$

$\therefore\ y'^2 = 2x'$ નું શિરોબિંદુ $(x', y') = (0, 0)$ થાય.

∴ મૂળ પદ્ધતિમાં શિરોબિંદુ $x = x' + h = 0 - 1 = -1,\ y = y' + k = 3$

∴ માંગેલ શિરોબિંદુ $(-1, 3)$ **જવાબ : (3 → B)**

(4) અહીં $2x - 3y + 8 = 0$ પરથી, $y = \frac{2x+8}{3}$

હવે રેખા, પરવલયને છેદે છે.

∴ $\left(\frac{2x+8}{3}\right)^2 = 8x$

∴ $4x^2 + 32x + 64 = 72x$

∴ $4x^2 - 40x + 64 = 0$

∴ $x^2 - 10x + 16 = 0$

∴ $(x-8)(x-2) = 0$. આથી, $x = 8,\ x = 2$

હવે, $x = 8$ તો $y = \frac{2x+8}{3} = \frac{16+8}{3} = 8.$ $x = 2$ તો $y = \frac{2x+8}{3} = \frac{4+8}{3} = 4$

∴ છેદબિંદુના યામ $= (8, 8)$ અને $(2, 4)$ છે.

∴ મધ્યબિંદુના યામ $= (5, 6)$ થાય. **જવાબ : (4 → C)**

જવાબ : (1 → D, 2 → A, 3 → B, 4 → C)

(232)

સ્તંભ 1	**સ્તંભ 2**
(1) $2x^2 + 3y^2 + 4x + 12y + 8 = 0$ની ઉત્કેન્દ્રતા	(A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
(2) $9x^2 + 4y^2 - 24y = 0$ ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા	(B) $\sqrt{\frac{2}{3}}$
(3) ઉપવલયના નાભિલંબની લંબાઈ એ મુખ્ય અક્ષની લંબાઈના ત્રીજા ભાગ જેટલી હોય તો ઉત્કેન્દ્રતા ?	(C) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$
(4) ઉપવલયના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ એ ગૌણ અક્ષની લંબાઈ કરતા $\frac{7}{2}$ ગણી હોય, તો તેની ઉત્કેન્દ્રતા	(D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ઉકેલ : (1) અહીં ઉપવલય $2x^2 + 3y^2 + 4x + 12y + 8 = 0$ પરથી,

$2x^2 + 4x + 2 + 3y^2 + 12y + 12 = 6$

∴ $2(x^2 + 2x + 1) + 3(y^2 + 4y + 4) = 6$

∴ $\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{2} = 1$. આથી, $a^2 = 3,\ b^2 = 2$ તથા $a > b$

∴ $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **જવાબ :** (4 → D)

(2) અહીં ઉપવલય $9x^2+4y^2-24y=0$ પરથી,

$$9(x-0)^2+4\left(y^2-6y+9\right)=36$$

$\therefore \quad \frac{(x-0)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$. આથી, $a^2=4, b^2=9$ તેથી $a<b$

$\therefore \quad e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{9-4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ **જવાબ :** $(2 \rightarrow A)$

(3) આપેલ શરત મુજબ $\frac{2b^2}{a}=\frac{1}{3}(2a)$. આથી, $a^2=3b^2$

પરંતુ $b^2=a^2\left(1-e^2\right)$. આથી, $b^2=3b^2\left(1-e^2\right)$

$\therefore \quad e^2=\frac{2}{3}$. આથી, $e=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

જો $a<b$ હોય, તો $\frac{2a^2}{b}=\frac{1}{3}(2b)$ આથી, $b^2=3a^2$

$\therefore e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ **જવાબ :** $(3 \rightarrow B)$

(4) અહીં $2a=\frac{7}{2}(2b)$ આથી $a=\frac{7b}{2}$

$\therefore \quad e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{45}{49}$ આથી $e=\frac{3\sqrt{5}}{7}$ **જવાબ :** $(4 \rightarrow C)$

જવાબ : $1 \rightarrow (D), 2 \rightarrow (A), 3 \rightarrow (B), 4 \rightarrow (C)$

(233)

સ્તંભ 1	સ્તંભ 2
(1) $AS \cdot A'S=36, e=\frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ	(A) $\frac{2x^2}{147}+\frac{y^2}{49}=1$
(2) બે નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર $7\sqrt{2}$ તથા ગૌણ અક્ષની લંબાઈ 14 હોય, તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ. $a>b$	(B) $\frac{16x^2}{325}+\frac{4y^2}{65}=1$
(3) જેની નાભિઓ $\left(\pm\sqrt{5}, 0\right)$ અને શિરોબિંદુ $(\pm 5, 0)$ હોય, તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ	(C) $\frac{x^2}{54}+\frac{y^2}{36}=1$
(4) નાભિલંબની લંબાઈ $2\sqrt{13}$ તથા ઉત્કેન્દ્રતા $e=\frac{1}{\sqrt{5}}$ તો ઉપવલયનું સમીકરણ. $a>b$	(D) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{20}=1$

ઉકેલ : (1) અહીં, $AS \cdot A'S=b^2$. તેથી $b^2=36$ તથા $e=\frac{1}{\sqrt{3}}$

હવે, $b^2=a^2\left(1-e^2\right)$ પરથી, $36=a^2\left(1-\frac{1}{3}\right)$

આથી $a^2=54$

$\therefore$ માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{54}+\frac{y^2}{36}=1$ **જવાબ :** $(1 \rightarrow C)$

(2) અહીં, બે નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર = $7\sqrt{2}$, ગૌણ અક્ષની લંબાઈ = 14

$\therefore$ $2ae = 7\sqrt{2}$ તથા $2b = 14$. આથી, $b = 7$

હવે, $b^2 = a^2 - a^2e^2$

આથી, $a^2 = b^2 + a^2e^2 = 49 + \frac{49}{2} = \frac{147}{2}$

$\therefore$ માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{2x^2}{147} + \frac{y^2}{49} = 1$ **જવાબ :** $(2 \to A)$

(3) અહીં, ઉપવલયની નાભિઓ = $\left(\pm\sqrt{5}, 0\right)$, શિરોબિંદુઓ = $(\pm 5, 0)$

$\therefore$ $ae = \sqrt{5}$, $a = 5$. તેથી $e = \frac{1}{\sqrt{5}}$

પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ છે. તેથી $b^2 = a^2\left(1 - e^2\right)$

$\therefore$ $b^2 = 25\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20$

$\therefore$ માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1$ **જવાબ :** $(3 \to D)$

(4) અહીં, $\frac{2b^2}{a} = 2\sqrt{13}$. આથી $b^2 = \sqrt{13}a$ તથા $e = \frac{1}{\sqrt{5}}$

હવે, $b^2 = a^2\left(1 - e^2\right)$

$\sqrt{13}\,a = a^2\left(1 - \frac{1}{5}\right)$. આથી $a = \frac{5\sqrt{13}}{4}$. તેથી $b^2 = \frac{65}{4}$. આમ, $\frac{16x^2}{325} + \frac{4y^2}{65} = 1$ **જવાબ :** $(4 \to B)$

જવાબ : $1 \to (C), 2 \to (A), 3 \to (D), 4 \to (B)$

(234)

સ્તંભ 1	સ્તંભ 2
(1) ઉપવલય $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ના નિયામિકા વૃત્તનું સમીકરણ	(A) $x^2 + y^2 = 4$
(2) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{12} = 1$ના સહાયકવૃત્તનું સમીકરણ	(B) $x^2 + y^2 = 28$
(3) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ના સહાયકવૃત્તનું સમીકરણ	(C) $x^2 + y^2 = 12$
(4) પરવલય $y^2 = 12x$ નું શીર્ષ જેનું કેન્દ્ર હોય તથા ઉપવલય $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{10} = 1$ ના અર્ધ ગૌણ અક્ષની લંબાઈ જેની ત્રિજ્યા હોય, તેવા વર્તુળનું સમીકરણ	(D) $x^2 + y^2 = 16$

ઉકેલ : (1) ઉપવલય $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ માં $a^2 = 16, b^2 = 12, a > b$

$\therefore$ નિયામિકાવૃત્તનું સમીકરણ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ પરથી,

$x^2 + y^2 = 28$ **જવાબ :** $(1 \to B)$

(2) ઉપવલય $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{12} = 1$ માં $a^2 = 10, b^2 = 12, a < b$

$\therefore$ સહાયકવૃત્તનું સમીકરણ $x^2 + y^2 = b^2$ પરથી,

$x^2 + y^2 = 12$ **જવાબ :** $(2 \to C)$

(3) ઉપવલય $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ માં $a^2=16, b^2=8, a>b$

$\therefore$ સહાયકવૃત્તનું સમીકરણ $x^2+y^2=a^2$ પરથી,

$x^2+y^2=16$ **જવાબ** : $(3 \to D)$

(4) પરવલયનું શીર્ષ = $(0, 0)$, ઉપવલયના ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $2a=4$

$\therefore$ અર્ધ ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $a=2$

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $x^2+y^2=4$ **જવાબ** : $(4 \to A)$

જવાબ : $(1) \to (B),\ (2) \to (C),\ (3) \to (D),\ (4) \to (A)$

(235)

સ્તંભ 1	સ્તંભ 2
(1) અતિવલય $y^2-49x^2=49$ ના નાભિલંબની લંબાઈ	(A) $\frac{32}{3}$
(2) $3y^2-4x^2=12$ અતિવલયના મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ	(B) $2\sqrt{2}$
(3) $16x^2-9y^2=144$ ના નાભિલંબની લંબાઈ	(C) $\frac{2}{7}$
(4) અતિવલય $2x^2-y^2=4$ ના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ	(D) 4

ઉકેલ :

(1) અતિવલય $7y^2-49x^2=49$ પરથી $\frac{y^2}{7}-\frac{x^2}{1}=1$

$\therefore\ b^2=7,\ a^2=1$

$\therefore$ અતિવલયના નાભિલંબની લંબાઈ $=\frac{2a^2}{b}=\frac{2(1)}{7}=\frac{2}{7}$ **જવાબ** : $(1) \to C$

(2) અતિવલય $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$ પરથી $b^2=4,\ a^2=3$

$\therefore$ મુખ્ય અક્ષ Y-અક્ષ થશે.

$\therefore$ મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $=2(b)=2(2)=4$ **જવાબ** : $(2) \to D$

(3) અતિવલય $16x^2-9y^2=144$ પરથી $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

$\therefore\ a^2=9,\ b^2=16$. મુખ્ય અક્ષ X-અક્ષ છે.

$\therefore$ નાભિલંબની લંબાઈ $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(16)}{3}=\frac{32}{3}$ **જવાબ** : $(3) \to A$

(4) અતિવલય $2x^2-y^2=4$ પરથી,

$\therefore\ \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$. આથી મુખ્ય અક્ષ X-અક્ષ છે.

$\therefore$ મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $=2(a)=2\sqrt{2}$ **જવાબ** : $(4) \to B$

જવાબ : $(1) \to (C),\ (2) \to (D),\ (3) \to (A),\ (4) \to (B)$

●