क्रियाकलाप 11

उद्देश्य

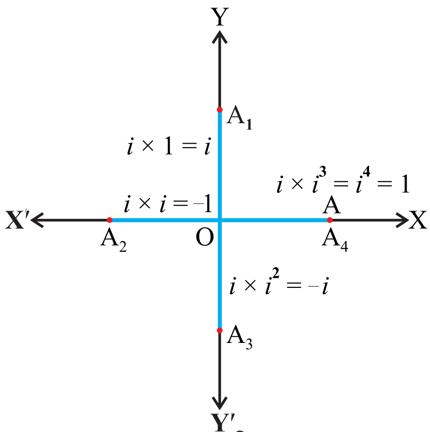
$i=\sqrt{-1}$ और इसके पूर्णांकीय घातों की ज्यामितीय रूप में विवेचना करना।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, चार्ट पेपर, स्केच पेन, रूलर, परकार, गोंद, कीलें, डोरा, इत्यादि।

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार के कार्डबोर्ड पर चार्ट पेपर चिपकाइए।
2. बिंदु O पर काटती हुई दो लंबवत् रेखाएँ खींचिए। (देखिए आकृति 11)
3. एकक लंबाई (मान लीजिए 10 cm) का एक डोरा लीजिए जो OX के अनुदिश संख्या 1 को निरूपित करता है। डोरे के एक सिरे को O पर तथा दूसरे सिरे को A पर स्थिर कीजिए जैसा आकृति 11 में दिखाया गया है।
4. डोरे के दूसरे सिरे जो A पर है, को मुक्त कीजिए और डोरे को 90º, 180º, 270º और 360º पर घुमाइए और मुक्त सिरे की विभिन्न स्थितियों को क्रमशः A_1, A_2, A_3 ओर A_4 से अंकित कीजिए जैसा कि आकृति में दिखाया गया है।



आकृति 11

प्रदर्शन

1. आरगैंड़ तल में OA, OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, क्रमशः 1, i,-1,-i, 1 को निरूपित करते हैं।
2. $OA_1 = i = 1 \times i$, $OA_2 = -1 = i \times i = i^2$, $OA_3 = -i = i \times i \times i = i^3$ और आगे भी इसी प्रकार। प्रत्येक बार, OA का 90° से घूर्णन i से गुणन के तुल्य है। इसलिए i को 90° के घूर्णन का गुणात्मक घटक कहते हैं।

प्रेक्षण

1. OA का 90º करने पर $OA_1 = 1 \times i =$ __________
2. OA का 180° घूर्णन न करने पर $OA_2 = 1 \times$ __ $\times$ __ $=$ _______
3. OA का 270º (3 समकोण) घूर्णन करने पर

   $OA_3 = 1 \times$ ________ $\times$ _______ $\times$ _______ $=$ _______
4. OA का 360º (4 समकोण) घूर्णन करने पर

   $OA_4 = 1 \times$ ________ $\times$ _______ $\times$ _______ $\times$ _______ $=$ ___________
5. OA का n-समकोण घूर्णन करने पर

   $OA_n = 1 \times$ ________ $\times$ _______ $\times$ _______ $\times$ _______ $\times \ldots n$ बार = ___________

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप के उपयोग से i की किसी भी पूर्णांक घात का मान ज्ञात किया जा सकता है।

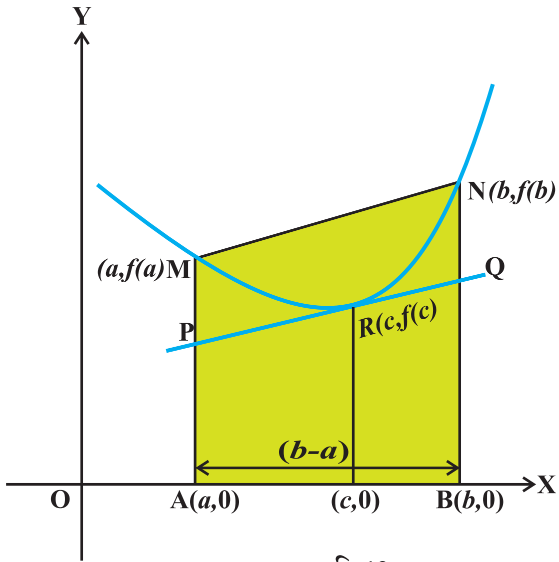
क्रियाकलाप 12

उद्देश्य
रैखिक फलनों की सहायता से आरेख विधि द्वारा एक द्विघातीय फलन को प्राप्त करना।

आवश्यक सामग्री
प्लाईवुड शीट, तारों के टुकड़े

रचना की विधि

1. समान लंबाई के दो तार लीजिए।
2. इनको तल के बिंदु 'O' (प्लाईवुड शीट) पर परस्पर लंबवत् स्थिर कीजिए ताकि वे x-अक्ष और y-अक्ष को निरूपित करें। (देखिए आकृति 12)
3. एक तार का टुकड़ा लीजिए और उसे इस प्रकार स्थिर कीजिए कि वह x-अक्ष की धनात्मक दिशा में O से a इकाई की दूरी तथा y-अक्ष को O से नीचे की ओर a इकाई की दूरी पर मिले जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। इन बिंदुओं को क्रमशः B और A से अंकित कीजिए।



आकृति 12

4. इसी प्रकार दूसरा तार लेकर उसे इस प्रकार स्थिर कीजिए कि वह x-अक्ष की धनात्मक दिशा में 0 से b इकाई की दूरी तथा y-अक्ष को O से नीचे की ओर b इकाई की दूरी पर मिले जैसा कि आकृति 12 में दिखाया गया है। इन बिंदुओं को क्रमशः D और C से अंकित कीजिए।

5. एक अन्य तार लीजिए और इसको इस प्रकार स्थिर कीजिए कि यह उन बिंदुओं से होकर जाए जहाँ सीधे तार x-अक्ष पर मिलते हैं। यह तार एक वक्र (परवलय) के आकार का है जैसा कि आकृति 12 में दिखाया गया है।

प्रदर्शन

1. बिंदुओं A और B से जाने वाला तार एक सरल रेखा को निरूपित करता है जिसे $y = x - a$ द्वारा दिया जाता है। यह x-अक्ष और y-अक्ष का क्रमशः $(a, 0)$ और $(0, - a)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

2. बिंदुओ C और D से जाने वाला तार एक सरल रेखा को निरूपित करता है जिसे $y = x- b$ द्वारा दिया जाता है। यह x अक्ष और y अक्ष का क्रमशः $(b, 0)$ और $(0, - b)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

3. बिंदुओं B और D से जाने वाला तार एक वक्र को निरूपित करता है जिसे फलन $y = k\ (x–a)\ (x–b) = k\ [x^2 – (a+b)\ x + ab]$, जहाँ k एक स्वेच्छ अचर है, द्वारा दिया जाता है।

प्रेक्षण

1. रैखिक फलन $y = x - a$ द्वारा दी गई रेखा x-अक्ष को बिंदु _______ पर प्रतिच्छेद करती है जिसके निर्देशांक ___________ हैं।

2. रैखिक फलन $y = x - b$ द्वारा दी गई रेखा x-अक्ष को बिंदु _______ पर प्रतिच्छेद करती है जिसके निर्देशांक _______ हैं।

3. बिंदुओं C और D से जाने वाला वक्र, फलन $y =$ _______ द्वारा दिया जाता है जो एक _______ फलन है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप द्विघातीय फलनों के शून्यों तथा उनके ग्राफ़ के आकार को समझने में सहायक है।

क्रियाकलाप 13

उद्देश्य

यह सत्यापित करना कि एक दी गई असमिका मान लीजिए $5x + 4y - 40 < 0$, जो $ax + by + c < 0,\ a, b > 0, c < 0$

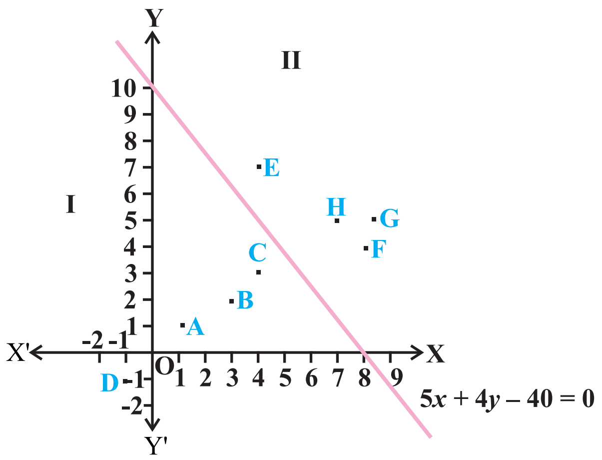
प्रकार की है, दो अर्ध समतलों में से केवल एक को निरूपित करता है।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, सफ़ेद मोटा कागज़, स्केच पेन, रूलर, गोंद

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. x-अक्ष और y-अक्ष को निरूपित करने वाली दो परस्पर लंब रेखाएँ $X'OX$ और $Y'OY$ खींचिए।
3. दी गई रैखिक असमिका के संगत रैखिक समीकरण का आलेख खीचिए।
4. दोनों अर्ध समतलों को I और II से अंकित कीजिए जैसा आकृति 13 में दिखाया गया है।



आकृति 13

प्रदर्शन

1. अर्ध समतल I में कुछ बिंदु O (0, 0), A (1, 1), B (3, 2), C (4, 3), D (–1, –1) तथा अर्ध समतल II में कुछ बिंदु E (4, 7), F (8, 4), G (9, 5), H (7, 5) अंकित कीजिए।

2. (i) बिंदु O (0,0) के निर्देशांकों को असमिका के वाम पक्ष में रखिए।

   वाम पक्ष का मान $= 5(0) + 4(0) - 40 = -40 < 0$

   इस प्रकार O के निर्देशांक जो अर्ध समतल I में स्थित हैं असमिका को संतुष्ट करते हैं।

   (ii) बिंदु E (4, 7) के निर्देशांकों को असमिका के वाम पक्ष में रखिए।

   वाम पक्ष का मान $= 5(4) + 4(7) - 40 = 8 \not< 0$ और इस प्रकार बिंदु E के निर्देशांक जो अर्ध समतल II में स्थित हैं, दी गई असमिका को संतुष्ट नहीं करते हैं।

   (iii)बिंदु F (8, 4) के निर्देशांकों को असमिका के वाम पक्ष में रखिए।

   वाम पक्ष का मान $= 5(8) + 4(4) - 40 = 16 \not< 0$

   इस प्रकार बिंदु F के निर्देशांक जो अर्ध समतल II में स्थित हैं असमिका को संतुष्ट नहीं करते हैं।

   (iv) बिंदु C (4, 3) के निर्देशांकों को असमिका के वाम पक्ष में रखिए।

   वाम पक्ष का मान $= 5(4) + 4(3) - 40 = -8 < 0$

   अतः बिंदु C के निर्देशांक जो अर्ध समतल I में स्थित है, असमिका को संतुष्ट करते हैं।

   (v) बिंदु D (–1, –1) के निर्देशांकों को असमिका के वाम पक्ष में रखिए।

   वाम पक्ष का मान $= 5(-1) + 4(-) - 40 = -49 < 0$

   अतः बिंदु D के निर्देशांक जो अर्ध समतल I में स्थित है, असमिका को संतुष्ट करते हैं।

   (vi) इसी प्रकार बिंदु A (1, 1), जो अर्ध समतल I में स्थित हैं, असमिका को संतुष्ट करते हैं। बिंदु G (9, 5), H (7, 5) जो अर्ध समतल II में स्थित है, असमिका को संतुष्ट नहीं करते हैं।

इस प्रकार, सभी बिंदु O, A, B, C, जो रैखिक असमिका को $5x + 4y - 40 < 0$ संतुष्ट करते हैं, केवल अर्ध समतल I में स्थित हैं तथा सभी बिंदु E, F, G, H जो रैखिक असमिका को संतुष्ट नहीं करते हैं, वे अर्ध समतल II में स्थित हैं। इस प्रकार, दी गई असमिका का आरेख दो में से केवल एक संगत अर्ध समतल को निरूपित करता है।

प्रेक्षण

1. बिंदु A के निर्देशांक दी गई असमिका को ____________ करते हैं। (संतुष्ट/ संतुष्ट नहीं)
2. बिंदु G के निर्देशांक दी गई असमिका को ____________ करते हैं। (संतुष्ट/ संतुष्ट नहीं)
3. बिंदु H के निर्देशांक दी गई असमिका को ____________ करते हैं। (संतुष्ट/ संतुष्ट नहीं)
4. बिंदु E के निर्देशांक दी गई असमिका को ____________ करते हैं। (संतुष्ट/ संतुष्ट नहीं)
5. बिंदु F के निर्देशांक दी गई असमिका को ____________ करते हैं। (संतुष्ट/ संतुष्ट नहीं)
6. दी गई असमिका का आलेख केवल अर्ध समतल ____________ है।

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग उस अर्ध समतल को निर्धारित करने में किया जा सकता है जो दी गई असमिका का हल होता है।

टिप्पणी

इस क्रियाकलाप का $ax + by + c > 0$ के प्रकार की असमिकाओं के लिए भी निष्पादन किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 14

उद्देश्य

यह ज्ञात करना कि दिए गए पाँच कार्डों में से तीन कार्डों का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़ की शीट, स्केच पेन, कटर

रचना की विधि

1. एक गत्ते की शीट लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. कार्डबोर्ड से उपयुक्त साइज़ के 5 एक जैसे कार्ड काटिए।
3. इन कार्डों पर C_1, C_2, C_3, C_4 और C_5 अंकित कीजिए।

प्रदर्शन

1. दिए गए पाँच कार्ड में से एक कार्ड का चयन कीजिए।
2. मान लीजिए कि पहला चयनित कार्ड C_1 है। तब शेष चार कार्डों में से अन्य दो कार्ड C_2C_3, C_2C_4, C_2C_5, C_3C_4, C_3C_5 और C_4C_5 हो सकते है। इस प्रकार, संभव चयन $C_1C_2C_3$, $C_1C_2C_4$, $C_1C_2C_5$, $C_1C_3C_4$, $C_1C_3C_5$, $C_1C_4C_5$ हैं। इनको एक कागज़ पर अंकित कीजिए।
3. मान लीजिए कि पहला चयनित कार्ड C_2 है। तब शेष चार कार्डों में से अन्य दो कार्ड C_1C_3, C_1C_4, C_1C_5, C_3C_4, C_3C_5, C_4C_5 हो सकते हैं। इस प्रकार संभव चयन $C_2C_1C_3$, $C_2C_1C_4$, $C_2C_1C_5$, $C_2C_3C_4$, $C_2C_3C_5$, $C_2C_4C_5$ हैं। इनको उसी कागज़ पर अंकित कीजिए।
4. मान लीजिए कि पहला चयनित कार्ड C_3 है। तब शेष चार कार्डों में से अन्य दो कार्ड C_1C_2, C_1C_4, C_1C_5, C_2C_4, C_2C_5, C_4C_5 हो सकते है। इस प्रकार संभव चयन $C_3C_1C_2$, $C_3C_1C_4$, $C_3C_1C_5$, $C_3C_2C_4$, $C_3C_2C_5$, $C_3C_4C_5$ हैं। इनको उसी कागज़ पर अंकित कीजिए।
5. मान लीजिए कि पहला चयनित कार्ड C_4 है। तब शेष चार कार्डों मे से अन्य दो कार्ड C_1C_2, C_1C_3, C_2C_3, C_1C_5, C_2C_5, C_3C_5 हो सकते हैं। इस प्रकार, संभव चयन $C_4C_1C_2$, $C_4C_1C_3$, $C_4C_2C_3$, $C_4C_1C_5$, $C_4C_2C_5$, $C_4C_3C_5$ हैं। इनको उसी कागज़ पर अंकित कीजिए।

6. मान लीजिए कि पहला C_5 हैं। तब शेष चार कार्डों में से अन्य दो कार्ड C_1C_2, C_1C_3, C_1C_4, C_2C_3, C_2C_4, C_3C_4 हो सकते है। इस प्रकार संभव चयन $C_5C_1C_2$, $C_5C_1C_3$, $C_5C_1C_4$, $C_5C_2C_3$, $C_5C_2C_4$, $C_5C_3C_4$ हैं। इनको उसी कागज़ पर अंकित कीजिए।
7. अब उस कागज़ पर ध्यान दीजिए जिसपर संभावित चयनों को सूचीबद्ध किया था। यहाँ कुल 30 संभावित चयन हैं और प्रत्येक चयन की तीन बार पुनरावृत्ति हुई है। इसलिए भिन्न चयनों की संख्या $= 30 \div 3 = 10$ है जो कि $5C_3$ के बराबर है।

प्रेक्षण

1. $C_1C_2C_3$, $C_2C_1C_3$ और $C_3C_1C_2$ ________ चयन को निरुपित करते हैं।
2. $C_1C_2C_4$, ________________, ________________ एक ही चयन को निरूपित करते है।
3. $C_2C_1C_5$, $C_1C_2C_5$, $C_1C_2C_3$ में से __________ और __________ एक ही चयन को निरूपित करते हैं।
4. $C_2C_1C_5$, $C_1C_2C_3$ ________ चयनों को निरूपित करते हैं।
5. $C_3C_1C_5$, $C_1C_4C_3$, $C_5C_3C_4$, $C_4C_2C_5$, $C_2C_4C_3$, $C_1C_3C_5$ में से

   $C_3C_1C_5$, __________ एक ही चयन को निरूपित करते हैं।

   $C_3C_1C_5$, $C_1C_4C_3$, ________, ______, अलग-अलग चयनों को निरूपित करते हैं।

अनुप्रयोग

इस प्रकार के क्रियाकलाप का उपयोग दी गई n वस्तुओं में से r वस्तुओं को चुनने की सम्भावित संख्या के व्यापक सूत्र अर्थात, $^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ को समझने में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 15

उद्देश्य

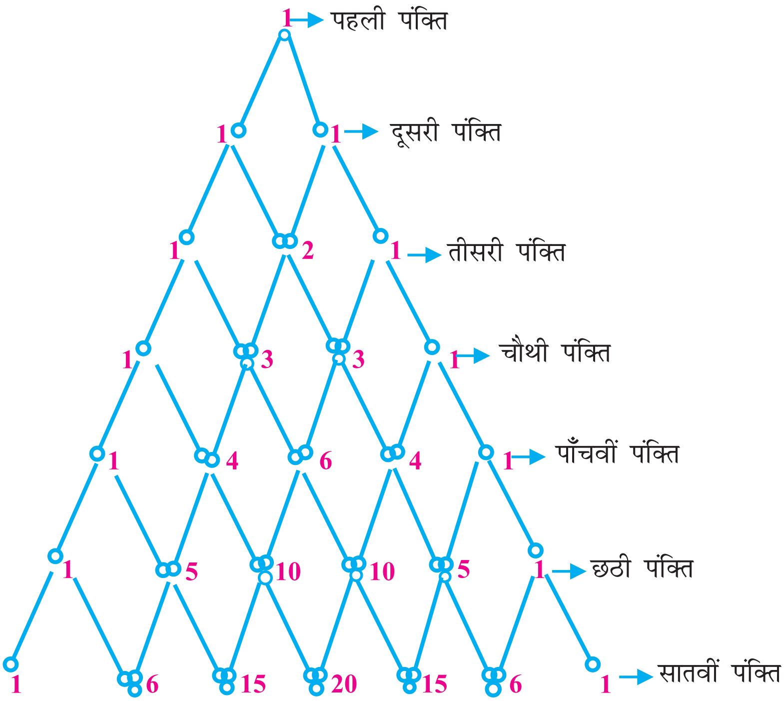
पॉस्कल त्रिभुज की रचना करना और एक द्विपद की दी गई धनात्मक पूर्णांक घात के लिए द्विपद प्रसार लिखना।

आवश्यक सामग्री

ड्राइंग बोर्ड, सफ़ेद कागज़, माचिस की तीलियाँ, गोंद

रचना की विधि

1. एक ड्राइंग बोर्ड लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. कुछ माचिस की तीलियाँ लीजिए और उन्हें ऐसे व्यवस्थित कीजिए। जैसा कि आकृति 15 में दिखाया गया है।



आकृति 15

3. संख्याओं को निम्न प्रकार लिखिए–

1 (पहली पंक्ति)

1 1 (दूसरी पंक्ति)

1 2 1 (तीसरी पंक्ति)

1 3 3 1 (चौथी पंक्ति), 1 4 6 4 1 (पाँचवीं पंक्ति) और इसी प्रकार आगे भी (देखिए आकृति 15)

4. $(a+b)^n$ का द्विपद प्रसार लिखने के लिए, $(n+1)^{th}$ वीं पंक्ति में दी गई संख्याओं का प्रयोग करें।

प्रदर्शन

1. उपर्युक्त आकृति एक त्रिभुज जैसी दिखती है और इसे पास्कल त्रिभुज के वर्ग में रखा जाता है।
2. दूसरी पंक्ति की संख्याएँ $(a+b)^1$ के द्विपद प्रसार के पदों के गुणांक है। तीसरी पंक्ति की संख्याएँ $(a+b)^2$ के द्विपद प्रसार के पदों के गुणांक हैं, चौथी पंक्ति की संख्याएँ $(a+b)^3$ के द्विपद प्रसार के पदों के गुणांक हैं। पाँचवीं पंक्ति की संख्याएँ $(a+b)^4$ के द्विपद प्रसार के पदों के गुणांक हैं और इसी प्रकार आगे भी।

प्रेक्षण

1. पाँचवीं पंक्ति की संख्याएँ __________ हैं जो ________के द्विपद प्रसार के गुणांक हैं।
2. सातवीं पंक्ति की संख्याएँ __________ हैं जो ________के द्विपद प्रसार के पदों के गुणांक हैं।
3. $(a + b)^3$ = ___ a^3 + ___a^2b + ___ab^2 + ___b^3
4. $(a + b)^6$ =___a^6 +___a^5b + ___a^4b^2 + ___a^3b^3 + ___a^2b^4 + ___ab^5 + ___b^6
5. $(a + b)^5$ = ___ +___+ ___+ ___ + ___+ ___.
6. $(a + b)^8$ = ___ +___ +___+ ___ + ___+ ___ + ___ + ___+ ___
7. $(a + b)^{10}$ =___ + ___ + ___+ ___ + ___+ ___ + ___+___+ ___+ ___+ __

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग $(a+b)^n$ के द्विपद प्रसार के लिए किया जा सकता है जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

क्रियाकलाप 16

उद्देश्य

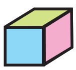
प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योग का सूत्र ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

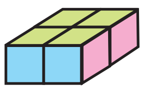
लकड़ी या प्लास्टिक के एकक घन, रंगीन कागज़, गोंद और कीलें।

रचना की विधि

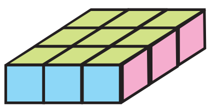
1. लकड़ी या प्लास्टिक का 1 $(= 1^2)$ एकक घन लीजिए जैसा कि आकृति 16.1 में दिखाया गया है।
2. लकड़ी या प्लास्टिक के 4 $(= 2^2)$ एकक घन लीजिए और एक घनाभ बनाइए जैसा कि आकृति 16.2 में दिखाया गया है।
3. लकड़ी या प्लास्टिक के 9 $(= 3^2)$ एकक घन लीजिए और एक घनाभ बनाइए जैसा कि आकृति 16.3 में दिखाया गया है।
4. लकड़ी या प्लास्टिक के 16 $(= 4^2)$ एकक घन लीजिए और एक घनाभ बनाइए जैसा कि आकृति 16.4 में दिखाया गया है।
5. आकृति 16.1 से 16.4 तक के सभी घन एवं घनाभों को इस प्रकार व्यवस्थित कीजिए कि वे एक ऐशेलान (echelon) प्रकार की संरचना करें जैसा कि आकृति 16.5 में दिखाया गया है।



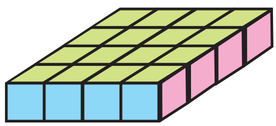
आकृति 16.1



आकृति 16.2



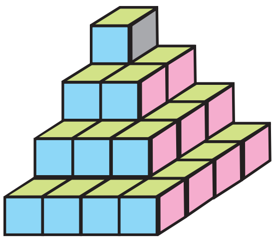
आकृति 16.3



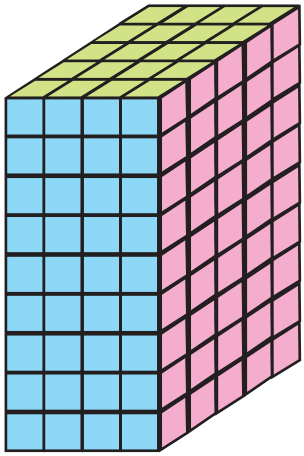
आकृति 16.4

6. इस प्रकार के छः ऐशेलान प्रकार की संरचना कीजिए। इनमें से एक को आकृति 16.5 में दिखाया गया है।

7. इन छः संरचनाओं को एक विस्तृत घनाभ (cuboidal block) बनाने के लिए व्यवस्थित कीजिए जैसा कि आकृति 16.6 में दिखाया गया है।



आकृति 16.5



आकृति 16.6

प्रदर्शन

1. आकृति 16.5 में दी गई संरचना का आयतन $= (1 + 4 + 9 + 16)$ घन इकाई

   $= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$ घन इकाई है।

2. इस प्रकार की 6 संरचनाओं का आयतन $= 6\ (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$ घन इकाई है।

3. आकृति 16.6 में बने घनाभ ब्लाक का आयतन (जो एक एक ऐसा घनाभ है जिसकी विभाएँ $= 4 \times 5 \times 9$) $= 4\ (4 + 1)\ (2 \times 4 + 1)$ है।

4. इस प्रकार, $6\ (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 4 \times (4 + 1) \times (2 \times 4 + 1)$

   अर्थात् $$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{1}{6}\ [4 \times (4 + 1) \times (2 \times 4 + 1)]$$

प्रेक्षण

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{1}{6}$ (_____) × (_____) × (_____).

2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6}$ (______) × (______) × (______).

3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 10^2 = \frac{1}{6}$ (______) × (______) × (______).

4. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 ... + 25^2 = \frac{1}{6}$ (______) × (______) × (______).

5. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 ... + 100^2 = \frac{1}{6}$ (______) × (______) × (______).

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का प्रयोग प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग प्राप्त करने के लिए किया जा सकता है जो इस प्रकार है

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1)$$

क्रियाकलाप 17

उद्देश्य

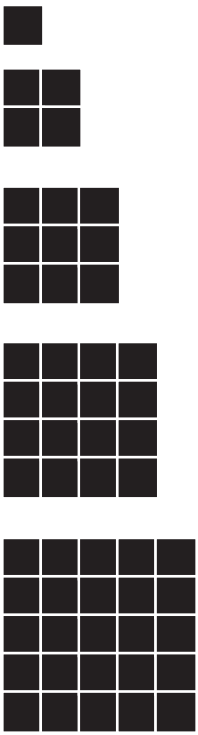
प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योग का सूत्र प्राप्त करने की वैकल्पिक विधि।

आवश्यक सामग्री

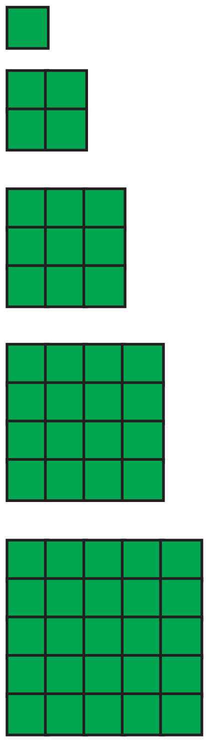
लकड़ी या प्लास्टिक के एकक वर्ग, रंगीन पेंसिलें या स्केच पेन, रूलर

रचना की विधि

1. आकृति 17.1 में दिखाए गए अनुसार 1, 4, 9, 16, 25 ... एकक वर्ग लीजिए और सभी को एक रंग जैसे काले रंग से भरिए।



आकृति 17.1

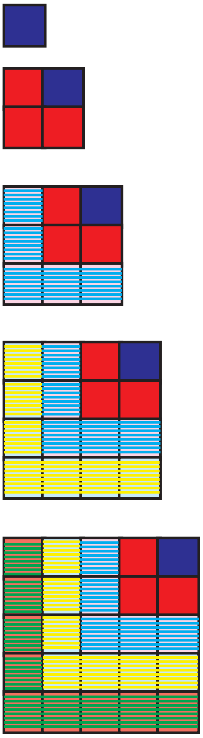


आकृति 17.2

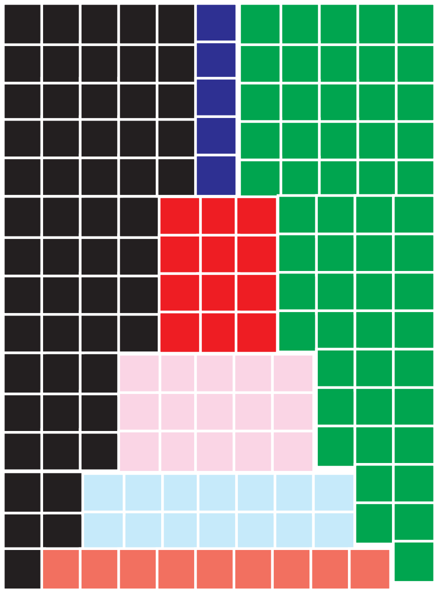
2. 1, 4, 9, 16, 25 ... एकक वर्गों का एक अन्य समुच्चय लीजिए जैसा आकृति 17.2 में दिखाया गया है और सभी में एक रंग जैसे हरा रंग भरिए।

3. 1, 4, 9, 16, 25 ... एकक वर्गों का एक तीसरा समुच्चय लीजिए जैसा आकृति 17.3 में दिखाया गया है और इन एकक वर्गों को अलग-अलग रंगों से भरिए।

4. एकक वर्गों के इन तीनों समुच्चयों को एक आयत के रूप में व्यवस्थित कीजिए जैसा आकृति 17.4 में दिखाया गया है।



आकृति 17.3



आकृति 17.4

प्रदर्शन

1. आकृति 17.1 में दिए गए एक समुच्चय का क्षेत्रफल है–

$(1 + 4 + 9 + 16 + 25)$ वर्ग इकाई

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$ वर्ग इकाई

2. ऐसे 3 समुच्चयों का क्षेत्रफल = $3\ (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

3. आयत का क्षेत्रफल $= 15 \times 11 = \left[\frac{5\times6}{2}\right]$ [2 (5) + 1]

इसलिए $3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = \frac{1}{2}\,[5 \times 6]\,[2\,(5) + 1]$

या $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6}\,[5 \times (5 + 1)]\,[2\,(5) + 1]$.

प्रेक्षण

$$3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = \frac{1}{2}\,(____ \times ____)\,(___ + 1)$$

$$\Rightarrow \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6}\,(____ \times ____)\,(___ + 1)$$

इसलिए, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \frac{1}{6}\,(____ \times ____)\,(___ + 1)$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 10^2 = \frac{1}{6}\,(____ \times ____)\,(___ + 1).$$

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का प्रयोग

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}\,(n \times (n + 1)\,(2n + 1)$ को प्रमाणित करने के लिए किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 18

उद्देश्य

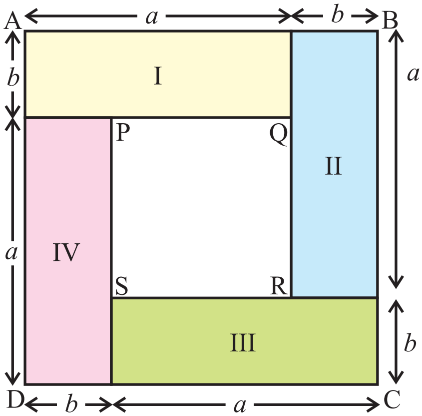
यह प्रदर्शित करना कि दो विभिन्न घनात्मक संख्याओं का समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य से सदैव अधिक होता है।

आवश्यक सामग्री

रंगीन चार्ट पेपर, स्केल, स्केच पेन, कटर

रचना की विधि

1. चार्ट पेपर से $a \times b$ $(a > b)$ विमाओं वाले चार आयताकार टुकड़े काटिए।
2. आकृति 18 की भाँति चारो आयताकार टुकड़ों को व्यवस्थित कीजिए।



आकृति 18

प्रदर्शन

1. ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा $(a + b)$ इकाई है।
2. वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= (a + b)^2$ वर्ग इकाई
3. चार आयताकार टुकड़ों का क्षेत्रफल $= 4\ (ab) = 4ab$ वर्ग इकाई

4. PQRS एक वर्ग है जिसकी भुजा $(a - b)$ इकाई है।

5. (ABCD) का क्षेत्रफल = चार आयताकार टुकड़ों का क्षेत्रफल + वर्ग PQRS का क्षेत्रफल

$\therefore$ (ABCD) का क्षेत्रफल > चार आयताकार टुकड़ों के क्षेत्रफल का योग

अर्थात् $(a + b)^2 > 4ab$

या $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$

$\therefore$ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ अर्थात् A.M. > G.M.

प्रेक्षण

$a = 5\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$ लीजिए

$\therefore$ AB $= a + b =$ ________ इकाई

ABCD का क्षेत्रफल $= (a + b)^2 =$ ________ वर्ग इकाई

प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल $= ab =$ ________ वर्ग इकाई

वर्ग PQRS का क्षेत्रफल $= (a - b)^2 =$ __________ वर्ग इकाई

ABCD = 4 (आयताकार टुकड़ों का क्षेत्रफल) + (PQRS का क्षेत्रफल)

________ = 4 (________) + (________)

$\therefore$ _________ > 4 (________)

अर्थात् $(a + b)^2 > 4ab$ या $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$

या $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ इसलिए AM > GM

क्रियाकलाप 19

उद्देश्य

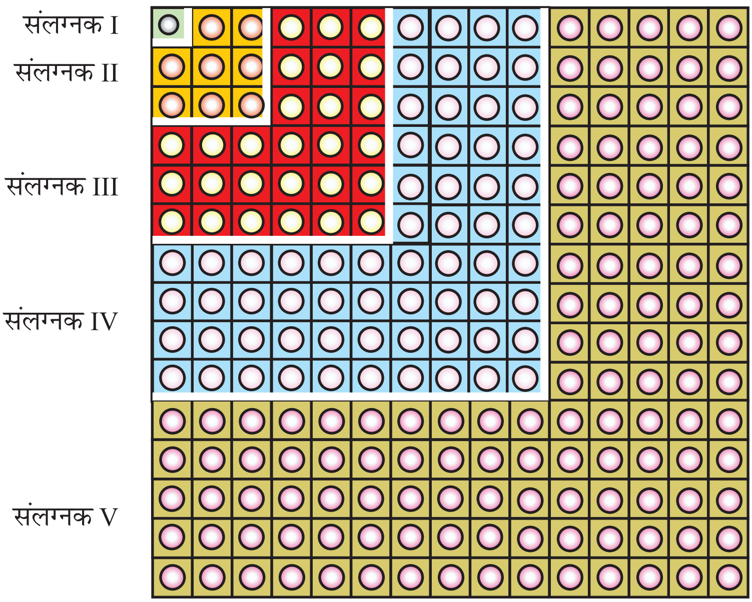
प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों के योग के सूत्र को स्थापित करना।

आवश्यक सामग्री

थर्मोकोल शीट, थर्मोकोल की गेंदें, पिन, पेंसिल, रूलर, गोंद, चार्ट पेपर, कटर इत्यादि।

रचना की विधि

1. थर्मोकोल की उपयुक्त वर्गाकार शीट लीजिए और उसके ऊपर चार्ट पेपर चिपकाइए।
2. चिपके हुए चार्ट पेपर पर क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाएँ इस प्रकार बनाइए कि 225 छोटे वर्ग बन जाएँ जैसा आकृति 19 में दिखाया गया है।
3. सबसे ऊपर बाईं ओर के वर्ग पर एक थर्मोकोल की गेंद को पिन की सहायता से स्थिर करें



आकृति 19

4. उसी वर्गाकार शीट पर 2^3 अर्थात् 8 थर्मोकोल के गोले 8 पिनों की सहायता से पहले वर्ग के संलग्न स्थिर करें जैसा आकृति में दिखाया गया है।

5. उसी वर्गाकार शीट पर 27 पिनों की सहायता से थर्मोकोल की 3^3 अर्थात् 27 गेंदों को पहले 8 वर्गों के संलग्न स्थिर करें।

6. इसी प्रकार थर्मोकोल की गेंदों को तब तक स्थिर करते रहें जब तक सभी वर्ग भर न जाएँ (आकृति 19.1 देखिए)

प्रदर्शन

1. संलग्नक I में गेंदों की संख्या $=1^3=1=\left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2$

2. संलग्नक II में गेंदों की संख्या $=1^3+2^3=9=\left(\frac{2\times 3}{2}\right)^2$

3. संलग्नक III में गेंदों की संख्या $= 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 =\left(\frac{3\times 4}{2}\right)^2$

4. संलग्नक IV में गेंदों की संख्या $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 =\left(\frac{4\times 5}{2}\right)^2$

5. संलग्नक V में गेंदों की संख्या $= 1^3 + 2^3 + 4^3 + 5^3 =\left(\frac{5\times 6}{2}\right)^2$

प्रेक्षण

गेंदों की वास्तविक गिनती करने पर–

1. संलग्नक I में गेंदों की संख्या $=1^3=$ ________ $=\left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2$

2. संलग्नक II में गेंदों की संख्या $=1^3+2^3=$ ________ $=\left(\frac{__\times__}{__}\right)^2$

3. संलग्नक III में गेंदों की संख्या $=1^3+2^3=$ ______ $=\left(\frac{__\times__}{__}\right)^2$.

4. संलग्नक IV में गेंदों की संख्या $=1^3+2^3+$ ______ $=$ ______ $=\left(\frac{__\times__}{2}\right)^2$.

5. संलग्नक V में गेंदों की संख्या

$$=(__)^3+(__)^3+(__)^3+(__)^3+(__)^3=__=\left(\frac{__\times__}{2}\right)^2.$$

अनुप्रयोग

इस परिणाम का उपयोग प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग अर्थात्

$$1^3+2^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 20

उद्देश्य

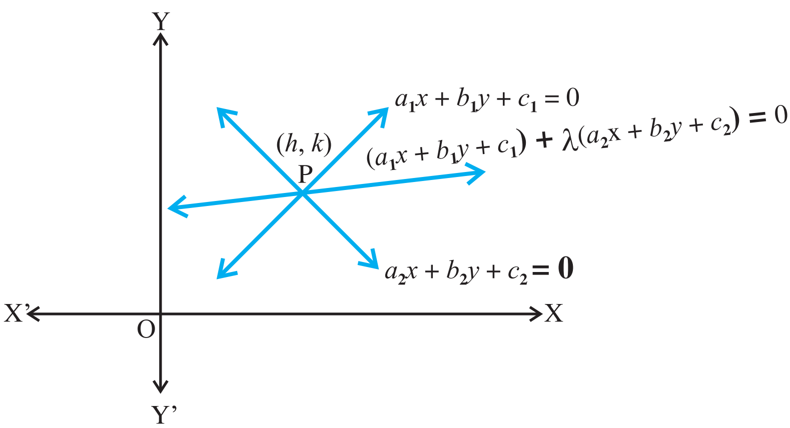
यह सत्यापित करना कि $a_1x+b_1y+c_1=0$ और $a_2x+b_2y+c_2=0$ के प्रतिच्छेदी बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण $(a_1x+b_1y+c_1) + \lambda(a_2x+b_2y+c_2) = 0$ के प्रकार का होता है।

आवश्यक सामग्री

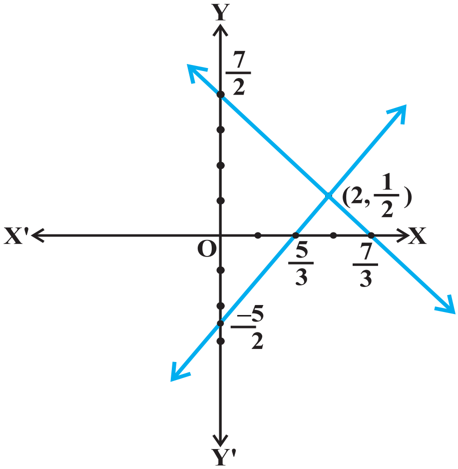
कार्डबोर्ड (गत्ता), स्केच पेन, सफ़ेद कागज़, गोंद, पेंसिल, रूलर

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक गत्ता लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. सफ़ेद कागज़ पर दो लंबवत् रेखाएँ $X'OX$ और $Y'OY$ खींचिए जो x-अक्ष तथा y-अक्ष को निरूपित करती हैं। एक ही स्केल लेकर x-अक्ष तथा y-अक्ष पर बिंदुओं को अंकित कीजिए।
3. दी हुई दो प्रतिच्छेदी रेखाओं को ग्राफ़ पेपर पर खींचिए तथा उनका प्रतिच्छेद बिंदु, माना (h, k) को अंकित कीजिए (आकृति 20.1 देखिए)



आकृति 20.1



आकृति 20.2

प्रदर्शन

1. मान लीजिए कि रेखाओं के समीकरण $3x - 2y = 5$ और $3x + 2y = 7$ हैं।

2. इन रेखाओं का प्रतिच्छेदी बिंदु $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ है (आकृति 20.2 देखिए)

3. दी हुई रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिंदु $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण है:

   $(3x - 2y - 5) + \lambda(3x + 2y - 7) = 0$ (1)

4. $\lambda = 1, -1, 2, \frac{1}{2}$ लीजिए।

5. (i) $\lambda = 1$, के लिए, प्रतिच्छेदी बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण

   $(3x - 2y - 5) + (3x + 2y - 7)$, अर्थात $6x - 12 = 0$ है जो प्रतिच्छेदी बिंदु $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ को संतुष्ट करता है, क्योंकि $6(2) - 12 = 0$

(ii) $\lambda = -1$ के लिए, प्रतिच्छेदी बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण $(3x - 2y - 5) - 1\,(3x + 2y - 7)$ अर्थात् $-4y + 2 = 0$ है, यह भी प्रतिच्छेदी बिंदु $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ द्वारा संतुष्ट होता है।

(iii) $\lambda = 2$ के लिए, समीकरण $(3x - 2y - 5) + 2\,(3x + 2y - 7) = 0$, अर्थात् $9x + 2y - 19 = 0$ है, जो पुनः बिंदु $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ द्वारा संतुष्ट होता है।

प्रेक्षण

1. $\lambda = 3$ के लिए, दी हुई रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण __________ है जो बिंदु $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ द्वारा संतुष्ट होता है।

2. $\lambda = 4$ के लिए, दी हुई रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण _________ है जो दी हुई रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिंदु ____________ द्वारा संतुष्ट होता है।

3. $\lambda = 5$ के लिए, दी हुई रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण______ है जो दी हुई रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिंदु _________द्वारा संतुष्ट होता है।

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग दो रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिंदु से जाने वाली रेखा के समीकरण से संबंधित परिणामों को समझने में किया जा सकता है। यह भी प्रेक्षित किया जाता है कि एक निश्चित बिंदु से अंततः अनेक रेखाएँ जाती हैं।