

(99) $\cot(x + 2x + 4x + 8x + \dots + n \text{ પદ})$ નું મુખ્ય આવર્તમાન
 (A) $\frac{\pi}{2^n}$ (B) $\frac{\pi}{2^n - 1}$ (C) $\frac{\pi}{2^n + 1}$ (D) 2π

ઉકેલ : $\cot(x + 2x + 4x + 8x + \dots + n \text{ પદ})$

$$a = x, r = 2$$

$$\text{આપેલ વિધેય} = \cot\left[\frac{x(2^n - 1)}{2 - 1}\right]$$

$$= \cot[x(2^n - 1)] \text{નું મુખ્ય આવર્તમાન} = \frac{\pi}{2^n - 1}$$

જવાબ : (B)

(100) જો ΔABC ની ત્રણ બૃણ 3 : 5 : 4 ની પ્રમાણમાં હોય, તો $a + c\sqrt{2} = \dots$

$$(A) 2a \quad (B) 2b \quad (C) \sqrt{2}c \quad (D) c$$

ઉકેલ : ΔABC ની ત્રણ બૃણની માપ 3 : 5 : 4ની પ્રમાણમાં છે.

$\therefore$ ધારો કે તેમની માપ 3x, 5x, 4x છે.

$$3x + 5x + 4x = \pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{12}$$

$$A = 3x = \frac{\pi}{4}, B = 5x = \frac{5\pi}{12}, C = 4x = \frac{\pi}{3}$$

$$b = a \cos C + c \cos A$$

$$\therefore b = a \cos \frac{\pi}{3} + c \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore b = \frac{a}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore b = \frac{a + \sqrt{2}c}{2}$$

$$\therefore a + \sqrt{2}c = 2b$$

જવાબ : (B)

(101) કાટકોણ ત્રિકોણ માટે $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^2} = \dots$

$$(A) 4 \quad (B) 8 \quad (C) 2 \quad (D) 1$$

ઉકેલ : ધારો કે ΔABC માં $\angle B$ કાટબૃણ છે.

$$\frac{b}{\sin B} = 2R. \text{ અર્થાત્, } b = 2R$$

$$\therefore a^2 + c^2 = b^2$$

$$\therefore a^2 + c^2 = 4R^2$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^2} = \frac{4R^2 + 4R^2}{R^2} = 8$$

જવાબ : (B)

(102) $a = \sqrt{3}, b = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}), c = \sqrt{2}$ તો $A = \dots$

$$(A) \frac{\pi}{4} \quad (B) \frac{\pi}{2} \quad (C) \frac{\pi}{3} \quad (D) \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ઉકેલ : } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 - 3}{\frac{2}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{3}$$

જવાબ : (C)

(103) $a^2 + 2a, 2a + 3, a^2 + 3a + 8$ ($a > 0$) ત્રિકોણની ત્રણ બાજુનાં માપ હોય, તો વાસ્તવિક a નો સંખ્યાગણ
.....

(A) $(3, \infty)$ (B) $(4, \infty)$ (C) $(5, \infty)$ (D) $(-\infty, 5)$

ઉકેલ : ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુનાં માપનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધુ હોય. આથી,

$$(i) (a^2 + 2a) + (2a + 3) > a^2 + 3a + 8 \\ \Rightarrow a^2 + 4a + 3 > a^2 + 3a + 8 \Rightarrow a > 5$$

$$\therefore a \in (5, \infty)$$

(1)

આ જ રીતે,

$$(ii) (2a + 3) + (a^2 + 3a + 8) > a^2 + 2a \\ \Rightarrow 3a + 11 > 0 \text{ જે સત્ય છે જ.}$$

$$(iii) a^2 + 2a + a^2 + 3a + 8 > 2a + 3 \\ \therefore 2a^2 + 3a + 5 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 40 = -31 < 0 \text{ તથા } a > 0$$

$$\therefore \forall a \in \mathbb{R} \text{ સત્ય છે.}$$

$$\therefore \text{ઉકેલગણ } (5, \infty) \text{ થાય.}$$

જવાબ : (C)

(104) ΔABC માં $\cot A, \cot B, \cot C$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, તો a^2, b^2, c^2 એ

(A) સમાંતર શ્રેણીમાં છે. (B) સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. (C) સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $\cot A, \cot B, \cot C$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$$\therefore \cot A + \cot C = 2\cot B$$

$$\therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\Delta} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\Delta} = \frac{2(a^2 + c^2 - b^2)}{4\Delta}$$

$$\therefore 2b^2 = 2a^2 + 2c^2 - 2b^2$$

$$\therefore a^2 + c^2 = 2b^2$$

$$\therefore a^2, b^2, c^2 \text{ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.}$$

જવાબ : (A)

(105) 9 બાજુવાળા નિયમિત બહુકોણની બાજુની લંબાઈ 2 હોય, તો તેને બહિર્ગત વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

(A) $\sec 20^\circ$ (B) $\operatorname{cosec} 20^\circ$ (C) $\cot 20^\circ$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : 9 બાજુવાળો બહુકોણ હોવાથી, કેન્દ્ર આગળ એક બાજુ દ્વારા બનતા ખૂણાનું અંશમાપ = 40

ΔOAB માં $\sin$ સૂત્રની મદદથી,

$$\frac{a}{\sin 70^\circ} = \frac{2}{\sin 40^\circ}$$

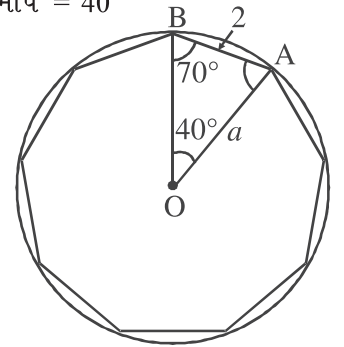
$$\therefore a = \frac{2\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 70^\circ}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

$$= \frac{1}{\sin 20^\circ} = \operatorname{cosec} 20^\circ$$

$$(\sin 70^\circ = \cos 20^\circ)$$

જવાબ : (B)



આકૃતિ 12.13

(106) ત્રિકોણના બે ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{6}$ અને $\frac{\pi}{4}$ હોય તથા અંતર્ગત બાજુનું માપ $(\sqrt{3} + 1)$ હોય, તો તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ છે.

- (A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{3} + 1$ (C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. $A = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{7\pi}{12}$, $C = \frac{\pi}{6}$

$$\therefore \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 105^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ} \quad \left(\sin 105^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)$$

$$\therefore \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{2}}$$

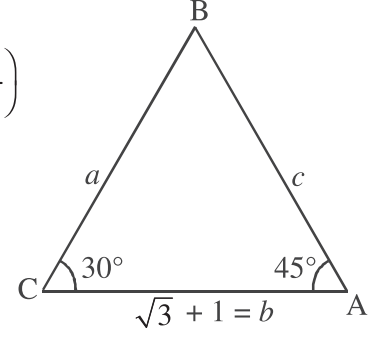
$$\therefore \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{3} + 1}{\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}\right)} = 2c$$

$$\therefore \sqrt{2}a = 2\sqrt{2} = 2c$$

$$\therefore a = 2, c = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= \frac{1}{2}ac\sin B \\ &= \frac{1}{2}(2)(\sqrt{2})\sin 105^\circ \\ &= \sqrt{2}\cos 15^\circ \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

જવાબ : (C)



આકૃતિ 12.14

(107) ΔABC માં $\frac{2\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{2\cos C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$ હોય, તો $A = \dots\dots$

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : ΔABC માં $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ લેતાં,

$$\frac{2\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{2\cos C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$$

$$\therefore \frac{2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)}{a} + \frac{\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)}{b} + \frac{2\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac}$$

$$\therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc} = \frac{a^2 + b^2}{abc}$$

$$\therefore \frac{2b^2}{abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} = \frac{a^2 + b^2}{abc}$$

$$\therefore \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = a^2 - b^2$$

$$\therefore a^2 + c^2 - b^2 = 2a^2 - 2b^2$$

$$\therefore b^2 + c^2 = a^2$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{2}$$

જવાબ : (A)

(108) જો ΔABC માં $a : b : c = 4 : 5 : 6$ તો પરિવૃત્તની ત્રિજ્યા અને અંતઃવૃત્તની ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર

(A) 8 : 7

(B) 12 : 7

(C) 24 : 7

(D) 16 : 7

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k$

$$\therefore a = 4k, b = 5k, c = 6k$$

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{15k}{2}$$

$$s - a = \frac{15k}{2} - 4k = \frac{7k}{2}$$

$$s - b = \frac{15k}{2} - 5k = \frac{5k}{2}$$

$$s - c = \frac{15k}{2} - 6k = \frac{3k}{2}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= s(s - a)(s - b)(s - c) \\ &= \left(\frac{15k}{2}\right)\left(\frac{7k}{2}\right)\left(\frac{5k}{2}\right)\left(\frac{3k}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{15\sqrt{7}k^2}{4}$$

બીજી રીત :

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\therefore \frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$= 4 \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-a)(s-a)(s-b)}{bc \cdot ca \cdot ab}}$$

$$= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$

$$= \frac{4 \frac{105k^3}{8}}{120k^3} = \frac{7}{16}$$

$$\therefore \frac{R}{r} = \frac{16}{7}$$

જવાબ : (D)

(109) ત્રિકોણની ત્રણ બાજુનાં માપ 3, 5, 7 છે, તો સૌથી મોટા ખૂણાનું માપ છે.

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{5\pi}{6}$

(C) $\frac{2\pi}{3}$

(D) $\frac{3\pi}{4}$

ઉકેલ : $a = 3, b = 5, c = 7$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{9 + 25 - 49}{2(3)(5)} = \frac{-15}{30} = \frac{-1}{2}. \text{ આથી, } C = \frac{2\pi}{3}$$

જવાબ : (C)

(110) ΔABC માં $m\angle B = \frac{\pi}{3}, m\angle C = \frac{\pi}{4}$, D એ $\overline{BC}$ નું $1 : 3$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે, તો $\frac{\sin m\angle BAD}{\sin m\angle CAD}$

=

(A) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

ઉકેલ : ΔABD માં $\frac{\sin(m\angle BAD)}{\sin B} = \frac{x}{AD}$ (1)

ΔACD માં $\frac{\sin(m\angle CAD)}{\sin C} = \frac{CD}{AD} = \frac{3x}{AD}$ (2)

(1) તથા (2)નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{\sin(m\angle BAD)}{\sin(m\angle CAD)} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{1}{3}$$

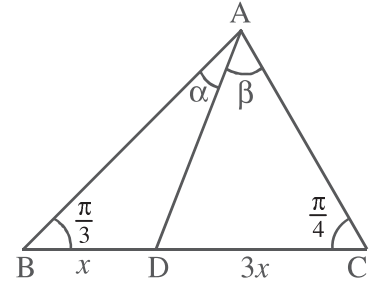
$$\therefore \frac{\sin(m\angle BAD)}{\sin(m\angle CAD)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}$$

જવાબ : (A)



આકૃતિ 12.15

(111) જો ΔABC ના ખૂણાના માપ ગુણોત્તર $4 : 1 : 1$ તો, સૌથી મોટી બાજુ અને ત્રિકોણની પરિમિતિનો ગુણોત્તર

(A) $\sqrt{3} : (2 + \sqrt{3})$

(B) $1 : 6$

(C) $1 : 2 + \sqrt{3}$

(D) $2 : 3$

ઉકેલ : ΔABC માં ત્રણ ખૂણાનાં માપના ગુણોત્તર $4 : 1 : 1$ છે.

$\therefore$ ધારો કે $m\angle A = 4x, m\angle B = x, m\angle C = x$

$\therefore \Delta ABC$ માં $m\angle A + m\angle B + m\angle C = \pi$. આથી, $6x = \pi$. આથી, $x = \frac{\pi}{6}$

$$\therefore m\angle A = \frac{2\pi}{3}, m\angle B = \frac{\pi}{6}, m\angle C = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{હવે, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{c}{\sin \frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{a}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{c}{\left(\frac{1}{2}\right)} = k \quad (\text{ધારો કે}) \quad \therefore a + b + c = \frac{\sqrt{3}k + k + k}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}k}{2}, b = \frac{k}{2}, c = \frac{k}{2} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{સૌ થી મોટી બાજુ} \\ \text{પરિમિતિ} \end{array} = \frac{\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})} \right.$$

$$\therefore \text{ગુણોત્તર } \sqrt{3} : (2 + \sqrt{3}) \text{ થાય. જવાબ : (A)}$$

(112) $\cot(\theta - \alpha), 3\cot\theta, \cot(\theta + \alpha)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. $\theta \neq \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ તો $\sin\theta \cdot \operatorname{cosec}\alpha = \dots$

(A) $\pm\sqrt{2}$ (B) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $\cot(\theta - \alpha), 3\cot\theta, \cot(\theta + \alpha)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$$\therefore \cot(\theta - \alpha) + \cot(\theta + \alpha) = 6\cot\theta$$

$$\therefore \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} + \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\sin(\theta + \alpha)} = 6\cot\theta$$

$$\therefore \frac{\cos(\theta - \alpha)\sin(\theta + \alpha) + \cos(\theta + \alpha)\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta + \alpha)\sin(\theta - \alpha)} = 6\cot\theta$$

$$\therefore \frac{\sin(\theta + \alpha + \theta - \alpha)}{\sin^2\theta - \sin^2\alpha} = 6\cot\theta$$

$$\therefore \frac{\sin 2\theta}{\sin^2\theta - \sin^2\alpha} = \frac{6\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta - \sin^2\alpha} = \frac{6\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \sin^2\theta = 3\sin^2\theta - 3\sin^2\alpha$$

$$\therefore 2\sin^2\theta = 3\sin^2\alpha$$

$$\therefore \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\alpha} = \frac{3}{2}, \text{ અર્થાત્ } \sin^2\theta \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \sin\theta \operatorname{cosec}\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

જવાબ : (B)

(113) $P = \tan 6^\circ \tan 42^\circ$ અને $Q = \cot 66^\circ \cot 78^\circ$ હોય, તો

(A) $P = 2Q$ (B) $P = \frac{1}{3}$ (C) $P = Q$ (D) $3P = 2Q$

ઉકેલ : $\frac{P}{Q} = \frac{\tan 6^\circ \tan 42^\circ}{\cot 66^\circ \cot 78^\circ}$

$$= \tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ$$

$$= \tan 6^\circ [\tan 66^\circ] [\tan(60^\circ - 18^\circ) \tan(60^\circ + 18^\circ)]$$

$$= \frac{\tan 6^\circ [\tan 66^\circ] [\tan 18^\circ \tan(60^\circ - 18^\circ) \tan(60^\circ + 18^\circ)]}{\tan 18^\circ}$$

$$= \frac{\tan 6^\circ \tan 66^\circ \tan 54^\circ}{\tan 18^\circ}$$

$$\left(\tan\theta \tan\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \tan 3\theta \right)$$

$$= \frac{\tan 6^\circ \tan(60^\circ - 6^\circ) \tan(60^\circ + 6^\circ)}{\tan 18^\circ}$$

$$= \frac{\tan 18^\circ}{\tan 18^\circ} = 1$$

$$\therefore P = Q$$

જવાબ : (C)

$$(114) \quad \Delta ABC \text{ માં } \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2} = \dots$$

$$(A) \cos^2 A$$

$$(B) \sin^2 A$$

$$(C) 1 - \cos A$$

$$(D) 1 + \cos A$$

$$\text{ઉકેલ : } \frac{(2s)(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4b^2c^2} = \frac{4\Delta^2}{b^2c^2} = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 A}{b^2 c^2} = \sin^2 A$$

જવાબ : (B)

$$(115) \quad \tan \theta = \frac{1}{7}, \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ હોય, તો } \theta + 2\phi = \dots \left(\theta, \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$(A) \frac{\pi}{2}$$

$$(B) \frac{5\pi}{2}$$

$$(C) \frac{\pi}{6}$$

$$(D) \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ઉકેલ : } \tan \theta = \frac{1}{7}. \text{ આથી, } \sin \theta = \frac{1}{5\sqrt{2}} \text{ તથા } \cos \theta = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{10}}. \text{ આથી, } \cos \phi = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin 2\phi = 2\sin \phi \cos \phi = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \cos 2\phi = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < 2\phi < \pi \Rightarrow 0 < \theta + 2\phi < \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos(\theta + 2\phi) = \cos \theta \cos 2\phi - \sin \theta \sin 2\phi = \frac{28}{25\sqrt{2}} - \frac{3}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

બીજા તથા ત્રીજા ચરણમાં $\cos$ જણ છે.

$$\therefore \theta + 2\phi = \frac{\pi}{4}$$

જવાબ : (D)

$$(116) \quad A + B = \frac{\pi}{3} \text{ તથા } \cos A + \cos B = 1 \text{ હોય, તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ?}$$

$$(A) \cos(A-B) = \frac{1}{3}$$

$$(B) \cos(A-B) = -\frac{1}{3}$$

$$(C) |\cos A - \cos B| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$(D) |\cos A - \cos B| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ઉકેલ : } A + B = \frac{\pi}{3}. \text{ આથી } \cos(A+B) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos A + \cos B = 1$$

$$\therefore 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1$$

$$\therefore 2\cos \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1$$

$$\left(A+B = \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(A-B) = 2\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

$\therefore$ જવાબ (B) છે.

$$\begin{aligned} |\cos A - \cos B| &= \left| -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \right| \\ &= \left| -2\sin\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \right| \\ &= \left| \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \right| \\ &= \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$\therefore$ જવાબ (C) તથા (D) નથી.

જવાબ : (B)

$$(117) \quad \sum n^2 = \lambda \sum n \quad \text{હોય, તો} \quad \sin^{-1}\left(\frac{9\lambda^2 - 4n^2}{6\lambda + 4n}\right) = \dots\dots$$

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{2}$

(D) π

$$\text{ઉકેલ : } \lambda = \frac{\sum n^2}{\sum n} = \frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{\frac{n}{2}(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$$

$$\begin{aligned} \sin^{-1}\left(\frac{9\lambda^2 - 4n^2}{6\lambda + 4n}\right) &= \sin^{-1}\left(\frac{(2n+1)^2 - 4n^2}{4n+2+4n}\right) \\ &= \sin^{-1}\left(\frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2}{8n+2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

જવાબ : (A)

$$(118) \quad 4n\alpha = \pi \quad \text{હોય, તો} \quad \tan\alpha \tan 2\alpha \tan 3\alpha \dots \tan(2n-1)\alpha = \dots\dots (n \in \mathbb{N})$$

(A) 1

(B) 0

(C) -1

(D) આમાંથી એક પણ નહિ.

$$\text{ઉકેલ : } \tan(2n-1)\alpha = \tan(2n-1)\frac{\pi}{4n} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n}\right) = \cot\frac{\pi}{4n} = \cot\alpha$$

$$\text{તે જ પ્રમાણે } \tan((2n-2)\alpha) = \cot 2\alpha \quad \text{અને} \quad \tan((2n-3)\alpha) = \cot 3\alpha$$

આમ, ગુણાકાર કરતાં,

પ્રથમ પદ છેલ્લા પદનો ગુણાકાર 1 તે પછી બીજા પદ અને છેલ્લેથી બીજા પદનો ગુણાકાર આ જ રીતે બધાં પદોના ગુણાકાર 1 મળશે.

$$\text{છેલ્લે વચ્ચેનું એક પદ રહેશે જે } \tan(n\alpha) = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \text{ થશે.}$$

આથી જવાબ 1 આવશે.

જવાબ : (A)

(119) જો $\sin x + \cos y = a$ તથા $\cos x + \sin y = b$ તો $\tan\left(\frac{x-y}{2}\right) = \dots$

(A) $a + b$

(B) $a - b$

(C) $\frac{a+b}{a-b}$

(D) $\frac{a-b}{a+b}$

ઉકેલ : $\sin x + \cos y = a$

$\therefore \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = a$

$\therefore 2\sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - \frac{\pi}{2} + y}{2}\right) = a \quad (1)$

$\cos x + \sin y = b$

$\therefore \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = b$

તથા $2\cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - \frac{\pi}{2} + y}{2}\right) = b \quad (2)$

(1) તથા (2)ને ગુણીતર લેતાં,

$\therefore \tan\left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{b}$

$\therefore \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{a}{b}$

$\therefore \frac{1 + \tan\left(\frac{x-y}{2}\right) + 1 - \tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{x-y}{2}\right) - 1 + \tan\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{a+b}{a-b}$

$\therefore \frac{2}{2\tan\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{a+b}{a-b}$

$\therefore \tan\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b}$

જવાબ : (D)

(120) $(x\tan\alpha + y\cot\alpha)(x\cot\alpha + y\tan\alpha) - 4xy\cot^2 2\alpha$ એ થી સ્વતંત્ર હોય.

(A) x

(B) y

(C) α

(D) x, y અને α

ઉકેલ : $(x\tan\alpha + y\cot\alpha)(x\cot\alpha + y\tan\alpha) - 4xy\cot^2 2\alpha$

$= x^2 + xy\tan^2\alpha + xy\cot^2\alpha + y^2 - 4xy\cot^2 2\alpha$

$= x^2 + y^2 + xy(\tan^2\alpha + \cot^2\alpha - 4\cot^2 2\alpha)$

$= x^2 + y^2 + xy\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 4\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}\right)$

$= x^2 + y^2 + xy\left(\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha \cos^2\alpha} - \frac{4\cos^2 2\alpha}{4\sin^2\alpha \cos^2\alpha}\right)$

$= x^2 + y^2 + xy\left(\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha \cos^2\alpha}\right)$

$= x^2 + y^2 + xy\left(\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha \cos^2\alpha - \sin^4\alpha}{\sin^2\alpha \cos^2\alpha}\right)$

$= x^2 + y^2 + 2xy$

$= (x+y)^2$ જે α થી સ્વતંત્ર છે.

જવાબ : (C)

(121) $3^{\sin^6 \alpha} + 3^{\cos^6 \alpha}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત છે.

- (A) $2 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$ (B) $2 \cdot 3^{\frac{7}{8}}$ (C) $3 \cdot 2^{\frac{1}{8}}$ (D) 6

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, સમાંતર મધ્યક $\geq$ ગુણોત્તર મધ્યક

$$\begin{aligned} \therefore \frac{3^{\sin^6 \alpha} + 3^{\cos^6 \alpha}}{2} &\geq \sqrt{3^{\sin^6 \alpha} \cdot 3^{\cos^6 \alpha}} \\ &= \sqrt{3^{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{આપણે જાણીએ છીએ કે, } \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

(1) તથા (2) પરથી,

$$\begin{aligned} \therefore 3^{\sin^6 \alpha} + 3^{\cos^6 \alpha} &\geq 2\sqrt{3^{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha}} \\ 3^{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha} \text{ ની ન્યૂનતમ કિંમત મેળવવા } \sin^2 2\alpha \text{ મહત્તમ થાય.} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin^2 2\alpha = 1 \text{ લઈએ, તો}$$

$$\text{ન્યૂનતમ કિંમત} = 2 \cdot \sqrt{3^{\frac{1}{4}}} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{8}} \text{ છે.}$$

જવાબ : (A)

[નોંધ : $\alpha = \frac{\pi}{4}$ માટે ન્યૂનતમ મળે.]

(122) $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ હોય, તો $\tan \alpha \tan 2\alpha + \tan 2\alpha \tan 4\alpha + \tan 4\alpha \tan \alpha = \dots$

- (A) -7 (B) -4 (C) 0 (D) 4

ઉકેલ : $\tan \alpha \tan 2\alpha + \tan 2\alpha \tan 4\alpha + \tan 4\alpha \tan \alpha$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} + \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 4\alpha + \sin 2\alpha \sin 4\alpha \cos \alpha + \sin 4\alpha \sin \alpha \cos 2\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cos 4\alpha - \cos(\alpha + 2\alpha + 4\alpha)}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha} \quad (\text{વિશિષ્ટ સૂત્રો જુઓ.}) \\ &= 1 - \frac{\cos 7\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha} \\ &= 1 - \frac{\cos 2\pi(2\sin \alpha)}{2\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha} \quad (7\alpha = 2\pi) \\ &= 1 - \frac{(1)(2\sin \alpha) \times 2}{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha} \\ &= 1 - \frac{4\sin \alpha \times 2}{2\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha} \\ &= 1 - \frac{8\sin \alpha}{\sin 8\alpha} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{8 \sin \alpha}{\sin(7\alpha + \alpha)}$$

$$= 1 - \frac{8 \sin \alpha}{\sin(2\pi + \alpha)}$$

$$(7\alpha = 2\pi)$$

$$= 1 - \frac{8 \sin \alpha}{\sin \alpha} = -7$$

જવાબ : (A)

(123) $k_1 = \tan 27\theta - \tan \theta$ અને $k_2 = \frac{\sin \theta}{\cos 3\theta} + \frac{\sin 3\theta}{\cos 9\theta} + \frac{\sin 9\theta}{\cos 27\theta}$ માટે નીચેનામાંથી કયું સત્ય છે ?

(A) $k_1 = 2k_2$

(B) $k_1 = k_2$

(C) $k_1 = k_2 + 2$

(D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $\tan 3\theta - \tan \theta = \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

$$= \frac{\sin 3\theta \cos \theta - \cos 3\theta \sin \theta}{\cos 3\theta \cos \theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 3\theta \cos \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos 3\theta \cos \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta}{\cos 3\theta}$$

$$\therefore \tan 3\theta - \tan \theta = \frac{2 \sin \theta}{\cos 3\theta}, \tan 9\theta - \tan 3\theta = \frac{2 \sin 3\theta}{\cos 9\theta}, \tan 27\theta - \tan 9\theta = \frac{2 \sin 9\theta}{\cos 27\theta}$$

$$\tan 27\theta - \tan \theta = 2 \left(\frac{\sin \theta}{\cos 3\theta} + \frac{\sin 3\theta}{\cos 9\theta} + \frac{\sin 9\theta}{\cos 27\theta} \right)$$

$$\therefore k_1 = 2k_2$$

જવાબ : (A)

(124) $4\cos 36^\circ + \cot\left(7\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \sqrt{n_3} + \sqrt{n_4} + \sqrt{n_5} + \sqrt{n_6}$

$$\sum_{i=1}^6 n_i^2 = \dots\dots$$

(A) 81

(B) 71

(C) 91

(D) 61

ઉકેલ : $\cot 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{1 + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 6 + \sqrt{12} + \sqrt{12} + 2}{4}$$

$$= \frac{4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{3}}{4}$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6}$$

(1)

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}. \text{ અથી, } 4\cos 36^\circ = \sqrt{5} + 1$$

(2)

(1) અને (2) ને સરવાળો કરતાં,

$$4\cos 36^\circ + \cot 7\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

$$\therefore n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 4, n_5 = 5, n_6 = 6$$

$$\sum_{i=1}^6 n_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

જવાબ : (C)

(125) $0 < A < \frac{\pi}{2}$

$\sin A + \cos A + \tan A + \cot A + \sec A + \csc A = 7$ અને $\sin A$ તથા $\cos A$ સમીકરણ

$4x^2 - 3x + a = 0$ ની બે બીજા હોય, તો $25a = \dots\dots$ છે. જ્યાં $0 < A < \frac{\pi}{2}$

- (A) 21 (B) 24 (C) 28 (D) 30

ઉકેલ : $4x^2 - 3x + a = 0$ ની બે બીજા $\sin A$ અને $\cos A$ છે.

$\therefore \sin A + \cos A = \frac{3}{4}$ અને $\sin A \cos A = \frac{a}{4}$

$\therefore (\sin A + \cos A) + (\tan A + \cot A) + (\sec A + \csc A) = 7$

$\therefore (\sin A + \cos A) + \left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \right) + \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\sin A} \right) = 7$

$\therefore (\sin A + \cos A) + \left(\frac{1}{\sin A \cos A} \right) + \left(\frac{\sin A + \cos A}{\sin A \cos A} \right) = 7$

$\therefore \frac{3}{4} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 7$. આથી, $\frac{3a + 28}{4a} = 7$

$\therefore 3a + 28 = 28a$. આથી, $25a = 28$

જવાબ : (C)

(126) $f(\theta) = (\sin \theta + \csc \theta)^2 + (\cos \theta + \sec \theta)^2$ તો $f(\theta)$ થી નાનું ન હોય.

- (A) 9 (B) 12 (C) 14 (D) 16

ઉકેલ : $f(\theta) = (\sin \theta + \csc \theta)^2 + (\cos \theta + \sec \theta)^2$
 $= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sec^2 \theta + \csc^2 \theta + 4$
 $= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1 + \tan^2 \theta + 1 + \cot^2 \theta + 4$
 $= 7 + \tan^2 \theta + \cot^2 \theta$
 $= 9 + \tan^2 \theta - 2 + \cot^2 \theta$
 $= (\tan \theta - \cot \theta)^2 + 9 \geq 9$

જવાબ : (A)

નોંધ : $\theta = \frac{\pi}{4}$ માટે મૂલ્ય 9 બને.

(127) $\sin \alpha - \sin \beta = a$, $\cos \alpha + \cos \beta = b$ તો $a^2 + b^2$ થી વધુ ન હોય.

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

ઉકેલ : $a^2 + b^2 = (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2$
 $= \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta$
 $= 2 + 2 \cos(\alpha + \beta)$
 $= 2 \left(2 \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right) \leq 4$

જવાબ : (C)

નોંધ : $\alpha = \beta = 0$ માટે મૂલ્ય 4 બને.

(128) $A - B = \frac{\pi}{2}$ તથા A, B ધન સંખ્યા હોય, તો $(\sin A + \sin B) \cos \frac{\pi}{4}$ થી મોટા ન હોય.

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : $A = \frac{\pi}{2} + B$

હવે, $(\sin A + \sin B) \cos \frac{\pi}{4}$

$= \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} + B \right) + \sin B \right) \cos \frac{\pi}{4}$

$= (\cos B + \sin B) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$\cos B + \sin B$ ની મહત્તમ કિંમત $\sqrt{2}$ છે.

$\therefore (\cos B + \sin B) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \leq (\sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1$

$\therefore (\sin A + \sin B) \cos \frac{\pi}{4}$ તે 1 થી મોટી ન હોય. ($A = \frac{3\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{4}$ માટે 1 બને.) જવાબ : (A)

(129) ΔABC માં જો $\tan A < 0$ તો $\tan B \tan C$ અંતરાલમાં છે.

(A) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

(B) $(0, 1)$

(C) $(1, 2)$

(D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $\tan A < 0 \Rightarrow A > \frac{\pi}{2}$

$\therefore \Delta ABC$ માટે, $0 < B + C < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \tan(B + C) > 0$

$\therefore \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} > 0$

$\therefore 0 < \tan B \tan C < 1$

જવાબ : (B)

(130) જો $\theta \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, તો $\frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta + \cos \theta}$ નો વિસ્તાર છે.

(A) $(0, \infty)$

(B) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

(C) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

(D) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

ઉકેલ : ધારો કે $y = \frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta + \cos \theta}$

$\therefore y \cos^2 \theta + y \cos \theta = \cos^2 \theta - 1$

$\therefore y \cos^2 \theta + y \cos \theta - \cos^2 \theta + 1 = 0$

$\therefore y \cos \theta (\cos \theta + 1) - (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$

$\therefore (\cos \theta + 1)(y \cos \theta - \cos \theta + 1) = 0$

$\therefore \cos \theta = -1$ શક્ય નથી.

($\theta \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$)

$\therefore y \cos \theta - \cos \theta + 1 = 0$

$\therefore \cos \theta (y - 1) + 1 = 0$

$\therefore \cos \theta = \frac{1}{1-y}$

$$\theta \neq n\pi \Rightarrow -1 < \cos\theta < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{1-y} < 1$$

$$\therefore -1 < \frac{1}{1-y} < 0 \quad \text{અથવા} \quad 0 < \frac{1}{1-y} < 1$$

$$\therefore -1 + y > 1 \quad \text{અથવા} \quad 1 < 1 - y$$

$$\therefore y > 2 \quad \text{અથવા} \quad y < 0$$

જવાબ : (B)

(131) ΔABC માટે $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત હોય

(A) 1

(B) 0

(C) 2

(D) 3

ઉકેલ : ΔABC માટે,

$$A + B + C = \pi. \quad \text{અર્થાત્, } \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{હવે, } \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} - 1$$

$$= \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} - \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} \right)^2 + \left(\tan \frac{B}{2} - \tan \frac{C}{2} \right)^2 + \left(\tan \frac{C}{2} - \tan \frac{A}{2} \right)^2 \right] \geq 0$$

$$\text{હવે, જો } \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} = \tan \frac{C}{2} \quad \text{તો } A = B = C \quad \text{થાય અને}$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \quad \text{ની ન્યૂનતમ કિંમત 1 થાય.}$$

જવાબ : (A)

(132) સમીકરણ $3\cos^{-1}x - \pi x - \frac{\pi}{2} = 0$ ને

(A) માત્ર એક ઉકેલ હોય .

(B) ઉકેલ ન મળે.

(C) એક કરતાં વધુ ઉકેલ મળે.

(D) એક અથવા એકથી વધુ ઉકેલ મળે.

$$\text{ઉકેલ : } 3\cos^{-1}x = \pi x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1}x = \frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}$$

હવે $\cos^{-1}x$ એ $(0, \pi)$ માં ઘટતું વિધેય છે તથા $\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}$ એ $(0, \pi)$ માં વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ બંનેનો છેદગણ $\emptyset$ અથવા અનન્ય બિંદુ મળે.

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{લઈએ.}$$

$$\text{ડા.બા.} = \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \left| \quad \text{જા.બા.} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \right.$$

$\therefore$ માત્ર એક ઉકેલ $x = \frac{1}{2}$ છે.

જવાબ : (A)

$$(133) \sin^{-1}\left(a - \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{9} - \dots\right) + \cos^{-1}(1 + b + b^2 + \dots) = \frac{\pi}{2}, \text{ તો}$$

- (A) $a = -3, b = 1$ (B) $a = 1, b = -\frac{1}{3}$ (C) $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

$$\text{ઉકેલ : } \sin^{-1}\left(a - \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{9} - \dots\right) + \cos^{-1}(1 + b + b^2 + \dots) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore a - \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{9} - \dots = 1 + b + b^2 + \dots$$

$$\therefore \frac{a}{1 - \left(\frac{-a}{3}\right)} = \frac{1}{1 - b}$$

$$\therefore \frac{3a}{3 + a} = \frac{1}{1 - b}$$

$$(A) a = -3, b = 1$$

$$\text{ડા.બા.} = \frac{3a}{3 + a} = \text{અવ્યાખ્યાયિત અને } \text{જ.બા.} = \frac{1}{1 - b} = \frac{1}{0} = \text{અવ્યાખ્યાયિત}$$

(A) શક્ય નથી.

$$(B) a = 1, b = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ડા.બા.} = \frac{3}{3 + 1} = \frac{3}{4} \text{ અને } \text{જ.બા.} = \frac{1}{1 - b} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$$

(B) શક્ય છે.

$$(C) a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2}$$

$$\text{ડા.બા.} = \frac{3a}{3 + a} = \frac{\frac{1}{2}}{3 + \frac{1}{6}} = \frac{3}{19} \text{ અને } \text{જ.બા.} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

(C) શક્ય નથી.

જવાબ : (B)

$$(134) x \in [0, 2\pi] \text{ માટે } 2^{1 + |\sin x|} + |\sin 2x| + |\sin 3x| = 2, \text{ તો } \dots$$

- (A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{2}, n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{ઉકેલ : } 2^{1 + |\sin x|} + |\sin 2x| + |\sin 3x| = 2$$

$$\therefore 1 + |\sin x| + |\sin 2x| + |\sin 3x| = 2$$

$$\therefore |\sin x| + |\sin 2x| + |\sin 3x| = 1$$

$$\therefore |\sin x| = |\sin 2x| = |\sin 3x| = 0$$

$$\therefore x = 0$$

જવાબ : (A)

એક કરતાં વધુ સાચા જવાબો :

(135) $\frac{\tan 3A}{\tan A} = k$, ($k \neq 1$) તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય છે ?

- (A) $\frac{\cos A}{\cos 3A} = \frac{k^2 - 1}{2k}$ (B) $\frac{\sin 3A}{\sin A} = \frac{2k}{k - 1}$ (C) $k < \frac{1}{3}$ (D) $k > 3$

ઉકેલ : $\frac{\tan 3A}{\tan A} = k$

$$\therefore \frac{\tan 3A - \tan A}{\tan A} = k - 1$$

$$\therefore \frac{\frac{\sin 3A}{\cos 3A} - \frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A}{\cos A}} = k - 1$$

$$\therefore \frac{\sin 2A}{\sin A \cos 3A} = k - 1$$

$$\therefore \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A \cos 3A} = k - 1$$

$$\therefore \frac{\cos A}{\cos 3A} = \frac{k - 1}{2} \quad (1)$$

$\therefore$ (A) અસત્ય છે. (કારણ કે $k \neq 1$)

$$\left(\text{કારણ કે } \frac{k^2 - 1}{2k} = \frac{k}{2} - \frac{1}{2k} \neq \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{હવે, } \frac{\tan 3A}{\tan A} = k$$

$$\therefore \frac{\sin 3A}{\cos 3A} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} = k$$

$$\therefore \left(\frac{\cos A}{\cos 3A} \right) \left(\frac{\sin 3A}{\sin A} \right) = k$$

$$\therefore \left(\frac{\sin 3A}{\sin A} \right) \left(\frac{k - 1}{2} \right) = k \quad ((1) \text{ પરથી})$$

$$\therefore \frac{\sin 3A}{\sin A} = \frac{2k}{k - 1}$$

$\therefore$ (B) સત્ય છે.

$$\text{હવે, } \frac{3 \sin A - 4 \sin^3 A}{\sin A} = \frac{2k}{k - 1}$$

$$\therefore 3 - 4 \sin^2 A = \frac{2k}{k - 1}$$

$$\therefore 4 \sin^2 A = 3 - \frac{2k}{k - 1} = \frac{k - 3}{k - 1}$$

$\sin A \neq 0, 1$ ($\tan A, \cot A$ વ્યાખ્યાયિત છે.)

વળી, $0 < \sin^2 A < 1$

$$\therefore 0 < \frac{k - 3}{k - 1} < 4$$

$$\therefore \left(\frac{k - 3}{k - 1} \right) > 0$$

$$\therefore k < 1 \text{ અથવા } k > 3 \quad (2)$$

$$\frac{k - 3}{k - 1} - 4 < 0$$

$$\therefore \frac{k - 3 - 4k + 4}{k - 1} < 0$$

$$\therefore \frac{-3k + 1}{k - 1} < 0$$

$$\therefore \frac{3k - 1}{k - 1} > 0$$

$$\therefore \frac{k - \frac{1}{3}}{k - 1} > 0$$

$$\therefore k > 1 \text{ અથવા } k < \frac{1}{3} \quad (3)$$

(2) અને (3) પરથી,

$$k < \frac{1}{3} \text{ અથવા } k > 3$$

$\therefore$ (C) અને (D) પણ શક્ય બને.

જવાબ : (B), (C), (D)

(136) $\sin \alpha$ અને $\cos \alpha$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક $\cos \beta$ છે. $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ તો $\cos 2\beta = \dots$

- (A) $-2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ (B) $-2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$ (C) $2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$ (D) $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$

ઉકેલ : $\sin\alpha$ અને $\cos\alpha$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક $\cos\beta$ છે.

$$\cos^2\beta = \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\therefore 2\cos^2\beta = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$\therefore 1 + \cos 2\beta = \sin 2\alpha$$

$$\therefore \cos 2\beta = \sin 2\alpha - 1$$

$$\therefore \cos 2\beta = -(1 - \sin 2\alpha) = -\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)$$

$$\therefore \cos 2\beta = -2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \quad \text{જવાબ : (A), (B)}$$

$$(137) \quad 81^{\sin^2\theta} + 81^{\cos^2\theta} = 30 \quad \text{હોય, તો } \theta = \dots\dots \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$(A) \quad \frac{\pi}{6}$$

$$(B) \quad \frac{\pi}{3}$$

$$(C) \quad \frac{2\pi}{3}$$

$$(D) \quad \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{ઉકેલ : } 81^{\sin^2\theta} + 81^{1-\sin^2\theta} = 30$$

$$\therefore 81^{\sin^2\theta} + \frac{81}{81^{\sin^2\theta}} = 30$$

$$\text{ધારો કે } 81^{\sin^2\theta} = x$$

$$\therefore x + \frac{81}{x} = 30$$

$$\therefore x^2 - 30x + 81 = 0$$

$$\therefore x = 27 \quad \text{અથવા } x = 3$$

$$\therefore 81^{\sin^2\theta} = 27 \quad \text{અથવા } 81^{\sin^2\theta} = 3. \quad \text{આથી } 3^{4\sin^2\theta} = 3^3 \quad \text{અથવા } 3^{4\sin^2\theta} = 3$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{3}{4} \quad \text{અથવા } \sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{અથવા } \sin\theta = \pm\frac{1}{2}$$

$$\text{પરંતુ } \theta \in [0, \pi] \quad \text{હોવાથી } \sin\theta \geq 0$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \quad \text{અને } \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{જવાબ : (A), (B), (C), (D)}$$

$$(138) \quad \text{સમીકરણ } x^3 - \frac{3}{4}x = -\frac{\sqrt{3}}{8} \quad \text{નું સમાધાન } \dots\dots \quad \text{કરે છે.}$$

$$(A) \quad \cos\frac{5\pi}{18}$$

$$(B) \quad \cos\frac{7\pi}{18}$$

$$(C) \quad \cos\left(\frac{23\pi}{18}\right)$$

$$(D) \quad \cos\left(\frac{17\pi}{18}\right)$$

$$\text{ઉકેલ : } x^3 - \frac{3}{4}x = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore 4x^3 - 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ધારો કે } x = \cos\theta. \quad \text{આથી, } 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos 3\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & \therefore 3\theta &= 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \\ \therefore \cos 3\theta &= \cos \frac{5\pi}{6} & \therefore \theta &= \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18}, k \in Z \end{aligned}$$

$$k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{18}$$

$$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18} \Rightarrow \theta = \frac{17\pi}{18} \text{ અથવા } \theta = \frac{7\pi}{18}$$

$$k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18} \Rightarrow \theta = \frac{29\pi}{18} \text{ અથવા } \theta = \frac{19\pi}{18}$$

$$\therefore k > 2 \text{ માટે } \theta \neq \frac{23\pi}{8} \text{ શક્ય નથી.}$$

$$\therefore (C) \text{ શક્ય નથી. } \left(\because \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18} = \frac{17\pi}{18} \Rightarrow \frac{2k\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ અથવા } \frac{11\pi}{9} \right) \text{ જવાબ : (A), (B), (D)}$$

(139) નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા સંમેય છે ?

$$(A) \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$(B) \operatorname{cosec}\left(\frac{9\pi}{10}\right)\sec\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$(C) \sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$(D) \left(1 + \cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(1 + \cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(1 + \cos\frac{8\pi}{9}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{ઉદા : (A) } \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right] = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{6}\right] = \frac{1}{4}. \text{ અર્થાત્, (A) શક્ય છે.} \end{aligned}$$

$$(B) \operatorname{cosec}\left(\frac{9\pi}{10}\right)\sec\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \operatorname{cosec}\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)\sec\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{10}\sec\frac{\pi}{5} = \frac{-1}{\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-1}{\sin 18^\circ \cos 36^\circ} = \frac{1}{-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)} = -4 \in \mathbb{Q}$$

$$\therefore (B) \text{ શક્ય છે.}$$

$$(C) \sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$$

$$(D) \left(1 + \cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(1 + \cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(1 + \cos\frac{8\pi}{9}\right) = \left(2\cos^2\frac{\pi}{9}\right)\left(2\cos^2\frac{2\pi}{9}\right)\left(2\cos^2\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$= 8(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2$$

$$= 8\left[\frac{1}{2\sin 20^\circ}(2\sin 20^\circ \cos 20^\circ)\cos 40^\circ \cos 80^\circ\right]^2$$

$$= 8\left[\left\{\frac{1}{2\sin 20^\circ}2\sin 40^\circ \cos 40^\circ\right\}\frac{\cos 80^\circ}{2}\right]^2$$

$$= 8\left[\frac{1}{4\sin 20^\circ}(\sin 80^\circ \cos 80^\circ)\right]^2$$

$$= 8\left[\frac{1}{8\sin 20^\circ}(2\sin 80^\circ \cos 80^\circ)\right]^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}\right]^2 = \frac{1}{8} \in \mathbb{Q} \text{ જવાબ : (A), (B), (C), (D)}$$

(140) નીચેનામાંથી કયા અંતરાલ માટે $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8}$ સત્ય છે ?

- (A) $\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ (B) $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)$ (C) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right)$

ઉકેલ : $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x > \frac{5}{8}$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x \cos^2 x < \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(4\sin^2 x \cos^2 x) < \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin^2 2x < \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x < 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 2x > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x > 0$$

(A) $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} < 4x < \frac{\pi}{2}$ જ્યાં $\cos 4x$ ધન છે.

(B) $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 4x < \frac{5\pi}{2}$ પ્રથમ તથા ચોથું ચરણ જ્યાં $\cos 4x$ ધન છે.

(C) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \pi < 4x < 3\pi$ જ્યાં $\cos 4x$ ધન અથવા ઋણ છે.

$\therefore$ (C) સ્વીકાર્ય નથી.

(D) $\frac{7\pi}{8} < x < \frac{9\pi}{8} \Rightarrow \frac{7\pi}{2} < 4x < \frac{9\pi}{2}$

જે પ્રથમ તથા ચોથું ચરણ છે, જ્યાં $\cos 4x$ ધન છે.

જવાબ : (A), (B), (D)

(141) $f(x) = \log\left(\log_{\frac{1}{3}}(\log_7(\sin x + a))\right)$ પ્રત્યેક $x \in \mathbb{R}$ માટે અસત્ય હોય, તો $a = \dots$

- (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 4

ઉકેલ : $\log_{\frac{1}{3}}(\log_7(\sin x + a)) > 0$ જરૂરી છે.

$$\Rightarrow 0 < \log_7(\sin x + a) < 1$$

$$\Rightarrow 1 < \sin x + a < 7$$

$$\Rightarrow 1 - a < \sin x < 7 - a \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -1 < 1 - a < \sin x < 7 - a < 1 \text{ હોય તે શક્ય છે.}$$

$$\Rightarrow a < 2 \text{ અને } a > 6. \text{ આથી, } a \text{ નું મૂલ્ય શક્ય નથી.}$$

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

(142) $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ માટે $x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \phi$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} \phi$, $z = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \phi \sin^{2n} \phi$, હોય તો

નીચેનામાંથી કયો સંબંધ વ્યાખ્યાયિત થાય ?

[IIT 1992]

- (A) $xyz = xz + y$ (B) $xyz = xy + z$ (C) $xyz = x + y + z$ (D) $xyz = yz + x$

$$\text{ઉકેલ : } x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \phi = 1 + \cos^2 \phi + \cos^4 \phi + \dots = \frac{1}{1 - \cos^2 \phi} = \frac{1}{\sin^2 \phi}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} \phi = 1 + \sin^2 \phi + \sin^4 \phi + \dots = \frac{1}{1 - \sin^2 \phi} = \frac{1}{\cos^2 \phi}$$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}\phi \sin^{2n}\phi = 1 + \sin^2\phi \cos^2\phi + \dots = \frac{1}{1 - \sin^2\phi \cos^2\phi}$$

$$\text{ଏଠା, } \sin^2\phi = \frac{1}{x}, \cos^2\phi = \frac{1}{y}$$

$$\therefore z = \frac{1}{1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \Rightarrow z = \frac{xy}{xy - 1}$$

$$\Rightarrow xyz - z = xy$$

$$\Rightarrow xyz = xy + z$$

(1)

ଓଝେ (B) ଶୁଦ୍ଧ ଯେ.

$$x + y = \frac{1}{\sin^2\phi} + \frac{1}{\cos^2\phi} = \frac{1}{\sin^2\phi \cos^2\phi}$$

$$\therefore x + y = xy$$

(2)

ଆଉ (1) + (2) ଧରାଉ,

$$x + y + xy + z = xy + xyz$$

$$\therefore x + y + z = xyz$$

ଞ୍ଜାଲ : (B), (C)

$$(143) f_n(\theta) = \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)(1 + \sec\theta)(1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 4\theta) \dots (1 + \sec 2^n\theta) \quad [\text{IIT : 1999}]$$

$$(A) f_2\left(\frac{\pi}{16}\right) = 1$$

$$(B) f_3\left(\frac{\pi}{32}\right) = 1$$

$$(C) f_4\left(\frac{\pi}{64}\right) = 1$$

$$(D) f_5\left(\frac{\pi}{128}\right) = 1$$

$$\text{ଓଝେ : } f_n(\theta) = \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)(1 + \sec\theta)(1 + \sec 2\theta) \dots (1 + \sec 2^n\theta)$$

$$= \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \left[\left(\frac{1 + \cos\theta}{\cos\theta}\right) \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{\cos 2\theta}\right) \dots \left(\frac{1 + \cos 2^n\theta}{\cos 2^n\theta}\right) \right]$$

$$= \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \left[\frac{2\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos\theta} \cdot \frac{2\cos^2\theta}{\cos 2\theta} \dots \frac{2\cos 2^{n-1}\theta}{\cos 2^n\theta} \right]$$

$$= \left(\frac{2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos\theta} \right) \cdot \frac{2\cos^2\theta}{\cos 2\theta} \dots \frac{2\cos 2^{n-1}\theta}{\cos 2^n\theta}$$

$$= \left(\frac{\tan\theta \cdot 2\cos^2\theta}{\cos 2\theta} \right) \dots \frac{2\cos 2^{n-1}\theta}{\cos 2^n\theta}$$

$$= \tan 2\theta \dots \frac{2\cos 2^{n-1}\theta}{\cos 2^n\theta} = \tan 2^n\theta$$

$$(A) f_2\left(\frac{\pi}{16}\right) = \tan \frac{4\pi}{16} = 1$$

$$(B) f_3\left(\frac{\pi}{32}\right) = \tan \frac{8\pi}{32} = 1$$

$$(C) f_4\left(\frac{\pi}{64}\right) = \tan \frac{16\pi}{64} = 1$$

$$(D) f_5\left(\frac{\pi}{128}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

ଞ୍ଜାଲ : (A), (B), (C), (D)

(144) $4\sin^4x + \cos^4x = 1$ à $x = \dots, n \in Z$

(A) $n\pi$ (B) $n\pi \pm \sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{5}}$ (C) $\frac{2n\pi}{3}$ (D) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : $4\sin^4x + \cos^4x = 1$

$\therefore 4\sin^4x = 1 - \cos^4x$

$\therefore 4\sin^4x = (1 - \cos^2x)(1 + \cos^2x)$

$\therefore 4\sin^4x = \sin^2x(2 - \sin^2x)$

$\therefore \sin^2x(5\sin^2x - 2) = 0$

$\therefore \sin x = 0$ અથવા $\sin x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\therefore x = n\pi, n \in Z$ અથવા $x = n\pi \pm \sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{5}}$

જવાબ : (A), (B)

(145) $\sin^3\theta + \sin\theta \cos\theta + \cos^3\theta = 1$ à $\theta = \dots, (n \in Z)$

(A) $2n\pi$ (B) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (C) $2n\pi - \frac{\pi}{2}$ (D) $n\pi$

ઉકેલ : $\sin^3\theta + \cos^3\theta + \sin\theta \cos\theta - 1 = 0$

$\therefore (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta \cos\theta + \cos^2\theta) - (1 - \sin\theta \cos\theta) = 0$

$\therefore (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta \cos\theta) - (1 - \sin\theta \cos\theta) = 0$

$\therefore (1 - \sin\theta \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta - 1) = 0$

સીધામુખી બીજાં છે $\sin\theta \cos\theta = 1$

$\therefore 2\sin\theta \cos\theta = 2$

$\therefore \sin 2\theta = 2$ શક્ય નથી.

$\therefore \sin\theta + \cos\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\theta + \cos\theta = 1$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in Z$

$\therefore \theta = 2n\pi, n \in Z$ અથવા $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in Z$

જવાબ : (A), (B)

(146) $\sin x + \cos x = \sqrt{y + \frac{1}{y}}$ છે, à $x = \dots, y = \dots x \in [0, \pi]$

(A) $y = 0$ (B) $y = 1$ (C) $x = \frac{3\pi}{4}$ (D) $x = \frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : $\sin x + \cos x = \sqrt{y + \frac{1}{y}}$ આપેલ છે. $x \in [0, \pi]$

$\therefore y + \frac{1}{y} = (\sqrt{y})^2 - 2 + \frac{1}{(\sqrt{y})^2} + 2 = \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + 2 \geq 2$

$\therefore \sqrt{y + \frac{1}{y}} \geq \sqrt{2}$

$\therefore \sin x + \cos x \geq \sqrt{2}$. પરંતુ $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$

$\therefore \sin x + \cos x = \sqrt{2}$

(A) $y = 0$ શક્ય નથી.

(B) $y = 1$ લેતાં, $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ મળે છે. આથી, (B) શક્ય છે.

(C) $x = \frac{3\pi}{4}$ લેતાં, $\sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = 0 \neq \sqrt{2}$

$\therefore$ (C) શક્ય નથી.

(D) $x = \frac{\pi}{4}$ લેતાં, $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ થાય છે.

જવાબ : (B), (D)

(147) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 6x - x^2 - 11$, $0 \leq \theta \leq 4\pi$, $x \in \mathbb{R}$, x તથા θ ની કેટલી કિંમતો માટે શક્ય છે ?

(A) કોઈપણ x , θ માટે શક્ય નથી.

(B) x ની એક કિંમત માટે, θ ની બે કિંમતો માટે

(C) x ની બે કિંમતો માટે, θ ની બે કિંમતો માટે

(D) (x, θ) ની બે કમયુક્ત જોડ માટે

ઉકેલ : $f(\theta) = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ લેતાં, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$

$r^2 = a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow r = 2$. આથી વિસ્તાર $[-2, 2]$ છે.

$\therefore -2 \leq 6x - x^2 - 11 \leq 2$

$\therefore x^2 - 6x + 9 \leq 0$ અને $x^2 - 6x + 13 \geq 0$

$\therefore x^2 - 6x + 13 \geq 0$ અને $(x - 3)^2 \leq 0$

$\therefore x^2 - 6x + 9 + 4 \geq 0$ અને $x = 3$

$\therefore (x - 3)^2 + 4 \geq 0$ અને $x = 3$

$\therefore x = 3$

$\therefore \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = -2$

$\therefore \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = -1$

$\therefore \sin \theta \sin \frac{\pi}{6} + \cos \theta \cos \frac{\pi}{6} = -1$

$\therefore \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = -1$

$\therefore \theta - \frac{\pi}{6} = \pi$ અથવા 3π

આથી $x = 3$, $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$

$(0 \leq \theta \leq 4\pi)$

જવાબ : (B), (D)

(148) $\sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$ ને $x \in [0, n\pi]$ માટે ચાર ભિન્ન ઉકેલ મળે છે તો $n = \dots$

(A) 5

(B) 3

(C) 4

(D) 6

ઉકેલ : $\sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$

$\therefore \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 2$

$\therefore (\sin x - 1)^2 = 2$

$\therefore \sin x - 1 = \pm \sqrt{2}$

$\therefore \sin x = 1 \pm \sqrt{2}$

$\sin x = 1 + \sqrt{2}$ શક્ય નથી.

$\therefore \sin x = 1 - \sqrt{2} < 0$

$[0, 2\pi]$ માં બે ઉકેલ તથા $[2\pi, 4\pi]$ માં બે ઉકેલ મળે.

આમ, $[0, 4\pi]$ માં ચાર ઉકેલ મળે.

$\therefore n = 4$

હવે, $[0, 5\pi]$ માં પણ ચાર ઉકેલ મળે.

$n = 5$ પણ શક્ય છે.

જવાબ : (C), (A)

(149) $x + y = \frac{\pi}{4}$ અને $\tan x + \tan y = 1$, ($n \in \mathbb{Z}$) હોય, તો સત્ય બને.

(A) $\sin x = 0$, $\forall x$

(B) $x = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = -n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

(C) $x = n\pi \Rightarrow y = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

(D) $x = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = n\pi - \frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : $\tan x + \tan y = 1$

$$\therefore \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = 1$$

$$\therefore \sin(x + y) = \cos x \cos y$$

$$\therefore 2\sin(x + y) = 2\cos x \cos y$$

$$\therefore 2\sin(x + y) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$$

$$\therefore 2\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} + \cos(x - y)$$

$$\therefore \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(x - y)$$

$$\therefore \cos(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x - y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

હવે, $x + y = \frac{\pi}{4}$ આપેલ છે. (2)

(1) અને (2)નો સરવાળો કરતાં,

$$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 2x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ અથવા } 2x = 2n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = n\pi + \frac{\pi}{4} \text{ અથવા } x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

(i) જો $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ તો $\tan y = 0$

કારણ કે $\tan x = 1$. આથી $y = -n\pi$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

(ii) જો $x = n\pi$ તો $\tan y = 1$

$$\therefore y = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \text{ જવાબ : (B), (C)}$$

(150) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ હોય તો સમીકરણ $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$ નું સમાધાન x ની કઈ કિંમતો માટે શક્ય બને ?

(A) $\frac{\pi}{12}$

(B) $\frac{5\pi}{12}$

(C) $\frac{7\pi}{24}$

(D) $\frac{11\pi}{36}$

ઉકેલ : $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}-1}{(2\sqrt{2})\sin x} + \frac{(\sqrt{3}+1)}{\cos x(2\sqrt{2})} = 2$$

$$\therefore \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\sin x} + \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\cos x} = 2$$

$$\therefore \cos x \sin \frac{\pi}{12} + \sin x \cos \frac{\pi}{12} = 2\sin x \cos x$$

$$\therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin 2x$$

(નોંધ : અહીંથી પ્રત્યક્ષ રીતે આપેલ x નાં મૂલ્યો મૂકી ચકાસી શકાય)

$$\therefore x + \frac{\pi}{12} = 2x \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$$

$$\left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

હવે, $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$

$$\therefore 2x = \pi - x - \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore 3x = \frac{11\pi}{12}$$

$$\therefore x = \frac{11\pi}{36}$$

જવાબ : (A), (D)

(151) જો $\frac{\tan x}{1} = \frac{\tan y}{2} = \frac{\tan z}{3} (\neq 0)$ અને $x + y + z = \pi$ હોય, તો

(A) $\tan x + \tan y + \tan z$ ની મહત્તમ કિંમત 6 છે. (B) $\tan x + \tan y + \tan z$ ની ન્યૂનતમ કિંમત -6 છે.

(C) $\tan x = \pm 1, \tan y = \pm 2, \tan z = \pm 3$

(D) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \tan x + \tan y + \tan z = 0$

ઉકેલ : $\frac{\tan x}{1} = \frac{\tan y}{2} = \frac{\tan z}{3} = k \Rightarrow \tan x = k, \tan y = 2k, \tan z = 3k$

હવે, $x + y + z = \pi$

$\therefore \tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$

$\therefore k + 2k + 3k = (k)(2k)(3k)$

$\therefore 6k = 6k^3$

$\therefore 6k^3 - 6k = 0$

$\therefore 6k(k^2 - 1) = 0$

$\therefore k = 0$ અથવા $k = \pm 1$. પરંતુ $k \neq 0$.

$\therefore \tan x + \tan y + \tan z \neq 0$

$\therefore k = \pm 1$

$\therefore \tan x = \pm 1, \tan y = \pm 2, \tan z = \pm 3$

$\therefore \tan x + \tan y + \tan z$ મહત્તમ કિંમત = 6

$\therefore \tan x + \tan y + \tan z$ ન્યૂનતમ કિંમત = -6

જવાબ : (A), (B), (C)

(152) $\cos \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{5}{13}, 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$

(A) $\cos(\alpha + \beta) = \frac{33}{65}$ (B) $\sin(\alpha + \beta) = \frac{56}{65}$ (C) $\sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1}{65}$ (D) $\cos(\alpha - \beta) = \frac{63}{65}$

ઉકેલ : $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ હોવાથી $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \beta = \frac{5}{13}$ હોવાથી $\sin \beta = \frac{12}{13}$

$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = -\frac{33}{65}$

$\therefore$ (A) સત્ય નથી.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{56}{65}$

$\therefore$ (B) સત્ય છે.

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{63}{65}$

$\therefore$ (D) સત્ય છે.

$\sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{2} = \frac{1 - \frac{63}{65}}{2} = \frac{1}{65}$

$\therefore$ (C) સત્ય છે.

જવાબ : (B), (C), (D)

(153) $\sin^6 x + \cos^6 x = a^2$ ને વાસ્તવિક ઉકેલ હોય, તો $a \in$

(A) $[-1, 1]$

(B) $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$

(C) $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

(D) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

ઉકેલ : $\sin^6 x + \cos^6 x = a^2$

$\therefore 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = a^2$

$$\therefore \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1-a^2}{3}$$

$$\therefore \frac{4\sin^2 x \cos^2 x}{4} = \frac{1-a^2}{3}$$

$$\therefore \sin^2 2x = \frac{4(1-a^2)}{3}. \text{ એ } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq \frac{4(1-a^2)}{3} \leq 1. \text{ આથી, } 0 \leq 4 - 4a^2 \leq 3$$

$$\therefore -4 \leq -4a^2 \leq -1. \text{ આથી, } 4 \geq 4a^2 \geq 1$$

$$\therefore \frac{1}{4} \leq a^2 \leq 1. \text{ આથી, } |a| \leq 1 \text{ તથા } |a| \geq \frac{1}{2}$$

$$\therefore a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ અથવા } a \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$$

જવાબ : (B), (D)

(154) $\sin\theta + \sin\phi = a$ અને $\cos\theta + \cos\phi = b$ ($b \neq 0$) હોય, તો

(A) $\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

(B) $\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$

(C) $\tan\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

(D) $\cos(\theta - \phi) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$

ઉકેલ : $\sin\theta + \sin\phi = a$ અને $\cos\theta + \cos\phi = b$ છે.

$$\therefore 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = a \text{ અને } 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = b$$

$$4\sin^2\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = a^2 + b^2$$

$$\therefore 4\cos^2\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = a^2 + b^2$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \text{(A) સત્ય છે.}$$

$$\text{એ } \cos(\theta - \phi) = 2\cos^2\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) - 1 = \frac{2}{4}(a^2 + b^2) - 1 = \frac{a^2+b^2-2}{2}$$

$$\therefore \text{(D) સત્ય છે.}$$

$$\text{એ } \tan^2\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta-\phi)}{1+\cos(\theta-\phi)} = \frac{1-\left(\frac{a^2+b^2-2}{2}\right)}{1+\left(\frac{a^2+b^2-2}{2}\right)} = \frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

$$\therefore \text{(C) સત્ય છે.}$$

જવાબ : (A), (C), (D)

$$(155) \quad \frac{3 + \cot 76^\circ \cot 16^\circ}{\cot 76^\circ + \cot 16^\circ} = \dots\dots$$

$$(A) \tan 16^\circ$$

$$(B) \cot 76^\circ$$

$$(C) \tan 46^\circ$$

$$(D) \cot 44^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \frac{3 + \cot 76^\circ \cot 16^\circ}{\cot 76^\circ + \cot 16^\circ} &= \frac{3 + \frac{\cos 76^\circ \cos 16^\circ}{\sin 76^\circ \sin 16^\circ}}{\frac{\cos 76^\circ}{\sin 76^\circ} + \frac{\cos 16^\circ}{\sin 16^\circ}} \\ &= \frac{3 \sin 76^\circ \sin 16^\circ + \cos 76^\circ \cos 16^\circ}{\sin(76^\circ + 16^\circ)} \\ &= \frac{2 \sin 76^\circ \sin 16^\circ + (\cos 76^\circ \cos 16^\circ + \sin 76^\circ \sin 16^\circ)}{\sin 92^\circ} \\ &= \frac{2 \sin 76^\circ \sin 16^\circ + \cos(76^\circ - 16^\circ)}{\sin 92^\circ} \\ &= \frac{-\cos 92^\circ + \cos 60^\circ + \cos 60^\circ}{\sin 92^\circ} \\ &= \frac{1 - \cos 92^\circ}{\sin 92^\circ} = \frac{2 \sin^2 46^\circ}{2 \sin 46^\circ \cos 46^\circ} = \tan 46^\circ = \cot 44^\circ \quad \text{જવાબ : (C), (D)} \end{aligned}$$

$$(156) \quad \tan \theta = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \quad \text{હોય, તો } \dots\dots$$

$$(A) \sin \alpha - \cos \alpha = \pm \sqrt{2} \sin \theta$$

$$(B) \sin \alpha + \cos \alpha = \pm \sqrt{2} \cos \theta$$

$$(C) \cos 2\theta = \sin 2\alpha$$

$$(D) \sin 2\theta + \cos 2\alpha = 0$$

$$\text{ઉકેલ : (i) } \tan \theta = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta &= \tan \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \\ \therefore \theta &= k\pi + \alpha - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \therefore 2\theta &= 2k\pi + 2\alpha - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \therefore \sin 2\theta &= \sin \left(2k\pi + 2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \\ \therefore \sin 2\theta &= \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \\ \therefore \sin 2\theta &= -\cos 2\alpha. \end{aligned} \right. \quad \text{આથી, (D) સત્ય છે.}$$

$$(ii) \cos 2\theta = \cos \left(2k\pi + 2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \cos 2\theta = \cos \left(-\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right)$$

$$\therefore \cos 2\theta = \sin 2\alpha$$

$$\therefore (C) \text{ સત્ય છે.}$$

$$\begin{aligned} \text{હવે, } \sin \alpha - \cos \alpha &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin(\theta - k\pi) \quad ((1) \text{ પરથી}) \\ &= \pm \sqrt{2} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\therefore (A) \text{ સત્ય છે.}$$

$$\text{હવે, } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos(\theta - k\pi) = \pm \sqrt{2} \cos \theta$$

$$\therefore (B) \text{ સત્ય છે.}$$

$$\text{જવાબ : (A), (B), (C), (D)}$$

(157) જો ΔABC માં $m\angle A = 90^\circ$, c , $\sin B$, $\cos B$ સંમેય સંખ્યા હોય, તો

- (A) a સંમેય છે. (B) a અસંમેય છે. (C) b સંમેય છે. (D) b અસંમેય છે.

ઉકેલ : ΔABC માં $\cos B = \frac{c}{a}$

$$\therefore a = \frac{c}{\cos B}$$

હવે, c અને $\cos B$ સંમેય આપેલ છે.

$\therefore a$ સંમેય છે.

$$\sin B = \frac{b}{a}$$

$$\therefore a = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = a \sin B$$

a અને $\sin B$ સંમેય છે.

$\therefore b$ સંમેય છે.

જવાબ : (A), (C)

(158) $\cos x + \sec x = -2$ તો ધન પૂર્ણાંક n માટે $\cos^n x + \sec^n x = \dots$

- (A) 2, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (B) -2, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (C) -2, n અયુગ્મ (D) 2, n યુગ્મ

ઉકેલ : $\cos x + \sec x = -2$

$$\therefore \cos x + \frac{1}{\cos x} = -2 \quad \left| \quad \therefore (\cos x + 1)^2 = 0 \right.$$

$$\therefore \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \quad \left| \quad \therefore \cos x = -1 \text{ અને } \sec x = (-1) \right.$$

$$\cos^n x + \sec^n x = (-1)^n + (-1)^n$$

જો n યુગ્મ તો $\cos^n x + \sec^n x = 2$ તથા n અયુગ્મ તો $\cos^n x + \sec^n x = -2$

જવાબ : (C), (D)

(159) $\left(\frac{\sin \theta}{\sin \phi} \right)^2 = \frac{\tan \theta}{\tan \phi} = 3$ હોય, તો

- (A) $\tan \phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\tan \phi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\tan \theta = \sqrt{3}$ (D) $\tan \theta = -\sqrt{3}$

ઉકેલ : $\left(\frac{\sin \theta}{\sin \phi} \right)^2 = \frac{\tan \theta}{\tan \phi}$

$$\therefore \left(\frac{\sin \theta}{\sin \phi} \right)^2 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \cdot \text{અથવા } \sin \theta \cos \theta = \sin \phi \cos \phi$$

$$\therefore \sin 2\theta = \sin 2\phi$$

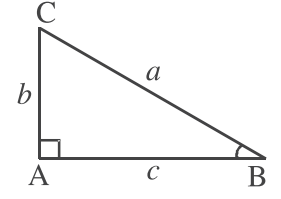
$$\therefore \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2 \tan \phi}{1 + \tan^2 \phi}$$

$$\therefore \frac{6 \tan \phi}{1 + 9 \tan^2 \phi} = \frac{2 \tan \phi}{1 + \tan^2 \phi}$$

$$(\tan \theta = 3 \tan \phi)$$

$$\therefore 3(1 + \tan^2 \phi) = 1 + 9 \tan^2 \phi$$

$$(\tan \phi \neq 0)$$



આકૃતિ 12.16

$$\therefore 6\tan^2\phi = 2. \text{ અથવા } \tan^2\phi = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan\phi = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ તથા } \tan\theta = \pm\sqrt{3}$$

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

$$(160) \quad x = a\cos^3\theta \sin^2\theta \text{ અને } y = a\sin^3\theta \cos^2\theta \text{ માટે } \frac{(x^2 + y^2)^p}{(xy)^q} \quad (p, q \in \mathbb{N}) \text{ થી સ્વતંત્ર હોય, તો } \dots$$

$$(A) p = 4$$

$$(B) p = 5$$

$$(C) q = 4$$

$$(D) q = 5$$

ઉકેલ : $x = a\cos^3\theta \sin^2\theta$ અને $y = a\sin^3\theta \cos^2\theta$ અપેક્ષા છે.

$$\therefore (x^2 + y^2) = a^2\cos^6\theta \sin^4\theta + a^2\sin^6\theta \cos^4\theta = a^2\cos^4\theta \sin^4\theta$$

$$\therefore \frac{(x^2 + y^2)^p}{(xy)^q} = \frac{(a^2 \cos^4\theta \sin^4\theta)^p}{(a^2 \cos^5\theta \cdot \sin^5\theta)^q} \text{ એ } \theta \text{ થી સ્વતંત્ર છે.}$$

$$\therefore \cos \text{ નો ઘાતિક } = 0 \text{ અને } \sin \text{ નો ઘાતિક } = 0$$

$$\therefore 4p - 5q = 0$$

$$\therefore p = 5 \text{ અને } q = 4 \text{ લઈએ, તો } 4p - 5q = 0 \text{ થાય.}$$

જવાબ : (B), (C)

$$(161) \quad 0 \leq x \leq 2\pi \text{ માટે } 2^{\csc^2 x} \sqrt{\frac{1}{2}y^2 - y + 1} \leq \sqrt{2} \text{ નું } \dots$$

(A) y ની માત્ર એક જ કિંમત સમાધાન કરે છે.

(B) x ની બે કિંમતો સમાધાન કરે છે.

(C) $\cos x = 0$ માટે સમાધાન થાય.

(D) $\sin x = 0$ માટે સમાધાન થાય.

$$\text{ઉકેલ : } 2^{\csc^2 x} \sqrt{\frac{y^2 - 2y + 2}{2}} \leq \sqrt{2}$$

$$\therefore 2^{\csc^2 x} \sqrt{y^2 - 2y + 1 + 1} \leq 2$$

$$\therefore 2^{\csc^2 x} \sqrt{(y-1)^2 + 1} \leq 2 \quad (1)$$

$$\text{હવે, } 2^{\csc^2 x} \geq 2 \text{ તથા } \sqrt{(y-1)^2 + 1} \geq 1 \text{ હોવાથી,} \quad (2)$$

$$2^{\csc^2 x} \sqrt{(y-1)^2 + 1} \geq 2 \text{ મળે.} \quad (3)$$

$$\therefore 2^{\csc^2 x} \sqrt{(y-1)^2 + 1} = 2 \quad ((1) \text{ અને } (3) \text{ પરથી})$$

હવે, (2) પરથી સ્પષ્ટ છે.

$$\csc^2 x = 1 \text{ અને } \sqrt{(y-1)^2 + 1} = 1$$

$$\therefore \sin^2 x = 1 \text{ અને } (y-1)^2 + 1 = 1$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ તથા } y = 1$$

$\therefore y$ ની માત્ર એક જ કિંમત સમાધાન કરે છે.

તથા $\cos x = 0$ માટે સમીકરણનું સમાધાન થાય.

$\therefore$ (A) અને (C) ઉકેલ છે.

હવે, $\cos x = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$. અર્થાત્, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\therefore x$ ની બે કિંમતો સમાધાન કરે છે.

આથી (B) પણ ઉકેલ છે.

જવાબ : (A), (B), (C)

(162) $S_n = \cot^{-1}(3) + \cot^{-1}(7) + \cot^{-1}(13) + \cot^{-1}(21) + \dots + n$ પદ સુધી હોય, તો

(A) $S_{10} = \tan^{-1} \frac{5}{6}$

(B) $S_6 = \sin^{-1} \frac{3}{5}$

(C) અનંત પદ સુધી $S = \frac{\pi}{4}$

(D) $S_{20} = \cot^{-1} \left(\frac{11}{10} \right)$

ઉકેલ : $S_n = \cot^{-1} 3 + \cot^{-1} 7 + \cot^{-1} 13 + \dots + n$ પદ સુધી

$$= \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{13} + \dots + n \text{ પદ સુધી}$$

$$= \tan^{-1} \frac{1}{1+1 \cdot 2} + \tan^{-1} \frac{1}{1+2 \cdot 3} + \tan^{-1} \frac{1}{1+3 \cdot 4} + \dots + n \text{ પદ સુધી}$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{2-1}{1+1 \cdot 2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{3-2}{1+2 \cdot 3} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{4-3}{1+3 \cdot 4} \right) + \dots + \tan^{-1} \left(\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n} \right)$$

$$= \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 3 - \tan^{-1} 2 + \dots + \tan^{-1} n - \tan^{-1} (n-1) + \tan^{-1} (n+1) - \tan^{-1} n$$

$$S_n = \tan^{-1} (n+1) - \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

હવે (1) માં $n = 10$ લેતાં,

$$S_{10} = \tan^{-1} 11 - \tan^{-1} 1 = \tan^{-1} \left(\frac{11-1}{1+11} \right) = \tan^{-1} \frac{5}{6}$$

$\therefore$ (A) સત્ય છે.

(1) માં $n \rightarrow \infty$ લેતાં,

$$S_{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ (C) સત્ય છે.

(1) માં $n = 6$ લેતાં,

$$S_6 = \tan^{-1} 7 - \tan^{-1} 1$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{7-1}{1+7} \right) = \tan^{-1} \frac{3}{4} = \sin^{-1} \frac{3}{5}$$

$\therefore$ (B) સત્ય છે.

(1) માં $n = 20$ લેતાં,

$$S_{20} = \tan^{-1} 21 - \tan^{-1} 1$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{21-1}{1+21} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{10}{11} \right) = \cot^{-1} \left(\frac{11}{10} \right)$$

$\therefore$ (D) સત્ય છે.

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

(163) $2\tan^{-1}(-2) = \dots\dots$

(A) $-\cos^{-1}\left(\frac{-3}{5}\right)$ (B) $-\pi + \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (C) $-\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$ (D) $-\pi + \cot^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$

ઉકેલ : $2\tan^{-1}(-2) = \tan^{-1}(-2) + \tan^{-1}(-2)$
 $= -[\tan^{-1}2 + \tan^{-1}2]$

$= -\left[\pi + \tan^{-1}\left(\frac{2+2}{1-4}\right)\right]$

$= -\left[\pi + \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$

$= -\pi + \tan^{-1}\frac{4}{3}$

(1)

$= -\pi + \cos^{-1}\frac{3}{5} = -\left(\pi - \cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = -\cos^{-1}\frac{3}{5}$

$\therefore$ (A) તથા (B) સત્ય છે.

હવે (1) પરથી

$-\pi + \tan^{-1}\frac{4}{3} = -\pi + \cot^{-1}\frac{3}{4} = -\pi + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{3}{4} = -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$

$\therefore$ (C) સત્ય છે.

જવાબ : (A), (B), (C)

(164) નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા ધન છે ?

(A) $\cos(\tan^{-1}(\tan 4))$ (B) $\sin(\cot^{-1}(\cot 4))$ (C) $\tan(\cos^{-1}(\cos 5))$ (D) $\cot(\sin^{-1}(\sin 4))$

ઉકેલ : $\tan 4 = \tan(4 - \pi)$

$\therefore \cos(\tan^{-1}(\tan 4)) = \cos(\tan^{-1}(\tan(4 - \pi))) = \cos(4 - \pi) > 0, \quad 0 < 4 - \pi < \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ (A)માં આપેલ સંખ્યા ધન છે.

હવે, $\sin(\cot^{-1}(\cot 4)) = \sin(\cot^{-1}(\cot(4 - \pi))) = \sin(4 - \pi) > 0$

$\therefore$ (B)માં આપેલ સંખ્યા ધન છે.

હવે, $\cos 5 = \cos(2\pi - 5)$

$\therefore \tan(\cos^{-1}(\cos 5)) = \tan(\cos^{-1}(\cos(2\pi - 5))) = \tan(2\pi - 5) > 0 \quad \left(0 < 2\pi - 5 < \frac{\pi}{2}\right)$

હવે, $\cot(\sin^{-1}(\sin 4)) = \cot(\sin^{-1}(-\sin(4 - \pi)))$

$= -\cot(4 - \pi)$ ઋણ છે, $0 < 4 - \pi < \frac{\pi}{2}$

જવાબ : (A), (B), (C)

(165) $z = \sec^{-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \sec^{-1}\left(y + \frac{1}{y}\right)$, તો z ની શક્ય કિંમતો છે. જ્યાં $xy < 0$

(A) $\frac{8\pi}{10}$

(B) $\frac{7\pi}{10}$

(C) $\frac{9\pi}{10}$

(D) $\frac{21\pi}{20}$

ઉકેલ : $xy < 0$

$\therefore x + \frac{1}{x} \geq 2, y + \frac{1}{y} \leq -2$ અથવા $x + \frac{1}{x} \leq -2$ અને $y + \frac{1}{y} \geq 2$

$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \sec^{-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$y + \frac{1}{y} \leq -2 \Rightarrow \sec^{-1}\left(y + \frac{1}{y}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\therefore z \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\frac{4\pi}{5} < \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{10} < \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} < \frac{9\pi}{10}, \frac{9\pi}{10} < \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6} < \frac{21\pi}{20} < \frac{7\pi}{6}$$

જવાબ : (C), (D)

(166) ΔABC માં $c \sin A < a < c$ હોય, તો (b_1 , b_2 એ b ની બે શક્યતાઓ છે.)

$$(A) b_1 + b_2 = 2c \cos A \quad (B) b_1 + b_2 = c \cos A \quad (C) b_1 b_2 = c^2 - a^2 \quad (D) b_1 b_2 = c^2 + a^2$$

$$\text{ઉકેલ : } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\therefore 2bccosA = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\therefore b^2 - 2bccosA + (c^2 - a^2) = 0 \text{ એ } b \text{ માં દ્વિઘાત સમીકરણ છે.}$$

$$\text{તેની બે બીજ } b_1 \text{ અને } b_2 \text{ છે. } b_1 + b_2 = 2ccosA, b_1 b_2 = c^2 - a^2$$

જવાબ : (A), (C)

(167) ΔABC માટે $2a^2 + 4b^2 + c^2 = 4ab + 2ca$ હોય, તો

(A) ΔABC સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ છે.

(B) ΔABC ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે.

$$(C) B = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$$

$$(D) A = \cos^{-1}\frac{1}{4}$$

$$\text{ઉકેલ : } 2a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 2ca = 0$$

$$\therefore a^2 - 4ab + 4b^2 + a^2 - 2ac + c^2 = 0$$

$$\therefore (a - 2b)^2 + (a - c)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2b \text{ અને } a = c$$

હવે, $a = c \Rightarrow \Delta ABC$ સમદ્વિભુજ છે.

(1)

$$a = 2b \text{ તથા લેતાં, } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4b^2 + 4b^2 - b^2}{8b^2} = \frac{7}{8} > 0$$

$$\therefore B = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right). \text{ આથી, } B \text{ લઘુકોણ છે.}$$

(2)

$$\text{અને } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{4} \text{ મળે. આથી, } A = \cos^{-1}\frac{1}{4}. \text{ આથી, } A, C \text{ લઘુકોણ છે.} \quad (3)$$

$$\therefore (A), (C), (D) \text{ ઉકેલ છે.}$$

જવાબ : (A), (C), (D)

(168) ΔABC માં $2a^2b^2 + 2b^2c^2 = a^4 + b^4 + c^4$ હોય, તો $B = \dots$

$$(A) \frac{\pi}{4}$$

$$(B) \frac{3\pi}{4}$$

$$(C) \frac{2\pi}{3}$$

$$(D) \frac{\pi}{3}$$

$$\text{ઉકેલ : } (a^2 - b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 + 2a^2c^2$$

$$\therefore (a^2 - b^2 + c^2)^2 = 2a^2c^2 \quad (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 = 0)$$

$$\therefore \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos B$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{4} \text{ અથવા } \frac{3\pi}{4}$$

જવાબ : (A), (B)

(169) જો કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો તેમના લઘુકોણ ખૂણાનાં $\cos$ મૂલ્યો હોય.

- (A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (C) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ (D) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

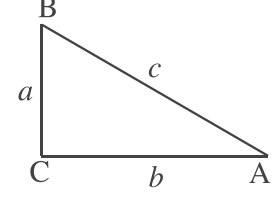
ઉકેલ : a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$$\therefore b^2 = ac \text{ તથા } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + ac$$

$$\therefore \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right) - 1 = 0. \text{ આથી, } \frac{a}{c} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ કારણ કે } a > 0, c > 0$$



આકૃતિ 12.17

$$\cos B = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ તથા } \cos A = \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \text{જવાબ : (A), (C)}$$

(170) ΔABC ની બાજુઓનાં માપ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, જ્યાં $a < \min \{b, c\}$ તો $\cos A$ માટે નીચેનામાંથી કઈ કિંમત હોઈ શકે ?

- (A) $\frac{4c-3b}{2b}$ (B) $\frac{4c-3b}{2c}$ (C) $\frac{3c-4b}{2}$ (D) $\frac{4b-3c}{2b}$

ઉકેલ : ΔABC ની ત્રણ બાજુનાં માપ a, b, c છે.

હવે, $a < \min \{b, c\}$

$\therefore$ (i) a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અથવા (ii) a, c, b સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

(i) જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો

$$a + c = 2b$$

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - (2b - c)^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 4b^2 + 4bc - c^2}{2bc} = \frac{4bc - 3b^2}{2bc} = \frac{4c - 3b}{2c} \end{aligned}$$

(ii) જો a, c, b સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો,

$$a + b = 2c$$

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - (2c - b)^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 4c^2 + 4bc - b^2}{2bc} = \frac{4bc - 3c^2}{2bc} = \frac{4b - 3c}{2b} \end{aligned}$$

જવાબ : (B), (D)

(171) ΔABC ની ત્રણ બાજુ a, b, c માટે $2b = a + c$ હોય, તો

- (A) $\frac{b}{c} > \frac{2}{3}$ (B) $\frac{b}{c} < \frac{3}{2}$ (C) $\frac{b}{c} > \frac{1}{3}$ (D) $\frac{b}{c} < 2$

ઉકેલ : $a + c = 2b$ આપેલ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, ΔABC માટે $a + b > c$ હોય.

$$\therefore 2b - c + b > c \quad (a = 2b - c)$$

$$\therefore 3b > 2c$$

$$\therefore \frac{b}{c} > \frac{2}{3} > \frac{1}{3} \quad (1)$$

હવે, $b + c > a$

$$\therefore b + c > 2b - c \quad (a = 2b - c)$$

$$\therefore 2c > b$$

$$\therefore \frac{b}{c} < 2 \quad (2)$$

જો $a + c > b$ હોય, તો $2b > b$ સત્ય જ છે.

જવાબ : (A), (C), (D)

(172) $(5 + 4\cos\theta)(2\cos\theta + 1) = 0$ નો $\theta \in [0, 2\pi]$ માં ઉકેલ હોઈ શકે.

- (A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{3}$

ઉકેલ : $(5 + 4\cos\theta)(2\cos\theta + 1) = 0$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{5}{4} \text{ અથવા } \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = -\frac{5}{4} < -1 \text{ શક્ય નથી. આથી } \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ તથા } \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

જવાબ : (A), (B)

(173) $\frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A} = \dots\dots$

[JEE : 2013]

- (A) $\sin A \cos A + 1$ (B) $\sec A \operatorname{cosec} A + 1$ (C) $\tan A + \cot A$ (D) $\sec A + \operatorname{cosec} A$

ઉકેલ : $\frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A}$

$$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{1 - \frac{\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{(\sin A - \cos A)\cos A} + \frac{\cos^2 A}{(\cos A - \sin A)\sin A}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{(\sin A - \cos A)\cos A} - \frac{\cos^2 A}{(\sin A - \cos A)\sin A}$$

$$= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{(\sin A - \cos A)\sin A \cos A}$$

$$= \frac{(\sin A - \cos A)(\sin^2 A + \sin A \cos A + \cos^2 A)}{(\sin A - \cos A)\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1 + \sin A \cos A}{\sin A \cos A} = 1 + \sec A \operatorname{cosec} A$$

જવાબ : (B)

$$(174) \quad \cot \left[\sum_{n=1}^{23} \cot^{-1} \left[1 + \sum_{k=1}^n 2k \right] \right] = \dots$$

[JEE Adv. : 2013]

(A) $\frac{23}{25}$

(B) $\frac{25}{23}$

(C) $\frac{23}{24}$

(D) $\frac{24}{23}$

ઉદા : $\cot \left[\sum_{n=1}^{23} \cot^{-1} \left[1 + \sum_{k=1}^n 2k \right] \right]$

$$= \cot \left[\sum_{n=1}^{23} \cot^{-1} (1 + n^2 + n) \right] \quad \left(\sum n = \frac{n}{2}(n+1) \right)$$

$$= \cot \left[\sum_{n=1}^{23} \tan^{-1} \left(\frac{1}{1+n(1+n)} \right) \right] = \cot \left[\sum_{n=1}^{23} \tan^{-1} \left(\frac{(1+n)-n}{1+n(1+n)} \right) \right]$$

$$= \cot \left[\sum_{n=1}^{23} \left(\tan^{-1} (1+n) - \tan^{-1} n \right) \right]$$

$$= \cot [(\tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1) + (\tan^{-1} 3 - \tan^{-1} 2) + \dots + (\tan^{-1} 24 - \tan^{-1} 23)]$$

$$= \cot [\tan^{-1} 24 - \tan^{-1} 1]$$

$$= \cot \left[\tan^{-1} \left(\frac{24-1}{1+24} \right) \right]$$

$$= \cot \left(\tan^{-1} \frac{23}{25} \right) = \frac{25}{23}$$

જવાબ : (B)

$$(175) \quad f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^k x + \cos^k x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \geq 1 \quad \text{હોય, તો } f_4(x) - f_6(x) = \dots$$

[JEE : 2014]

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{12}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{3}$

ઉદા : $f_4(x) - f_6(x)$

$$= \frac{1}{4}(\sin^4 x + \cos^4 x) - \frac{1}{6}(\cos^6 x + \sin^6 x)$$

$$= \frac{1}{4}[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] - \frac{1}{6}[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x]$$

$$= \frac{1}{4}[1 - 2\sin^2 x \cos^2 x] - \frac{1}{6}[1 - 3\sin^2 x \cos^2 x]$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin^2 x \cos^2 x - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

જવાબ : (B)

(176) સમીકરણ $f(x) = \sin(x^2) + \cos(x^2)$, $x \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]$ માં મહત્તમ બને તે માટે x ના મૂલ્યોની સંખ્યા હોય
[JEE Adv. : 2014]

- (A) 8 (B) 2 (C) 4 (D) 0

ઉકેલ : $f(x) = \sin(x^2) + \cos(x^2)$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x^2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x^2) \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\sin(x^2) \sin \frac{\pi}{4} + \cos(x^2) \cos \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\cos \left(x^2 - \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

મહત્તમ કિંમત માટે $\cos \left(x^2 - \frac{\pi}{4} \right) = 1$

$$x^2 = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{4}}, \pm \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \quad (x \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}])$$

ઉકેલની સંખ્યા = 4

જવાબ : (C)

(177) $\tan^{-1} \left(\frac{1}{2x+1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{4x+1} \right) = \tan^{-1} \frac{2}{x^2}$ ના ધન વાસ્તવિક ઉકેલોની સંખ્યા છે.

[JEE Adv. : 2014]

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $\tan^{-1} \left(\frac{1}{2x+1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{4x+1} \right) = \tan^{-1} \frac{2}{x^2}$

$$\therefore \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{4x+1}}{1 - \left(\frac{1}{2x+1} \right) \left(\frac{1}{4x+1} \right)} \right) = \tan^{-1} \frac{2}{x^2} \quad \left(x > 0, \frac{1}{2x+1} < 1, \frac{1}{4x+1} < 1 \right)$$

$$\therefore \tan^{-1} \left(\frac{4x+1+2x+1}{(2x+1)(4x+1)-1} \right) = \tan^{-1} \frac{2}{x^2}$$

$$\therefore \frac{6x+2}{8x^2+6x} = \frac{2}{x^2}$$

$$\therefore \frac{3x+1}{4x^2+3x} = \frac{2}{x^2}$$

$$\therefore 3x^3 + x^2 = 8x^2 + 6x$$

$$\therefore 3x^3 - 7x^2 - 6x = 0$$

$$\therefore x(3x^2 - 7x - 6) = 0$$

$$x > 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ અથવા } x = -\frac{2}{3}. \text{ પરંતુ } x > 0$$

$$\therefore x = 3$$

$\therefore$ માત્ર એક ધન ઉકેલ છે.

જવાબ : (A)

કારક અને નિષ્કર્ષ પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો અને બે વિધાનો આપેલાં હોય છે. વિધાન I નિષ્કર્ષ તથા વિધાન II કારક કહેવાય છે. વિકલ્પો (A), (B), (C) તથા (D) નીચે મુજબ હોય છે. (દા.નં. 178 થી 198)

- (A) વિધાન I અને વિધાન II બંને સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન I ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.
 (B) વિધાન I અને વિધાન II બંને સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન I ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.
 (C) વિધાન I સત્ય અને વિધાન II અસત્ય છે.
 (D) વિધાન I અસત્ય છે અને વિધાન II સત્ય છે.

(178) વિધાન I : $\cos 1 < \cos 7$

વિધાન II : $1 < 7$

ઉકેલ : $\cos 7 = \cos(2\pi - 7)$

$$2\pi - 7 < 1 \text{ કારણ કે } \pi < 4$$

$$\therefore \cos(7 - 2\pi) = \cos(2\pi - 7) > \cos 1 \quad (\cos \text{ પ્રથમ ચરણમાં ઘટતું વિધેય છે.})$$

$$\therefore \cos 7 > \cos 1$$

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે.

વિધાન II, $1 < 7$ સત્ય છે.

આમ, વિધાન I અને II બંને સત્ય છે, પરંતુ વિધાન II એ વિધાન I ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. જવાબ : (B)

(179) વિધાન I : $27^{\cos 2x} \cdot 81^{\sin 2x}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $\frac{1}{243}$ છે.

વિધાન II : $a \cos \theta + b \sin \theta$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $-\sqrt{a^2 + b^2}$ છે.

ઉકેલ : વિધાન I : $27^{\cos 2x} \cdot 81^{\sin 2x}$

વિધાન II : $f(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $-\sqrt{a^2 + b^2}$ છે જે સત્ય છે.

$$= 3^{3\cos 2x} \cdot 3^{4\sin 2x} = 3^{3\cos 2x + 4\sin 2x}$$

વિધાન I મુજબ $3\cos 2x + 4\sin 2x$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $= -\sqrt{a^2 + b^2} = -\sqrt{9 + 16} = -5$

$$\therefore 3^{3\cos 2x + 4\sin 2x} \text{ ની ન્યૂનતમ કિંમત } = 3^{-5} = \frac{1}{243} \text{ છે.}$$

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે.

આમ, વિધાન I અને II બંને સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(180) વિધાન I : $\tan 5^\circ$ અસંમેય સંખ્યા છે.

વિધાન II : $\tan 15^\circ$ અસંમેય સંખ્યા છે.

ઉકેલ : $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે. વિધાન II સત્ય છે.

$$\tan 15^\circ = \frac{3\tan 5^\circ - \tan^3 5^\circ}{1 - 3\tan^2 5^\circ}$$

જો $\tan 5^\circ$ સંમેય સંખ્યા હોય, તો $\tan 15^\circ$ પણ સંમેય થાય, તે સત્ય નથી.

$\therefore \tan 5^\circ$ અસંમેય સંખ્યા થાય.

$\therefore$ વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(181) વિધાન I : $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$

વિધાન II : $\sin x$ પ્રથમ અને બીજા ચરણમાં ધન છે.

ઉકેલ : વિધાન II $\sin x$ પ્રથમ અને બીજા ચરણમાં ધન છે સત્ય છે.

વિધાન I : $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$

$\sin 2 = \sin(\pi - 2)$

$0 < \pi - 3 < 1 < \pi - 2 < \frac{\pi}{2}$ કારણ કે $3 < \pi < 4$

પ્રથમ ચરણમાં $\sin$ વધતું વિધેય છે.

$\therefore \sin(\pi - 3) < \sin 1 < \sin(\pi - 2)$

$\therefore \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$

વિધાન I સત્ય છે.

વિધાન I સત્ય થવા માટે $\sin$ પ્રથમ અને બીજા ચરણમાં ધન જ હોય એટલું જ પર્યાપ્ત નથી.

$\therefore$ વિધાન II એ વિધાન I માટેની સાચી સમજ પૂરી પાડતું નથી.

જવાબ : (B)

(182) વિધાન I : $\sin \frac{\pi}{18}$ એ સમીકરણ $8x^3 - 6x + 1 = 0$ નું એક બીજ છે.

વિધાન II : $\theta \in \mathbb{R}$ માટે $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

ઉકેલ : વિધાન II : $\theta \in \mathbb{R}$ માટે $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ સત્ય છે.

વિધાન I : $8x^3 - 6x + 1 = 0$

$\therefore 3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$

$\therefore 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \frac{1}{2}$ ($x = \sin\theta$ લેતાં)

$\therefore \sin 3\theta = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ એક ઉકેલ $\theta = \frac{\pi}{18}$

$\therefore \sin \frac{\pi}{18}$ એ આપેલ સમીકરણનું બીજ છે.

વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(183) વિધાન I : $\sum_{i=1}^n \sin^2\theta_i = 0$ હોય, તો $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \dots + \cos\theta_n = n - 4$ થાય, તેવા

$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n)$ ની ભિન્ન n -ટુપલની સંખ્યા $\frac{n(n-1)}{2}$ છે.

વિધાન II : $\sum_{i=1}^n \sin^2\theta_i = 0 \Rightarrow \cos\theta_1, \cos\theta_2, \dots, \cos\theta_n = \pm 1$

ઉકેલ : વિધાન II : $\sum_{i=1}^n \sin^2\theta_i = 0$

$\therefore \sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \dots + \sin^2\theta_n = 0$

$\therefore \sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \dots = \sin\theta_n = 0$

$\therefore \cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_2 = \dots = \cos^2\theta_n = 1$

$$\therefore \cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \dots = \cos\theta_n = \pm 1$$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે.

$$\text{હવે, વિધાન I : } \sum_{i=1}^n \sin^2\theta_i = 0$$

$$\therefore \cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \dots = \cos\theta_n = \pm 1 \text{ થાય.}$$

હવે $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \dots + \cos\theta_n = n - 4$ થવા માટે, કોઈપણ $(n - 2) \cos\theta_i$ ની કિંમતો 1 બાકીના બેની -1 થવી જોઈએ.

આમ, કુલ n સંખ્યામાંથી કોઈપણ બે સંખ્યા -1 હોય તેવી પસંદગી ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ રીતે થાય.

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે. વિધાન II સત્ય છે.

જવાબ : (A)

$$(184) \text{ વિધાન I : } \tan 3.5 < \tan 8$$

વિધાન II : $\tan$ પ્રત્યેક ચરણમાં વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : વિધાન II : $\tan$ પ્રત્યેક ચરણમાં વધતું વિધેય છે સત્ય છે.

વિધાન I : $P(3.5)$ ત્રીજા ચરણમાં છે, જ્યાં $\tan$ ધન છે. $\left(\pi < 3.5 < \frac{3\pi}{2}\right)$

$$\frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi$$

$\therefore P(8)$ બીજા ચરણમાં છે.

$$\therefore \tan 8 < 0$$

$$\therefore \tan 3.5 > \tan 8$$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે, વિધાન I અસત્ય છે.

જવાબ : (D)

$$(185) \text{ વિધાન I : } \sin^{-1}x + \cos^{-1}x + \tan^{-1}x \text{ નો વિસ્તાર } (0, \pi) \text{ છે.}$$

$$\text{વિધાન II : } \sin^{-1}x + \cos^{-1}x + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}x, \forall x \in [-1, 1]$$

ઉકેલ : વિધાન II : $\forall x \in [-1, 1], \sin^{-1}x + \cos^{-1}x + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}x$ સત્ય છે જ.

વિધાન I : $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x + \tan^{-1}x$ માટે $-1 \leq x \leq 1$ જરૂરી છે.

$$\therefore \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} \text{ તથા } -\frac{\pi}{4} \leq \tan^{-1}x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} \leq \sin^{-1}x + \cos^{-1}x + \tan^{-1}x \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \text{વિસ્તાર } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ મળે.}$$

$\therefore$ વિધાન I અસત્ય છે. વિધાન II સત્ય છે.

જવાબ : (D)

$$(186) \text{ વિધાન I : } \cos^{-1}x + \cos^{-1}2x + \pi = 0 \text{ ના ઉકેલની સંખ્યા } 0 \text{ છે.}$$

વિધાન II : $\cot^{-1}x$ નો વિસ્તાર $(0, \pi)$ અને $\cos^{-1}x$ નો વિસ્તાર $[0, \pi]$ છે.

ઉકેલ : વિધાન II : $\cot^{-1}x$ નો વિસ્તાર $(0, \pi)$ અને $\cos^{-1}x$ નો વિસ્તાર $[0, \pi]$ છે. આ વિધાન સત્ય છે.

વિધાન I : હવે, વિધાન II પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$$\cos^{-1}x + \cos^{-1}2x = -\pi \text{ શક્ય નથી.}$$

$\therefore$ આ સમીકરણના ઉકેલની સંખ્યા શૂન્ય (0) છે.

આથી વિધાન I સત્ય છે. તેની સાચી સમજ વિધાન II પરથી મળે છે.

જવાબ : (A)

(187) વિધાન I : $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) > \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$

વિધાન II : $\sin^{-1}x > \tan^{-1}y$ જ્યાં $x > y, \forall x, y \in (0, 1)$

ઉકેલ : વિધાન II : $\sin^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > \tan^{-1}x > \tan^{-1}y$

∴ વિધાન II સત્ય છે.

વિધાન I : $e < \pi$. આથી, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} < \frac{1}{\sqrt{e}}$

∴ $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{e}} > \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, જ્યાં $0 < \frac{1}{\sqrt{\pi}} < \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$ છે.

∴ વિધાન II એ વિધાન I ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(188) વિધાન I : $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \sec^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

વિધાન II : $\operatorname{cosec}^{-1}x < \sec^{-1}x$, જ્યાં $1 \leq x < \sqrt{2}$

ઉકેલ : વિધાન II : $1 \leq x < \sqrt{2}$ આપેલ છે.

$$\operatorname{cosec}^{-1}x < \sec^{-1}x \Leftrightarrow \operatorname{cosec}^{-1}x < \frac{\pi}{2} - \operatorname{cosec}^{-1}x$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{cosec}^{-1}x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cosec}^{-1}x < \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x < \sqrt{2}$$

∴ વિધાન II સત્ય છે.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \in (1, \sqrt{2}) \text{ છે.}$$

∴ $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \sec^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ થવું જોઈએ.

∴ વિધાન I અસત્ય છે.

વિધાન II સત્ય છે, વિધાન I અસત્ય છે.

જવાબ : (D)

(189) $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ માટે,

વિધાન I : $f'(2) = -\frac{2}{5}$

વિધાન II : $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi - 2\tan^{-1}x, \forall x > 1$

ઉકેલ : વિધાન II : $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ માં, $x = \tan\theta, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ લેતાં, $\theta = \tan^{-1}x$ મળે.

$\theta = \tan^{-1}x, x = \tan\theta, x > 1$ લેતાં $\tan\theta > 1$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} < 2\theta - \pi < 0$$

$$\sin(2\theta - \pi) = -\sin 2\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) &= \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = -\sin^{-1}(-\sin 2\theta) = \sin^{-1}(-\sin(2\theta - \pi)) \\ &= \pi - 2\theta = \pi - 2\tan^{-1}x \end{aligned}$$

આથી વિધાન II સત્ય છે.

$$\text{વિધાન I : } f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$x = 2 \Rightarrow x > 1$$

$$\therefore f(x) = \pi - 2\tan^{-1}x$$

$$f'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$$

$$f'(2) = -\frac{2}{5}$$

વિધાન I પણ સત્ય છે.

વિધાન I અને વિધાન II બંને સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન Iની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. જવાબ : (A)

$$(190) \text{ વિધાન I : } \cos^{-1}(\cos(30)) = 30 - 9\pi$$

$$\text{વિધાન II : } 30 - 9\pi \in [0, \pi]$$

$$\text{ઉકેલ : વિધાન II : } 0 < 30 - 9\pi < \pi \text{ કારણ કે } 3 < \pi < \frac{10}{3}$$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે.

$$\text{વિધાન I : હવે } \cos(30 - 9\pi) = -\cos 30$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos^{-1}(\cos 30) &= \cos^{-1}(-\cos(30 - 9\pi)) \\ &= \pi - \cos^{-1}(\cos(30 - 9\pi)) \\ &= \pi - 30 + 9\pi \\ &= 10\pi - 30 \end{aligned}$$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે, વિધાન I અસત્ય છે.

જવાબ : (D)

$$(191) \text{ વિધાન I : } \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$$

$$\text{વિધાન II : } \prod_{i=0}^{n-1} \cos 2^i \theta = -\frac{1}{2^n} \text{ જ્યાં } \theta = \frac{\pi}{2^n - 1}$$

$$\text{ઉકેલ : } \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \dots \cos 2^{n-1}\theta = \frac{\sin(2^n \theta)}{2^n \sin \theta}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin\left(2^n \cdot \frac{\pi}{2^n - 1}\right)}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n - 1}\right)} = \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2^n - 1}\right)}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n - 1}\right)} = -\frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

∴ વિધાન II સત્ય છે.

હવે વિધાન II માં $n = 3$ લેતાં,

$$\cos\theta\cos2\theta\cos2^2\theta = \cos\theta\cos2\theta\cos4\theta = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} \text{ થાય. જ્યાં } \theta = \frac{\pi}{2^3-1} = \frac{\pi}{7}$$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{-1}{8}$$

∴ વિધાન I સત્ય છે.

વિધાન I સત્ય થાય તે માટેની સમજ વિધાન II માં છે.

જવાબ : (A)

(192) વિધાન I : એવા કોઈ બિન્ન વાસ્તવિક x, y ન મળે કે જેથી $\sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ થાય. જ્યાં $\theta \in \mathbb{R}$

વિધાન II : $\forall\theta, \sec^2\theta \geq 1$

ઉકેલ : વિધાન II : $\forall\theta, \sec^2\theta \geq 1$ સત્ય છે.

$$\text{વિધાન I : હવે, ધારો કે } \sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$$

$$\text{વળી, } \sec^2\theta \geq 1 \Leftrightarrow \frac{4xy}{(x+y)^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 4xy \geq x^2 + 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \neq 0$$

∴ જો $(x = y) \neq 0$ હોય, તો $\sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ શક્ય છે. આથી બિન્ન x, y મળતા નથી.

∴ વિધાન I સત્ય છે.

તેની સમજ વિધાન II માં છે.

જવાબ : (A)

(193) વિધાન I : $f(x) = \frac{1}{6\sin x - 8\cos x + 5}$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત વ્યાખ્યાયિત નથી.

વિધાન II : વિધેય $f(x)$ અસીમિત છે.

$$\text{ઉકેલ : વિધાન I : } f(x) = \frac{1}{6\sin x - 8\cos x + 5}$$

$$\therefore g(x) = 6\sin x - 8\cos x$$

$$g(x) = 6\sin x - 8\cos x \text{ નો વિસ્તાર } [-\sqrt{36+64}, \sqrt{36+64}] = [-10, 10]$$

$$-10 \leq 6\sin x - 8\cos x \leq 10$$

$$-5 \leq 6\sin x - 8\cos x + 5 \leq 15$$

$$\therefore -5 \leq \frac{1}{f(x)} \leq 15$$

$$\therefore f(x) \leq -\frac{1}{5} \text{ અથવા } f(x) \geq \frac{1}{15}$$



∴ $f(x)$ નો વિસ્તાર $\mathbb{R} - \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right)$ છે.

∴ f અસીમિત વિધેય છે.

∴ વિધાન II સત્ય છે.

જો f અસીમિત વિધેય હોય, તો તેની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

∴ વિધાન I સત્ય છે. જેનું કારણ વિધાન II છે.

જવાબ : (A)

(194) વિધાન I : $\tan\alpha + 2\tan2\alpha + 4\tan4\alpha + 8\tan8\alpha + 16\cot16\alpha = \cot\alpha$

વિધાન II : $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot2\alpha$

ઉકેલ : વિધાન II : $\cot\alpha - \tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{\cos2\alpha}{\frac{1}{2}\sin2\alpha} = 2\cot2\alpha$

વિધાન I :

$$\begin{aligned}
 \text{ડા.બા.} &= \tan\alpha + 2\tan2\alpha + 4\tan4\alpha + 8\tan8\alpha + 16\cot16\alpha \\
 &= \tan\alpha + 2\tan2\alpha + 4\tan4\alpha + 8\tan8\alpha + 8(\cot8\alpha - \tan8\alpha) \\
 &\quad ((1) \text{ પરથી } 2\cot16\alpha = \cot8\alpha - \tan8\alpha) \\
 &= \tan\alpha + 2\tan2\alpha + 4\tan4\alpha + 8\cot8\alpha \\
 &= \tan\alpha + 2\tan2\alpha + 4\tan4\alpha + 4(\cot4\alpha - \tan4\alpha) \\
 &= \tan\alpha + 2\tan2\alpha + 4\cot4\alpha \\
 &= \tan\alpha + 2\tan2\alpha + 2(\cot2\alpha - \tan2\alpha) \\
 &= \tan\alpha + 2\cot2\alpha \\
 &= \tan\alpha + (\cot\alpha - \tan\alpha) \\
 &= \cot\alpha
 \end{aligned}$$

∴ વિધાન I સત્ય છે, જેની સમજ વિધાન II પરથી મળે છે.

જવાબ : (A)

(195) વિધાન I : જો $\square ABCD$ ચક્રીય હોય, તો $\sin A + \sin B + \sin C + \sin D = 0$

વિધાન II : $\square ABCD$ ચક્રીય હોય, તો $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$

ઉકેલ : $\square ABCD$ ચક્રીય છે.

$$\begin{array}{l|l}
 A + C = \pi \text{ તથા } B + D = \pi & \\
 \hline
 A = \pi - C & B = \pi - D \\
 \cos A = \cos(\pi - C) & \cos B = \cos(\pi - D) \\
 \therefore \cos A = -\cos C & \cos B = -\cos D \\
 \therefore \cos A + \cos C = 0 & \Rightarrow \cos B + \cos D = 0 \\
 \therefore \cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0 &
 \end{array}$$

∴ વિધાન II સત્ય છે.

$$\begin{array}{l|l}
 \text{વળી, } \sin A = \sin(\pi - C) & \sin B = \sin(\pi - D) \\
 \hline
 \therefore \sin A = \sin C & \sin B = \sin D \\
 \therefore \sin A - \sin C = 0 \text{ તથા } \sin B - \sin D = 0 & \\
 \therefore \sin A + \sin B - \sin C - \sin D = 0 &
 \end{array}$$

વિધાન I અસત્ય છે.

જવાબ : (D)

(196) એક સમબાજુ ત્રિકોણની અંતર્ગત વર્તુળ છે. વર્તુળની અંતર્ગત ચોરસ છે. જ્યાં સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુનું માપ a છે.

વિધાન I : ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{a^2}{6}$ ચો એકમ

વિધાન II : વર્તુળની ત્રિજ્યા અને ચોરસની બાજુની લંબાઈ સમાન છે.

ઉકેલ : વિધાન II : ધારો કે ચોરસની બાજુની લંબાઈ x એકમ છે.

$$x^2 + x^2 = 4r^2$$

$$\therefore 2x^2 = 4r^2. \text{ આથી, } x = \sqrt{2} r$$

$\therefore$ વિધાન II અસત્ય છે.

$$\begin{aligned} \text{વિધાન I : } r &= \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3a}{2}} \quad (\Delta ABC \text{ સમબાજુ છે.}) \\ &= \frac{a}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 = \frac{2a^2}{12}. \text{ આથી, } x^2 = \frac{a^2}{6}$$

$$\therefore \text{ચોરસનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{a^2}{6} \text{ છે.}$$

વિધાન I સત્ય છે.

જવાબ : (C)

(197) એક કાટકોણ ત્રિકોણમાં અંતર્ગત વર્તુળ આવેલ છે, જ્યાં B કાટખૂણો છે.

વિધાન I : વર્તુળનો વ્યાસ $AB + BC - AC$ છે.

વિધાન II : વર્તુળની ત્રિજ્યા = $\frac{\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{ત્રિકોણની અર્ધપરિમિતિ}}$

ઉકેલ : વિધાન II : વર્તુળની ત્રિજ્યા = $\frac{\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{ત્રિકોણની અર્ધપરિમિતિ}}$

$$\therefore r = \frac{\Delta}{s} \text{ સત્ય છે.}$$

આથી વિધાન II સત્ય છે.

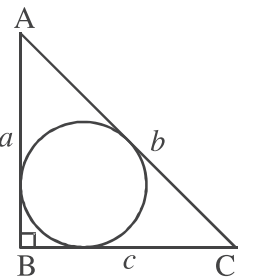
ΔABC કાટકોણ છે.

$$\text{આથી } \Delta = \frac{1}{2}ac$$

$$\therefore r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{1}{2}ac}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ac}{a+b+c} \quad (2s = a + b + c)$$

$$\therefore r = \frac{ac(a+c-b)}{(a+b+c)(a+c-b)}$$

$$= \frac{ac(a+c-b)}{(a+c)^2 - b^2} = \frac{ac(a+c-b)}{a^2 + 2ac + c^2 - b^2} = \frac{a+c-b}{2}$$



આકૃતિ 12.19

$$(a^2 + c^2 = b^2)$$

$\therefore$ વ્યાસ = $a + c - b = BC + AB - AC$ થાય.

$\therefore$ વિધાન II એ વિધાન I ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(198) વિધાન I : $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

વિધાન II : $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

ઉકેલ : વિધાન II : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ સત્ય છે.

વિધાન I : આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\tan^{-1}\frac{1}{x} = \begin{cases} \cot^{-1}x; & x > 0 \\ -\pi + \cot^{-1}x; & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{હવે } x < 0 \text{ લેતાં, } \tan^{-1}\frac{1}{x} + \tan^{-1}x &= \tan^{-1}x - \pi + \cot^{-1}x \\ &= (\tan^{-1}x + \cot^{-1}x) - \pi \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ વિધાન I અસત્ય છે. આથી વિધાન II સત્ય છે, વિધાન I અસત્ય છે.

જવાબ : (D)

જોડકાં જોડો પ્રકારના પ્રશ્નો

(199) I અને II ને જોડો :

[JEE Adv. : 2013]

I	II
(P) $\left[\frac{1}{y^2} \left(\frac{\cos(\tan^{-1}y) + y \sin(\tan^{-1}y)}{\cot(\sin^{-1}y) + \tan(\sin^{-1}y)} \right)^2 + y^4 \right]^{\frac{1}{2}}$	(1) $\frac{1}{2} \sqrt{5}$
(Q) $\cos x + \cos y + \cos z = 0$ $\sin x + \sin y + \sin z = 0$ તે $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ની શક્ય કિંમત	(2) $\sqrt{2}$
(R) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos 2x + \sin x \cdot \sin 2x \sec x$ $= \cos x \sin 2x \sec x + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos 2x$ તે $\sec x$ ની શક્ય કિંમત	(3) $\frac{1}{2}$
(S) $\cot\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right) = \sin\left(\tan^{-1}(x\sqrt{6})\right), x \neq 0$	(4) 1

Codes :

	P	Q	R	S
(A)	(4)	(3)	(1)	(2)
(B)	(4)	(3)	(2)	(1)
(C)	(3)	(4)	(2)	(1)
(D)	(3)	(4)	(1)	(2)

$$\begin{aligned}
\text{ઉત્તર : (P)} \quad & \left[\frac{1}{y^2} \left(\frac{\cos(\tan^{-1}y) + y \sin(\tan^{-1}y)}{\cot(\sin^{-1}y) + \tan(\sin^{-1}y)} \right)^2 + y^4 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{y^2} \left\{ \frac{\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right) + y \sin\left(\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)}{\cot\left(\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right) + \tan\left(\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)} \right\}^2 + y^4 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{y^2} \left\{ \frac{\frac{1+y^2}{\sqrt{1+y^2}}}{\frac{1-y^2+y^2}{y\sqrt{1-y^2}}} \right\}^2 + y^4 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{y^2} \left\{ \sqrt{1+y^2} \cdot y \sqrt{1-y^2} \right\}^2 + y^4 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[1 - y^4 + y^4 \right]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{(P) } \rightarrow \text{ (4)}
\end{aligned}$$

$$(Q) \cos x + \cos y + \cos z = 0 \text{ અને } \sin x + \sin y + \sin z = 0$$

$$\therefore \cos x + \cos y = -\cos z \text{ અને } \sin x + \sin y = -\sin z$$

$$(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 = 1$$

$$\therefore 2 + 2\cos x \cos y + 2\sin x \sin y = 1$$

$$\therefore 2 + 2\cos(x - y) = 1$$

$$\therefore \cos(x - y) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x-y)}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{અહીં વિચારે (3) માં } \frac{1}{2} \text{ આપેલ છે.} \quad (Q) \rightarrow (3)$$

$$(R) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos 2x + \sin x \sin 2x \sec x = \cos x \sin 2x \sec x + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos 2x$$

$$\therefore \cos 2x \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \right] = \sin 2x \sec x (\cos x - \sin x)$$

$$\therefore 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin x \cos 2x = 2 \sin x (\cos x - \sin x)$$

$$\therefore 2 \sin x \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos x - \sin x) \right] = 0$$

$$\therefore 2 \sin x (\cos x - \sin x) \left[\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}} - 1 \right] = 0$$

$$\therefore 2\sin x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ અથવા } \tan x = 1 \text{ અથવા } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \cos 0$$

$$\therefore \cos x = \pm 1 \text{ અથવા } \sec x = \pm\sqrt{2} \text{ અથવા } x = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \sec x = \pm 1 \text{ અથવા } \sqrt{2} \quad (R) \rightarrow (2)$$

$$(S) \cot\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right) = \sin\left(\tan^{-1}x\sqrt{6}\right)$$

$$\therefore \cot\left(\cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sin\left(\sin^{-1}\frac{x\sqrt{6}}{\sqrt{1+6x^2}}\right)$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\sqrt{6}}{\sqrt{1+6x^2}}$$

$$\therefore 1 + 6x^2 = 6(1 - x^2)$$

$$\therefore 12x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \quad (S) \rightarrow (1)$$

આમ, (P) $\rightarrow$ (4), (Q) $\rightarrow$ (3), (R) $\rightarrow$ (2), (S) $\rightarrow$ (1)

નોંધ : ખરેખર Q ની ગણતરી સરળ છે. તે પહેલાં કરતાં (Q) $\rightarrow$ (3) મળે. આથી જવાબ (A) કે (B) જ હોઈ શકે. હવે સરળ (S) ગણતાં (S) $\rightarrow$ (1) મળે. આથી જવાબ (B) છે. **જવાબ : (B)**

(200) સમીકરણ $\sin^{-1}ax + \cos^{-1}y + \cos^{-1}(bxy) = \frac{\pi}{2}$ નું સમાધાન કરતી ક્રમયુક્ત જોડ (x, y)

I		II	
(A)	$a = 1, b = 0$	(P)	(x, y) વર્તુળ $x^2 + y^2 = 1$ પર છે.
(B)	$a = 1, b = 1$	(Q)	(x, y) એ $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$ પર છે.
(C)	$a = 1, b = 2$	(R)	$y = x$ રેખા પર છે.
(D)	$a = 2, b = 2$	(S)	$(4x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$ પર છે.

$$(A) (A) \rightarrow (P) \quad (B) \rightarrow (Q) \quad (C) \rightarrow (S) \quad (D) \rightarrow (R)$$

$$(B) (A) \rightarrow (Q) \quad (B) \rightarrow (P) \quad (C) \rightarrow (S) \quad (D) \rightarrow (R)$$

$$(C) (A) \rightarrow (P) \quad (B) \rightarrow (Q) \quad (C) \rightarrow (P) \quad (D) \rightarrow (S)$$

$$(D) (A) \rightarrow (Q) \quad (B) \rightarrow (P) \quad (C) \rightarrow (R) \quad (D) \rightarrow (S)$$

$$\text{ઉકેલ : } \cos^{-1}y + \cos^{-1}(bxy) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(ax)$$

$$\therefore \cos^{-1}y + \cos^{-1}(bxy) = \cos^{-1}(ax)$$

$$\text{ધારો કે } \cos^{-1}y = \alpha, \cos^{-1}(bxy) = \beta, \cos^{-1}(ax) = \gamma, 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$$

$$\therefore \alpha + \beta = \gamma$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos\gamma$$

$$\therefore \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos\gamma$$

$$\therefore y(bxy) - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-b^2x^2y^2} = ax$$

$$\therefore \sqrt{(1-y^2)}\sqrt{1-b^2x^2y^2} = ax - bxy^2$$

$$\begin{aligned}\therefore (1 - y^2)(1 - b^2x^2y^2) &= (ax - bxy^2)^2 \\ \therefore 1 - b^2x^2y^2 - y^2 + b^2x^2y^4 &= a^2x^2 - 2bax^2y^2 + b^2x^2y^4 \\ \therefore a^2x^2 + y^2 + b^2x^2y^2 - 2abx^2y^2 - 1 &= 0 \\ \therefore a^2x^2 + y^2 + (b^2 - 2ab)x^2y^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

$$(A) a = 1, b = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad \text{આથી (A) } \rightarrow (P)$$

$$\begin{aligned}(B) a = 1, b = 1 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - x^2y^2 - 1 &= 0 \quad \text{આથી (B) } \rightarrow (Q) \\ \Rightarrow (y^2 - 1)(x^2 - 1) &= 0\end{aligned}$$

$$(C) a = 1, b = 2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad \text{આથી (C) } \rightarrow (P)$$

$$\begin{aligned}(D) a = 2, b = 2 \\ 4x^2 + y^2 - 4x^2y^2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow (4x^2 - 1)(y^2 - 1) &= 0 \quad \text{આથી (D) } \rightarrow (S)\end{aligned}$$

$$(A) \rightarrow (P), (B) \rightarrow (Q), (C) \rightarrow (P), (D) \rightarrow (S)$$

માત્ર (A) $\rightarrow$ (P), (C) $\rightarrow$ (P) પરથી જવાબ મળી જાય.

જવાબ : (C)

(201) એક રેખા પરનાં ત્રણ બિંદુ A, B, C થી એક ફૂગાનું અવલોકન કરવામાં આવે છે. B આગળના બિંદુથી ઉત્સેધકોણનું માપ A આગળના બિંદુથી ઉત્સેધકોણના માપ કરતાં બમણું છે. C આગળના ઉત્સેધકોણનું માપ, A આગળના બિંદુના ઉત્સેધકોણના માપ કરતા ત્રણ ગણું છે.

જો A અને B વચ્ચેનું અંતર a , B અને C વચ્ચેનું અંતર b હોય, તો ફૂગાની ઊંચાઈ છે.

$$(A) \frac{a}{2b} \sqrt{(a+b)(3b+a)}$$

$$(B) \frac{a}{2b} \sqrt{(a-b)(3b-a)}$$

$$(C) \frac{2a}{b} \sqrt{(a+b)(3b-a)}$$

$$(D) \frac{a}{2b} \sqrt{(a+b)(3b-a)}$$

ઉકેલ : ΔPBC માં $\sin$ સૂત્ર પરથી,

$$\frac{a}{\sin(180 - 3\alpha)} = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{PC}{\sin 2\alpha}$$

$$\therefore \frac{a}{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{PC}{2\sin\alpha \cos\alpha}$$

$$\therefore \frac{a}{3 - 4\sin^2\alpha} = \frac{b}{1} = \frac{PC}{2\cos\alpha}$$

$$\therefore 3 - 4\sin^2\alpha = \frac{a}{b}$$

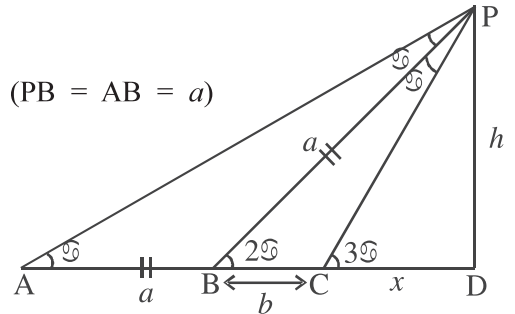
$$\therefore 4\sin^2\alpha = 3 - \frac{a}{b} = \frac{3b - a}{b}$$

$$\therefore \sin^2\alpha = \frac{3b - a}{4b}, \quad \cos^2\alpha = \frac{b + a}{4b}$$

$$\Delta PCD \text{ માં } \sin 3\alpha = \frac{h}{PC}$$

$$\therefore h = PC \sin 3\alpha$$

$$(1) (PB = AB = a)$$



આકૃતિ 12.20

$$= a \sin 2\alpha$$

$$((1) \text{ પરથી } PC \sin 3\alpha = a \sin 2\alpha)$$

$$= a(2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= a(2) \sqrt{\frac{3b-a}{4b}} \sqrt{\frac{b+a}{4b}}$$

$$h = \frac{a}{2b} \sqrt{(a+b)(3b-a)}$$

જવાબ : (D)

(202) એક શિરોલંબ ટાવરનું જમીન પરનું બિંદુ Q છે. A અને B જમીન પરનાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. જેમની વચ્ચેનું અંતર d મીટર છે. આ ટાવરની ટોચના A અને B ના આગળના ઉત્સેધકોણ અનુક્રમે α અને β છે. $\overline{AB}$ એ Q આગળ γ માપનો ખૂણો બનાવે છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ

$$(A) \frac{d}{\sqrt{\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta - 2 \cot \alpha \cot \beta \cos \gamma}}$$

$$(B) \frac{d}{\sqrt{\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta + 2 \cot \alpha \cot \beta \cos \gamma}}$$

$$(C) d \sqrt{\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta - 2 \cot \alpha \cot \beta \cos \gamma}$$

(D) આમાંથી એકપણ નહિ.

$$\text{ઉકેલ : } \Delta APQ \text{ માં } \tan \alpha = \frac{h}{AQ}$$

$$\therefore AQ = \frac{h}{\tan \alpha}$$

$$\Delta BPQ \text{ માં } \tan \beta = \frac{h}{BQ}$$

$$\therefore BQ = \frac{h}{\tan \beta}$$

$$\Delta ABQ \text{ માં, } \cos \gamma = \frac{AQ^2 + BQ^2 - AB^2}{2AQ \cdot BQ}$$

$$\cos \gamma = \frac{h^2 \cot^2 \alpha + h^2 \cot^2 \beta - d^2}{2h^2 \cot \alpha \cot \beta}$$

$$\therefore 2h^2 \cot \alpha \cot \beta \cos \gamma = h^2 \cot^2 \alpha + h^2 \cot^2 \beta - d^2$$

$$\therefore h = \frac{d}{\sqrt{\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta - 2 \cot \alpha \cot \beta \cos \gamma}}$$

જવાબ : (A)

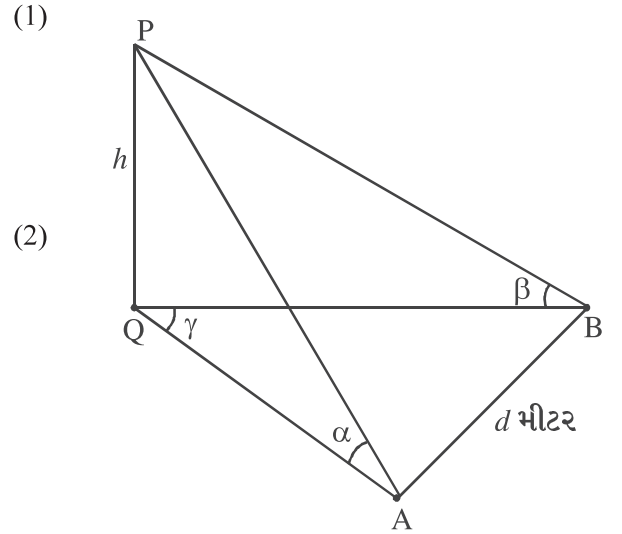
(203) જમીનને શિરોલંબ ટાવર $\overline{AB}$ છે તથા બિંદુ A અને P જમીન પરનાં બિંદુઓ છે. $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ C છે. $\overline{CB}$ એ P આગળ β માપનો ખૂણો બનાવે છે. $AP = nAB$ હોય, તો $\tan \beta = \dots\dots$

$$(A) \frac{n}{2n+1}$$

$$(B) \frac{n^2}{2n+1}$$

$$(C) \frac{n}{2n^2+1}$$

$$(D) \frac{n^2}{2n^2+1}$$



આકૃતિ 12.21

ઉકેલ : ΔPAB માં $\tan\theta = \frac{AB}{AP} = \frac{1}{n}$ (1)

હવે, ΔPAC માં $\tan(\theta - \beta) = \frac{\tan\theta - \tan\beta}{1 + \tan\theta \tan\beta}$

$\therefore \frac{AC}{AP} = \frac{\tan\theta - \tan\beta}{1 + \tan\theta \tan\beta}$

$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{AP} \right) = \frac{\frac{1}{n} - \tan\beta}{1 + \frac{1}{n} \tan\beta}$ ((1) પરથી)

$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1 - n \tan\beta}{n + \tan\beta}$

$\therefore n + \tan\beta = 2n - 2n^2 \tan\beta$

$\therefore (2n^2 + 1) \tan\beta = n$

$\therefore \tan\beta = \frac{n}{2n^2 + 1}$

જવાબ : (C)

(204) એક સીડી દીવાલ પર ટેકવેલી છે. તેના નીચેના છેડાનું જમીન સાથેના ખૂણાનું માપ β છે. હવે જ્યારે સીડીનો નીચેનો છેડો દીવાલ તરફ a મીટર ખસે, ત્યારે સીડીનો ઉપરનો છેડો દીવાલ ઉપર b મીટર ખસે છે. તે વખતે તેનો નીચેનો છેડો જમીન સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે છે, તો $\frac{a}{b} = \dots\dots$

(A) $\tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ (B) $\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ (C) $\tan\alpha + \tan\beta$ (D) $1 + \tan\alpha \tan\beta$

ઉકેલ : ધારો કે સીડીની લંબાઈ x મીટર છે.

હવે કાટકોણ ત્રિકોણ OBQ માં $\cos\beta = \frac{OB}{BQ}$

$\therefore \cos\beta = \frac{OB}{x}$

$\therefore OB = x \cos\beta, \sin\beta = \frac{OQ}{BQ} = \frac{OQ}{x}$

$\therefore OQ = x \sin\beta$

કાટકોણ ΔOPA માટે $\cos\alpha = \frac{OA}{PA} \quad \left| \quad \sin\alpha = \frac{OP}{AP} = \frac{OP}{x} \right.$

$\therefore OA = x \cos\alpha \quad \left| \quad \therefore OP = x \sin\alpha \right.$

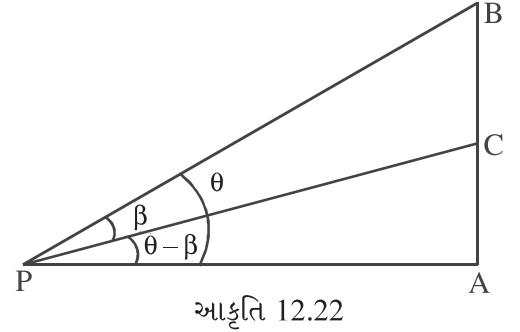
$a = OB - OA = x(\cos\beta - \cos\alpha)$

$b = OP - OQ = x(\sin\alpha - \sin\beta)$

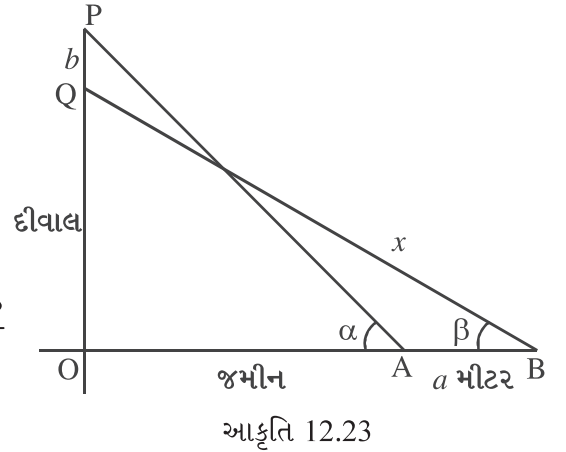
$\frac{a}{b} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2 \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \sin \left(\frac{-\beta + \alpha}{2} \right)}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$

$\therefore \frac{a}{b} = \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

જવાબ : (B)



આકૃતિ 12.22



આકૃતિ 12.23