Total Pages : 8

KN-22

B.A. (Part-I) Examination, 2022

(New Course)

MATHEMATICS

(Vector Analysis and Geometry)

[Paper : Third]

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Passing Marks : 17

Note : Solve **any two** parts from each question. **All** questions carry **equal** marks.

प्रत्येक प्रश्न के **किन्हीं दो** भागों को हल कीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।

Unit - I / इकाई - I [5x2=10]

1. (a) Prove that :

$$\left[\overline{l},\overline{m},\overline{n}\right]\left[\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right]=\begin{vmatrix}\overline{l}\cdot\overline{m} & \overline{l}\cdot\overline{b} & \overline{l}\cdot\overline{c}\\ \overline{m}\cdot\overline{a} & \overline{m}\cdot\overline{b} & \overline{m}\cdot\overline{c}\\ \overline{n}\cdot\overline{a} & \overline{n}\cdot\overline{b} & \overline{n}\cdot\overline{c}\end{vmatrix}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\left[\overline{l},\overline{m},\overline{n}\right]\left[\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right]=\begin{vmatrix}\overline{l}\cdot\overline{m} & \overline{l}\cdot\overline{b} & \overline{l}\cdot\overline{c}\\ \overline{m}\cdot\overline{a} & \overline{m}\cdot\overline{b} & \overline{m}\cdot\overline{c}\\ \overline{n}\cdot\overline{a} & \overline{n}\cdot\overline{b} & \overline{n}\cdot\overline{c}\end{vmatrix}$$

(b) If :

$$f=\left(2x^2y-x^4\right)i+\left(e^{xy}-y\sin x\right)j+x^2\cos y\,k\,,$$

then prove that :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

यदि :

$$f=\left(2x^2y-x^4\right)i+\left(e^{xy}-y\sin x\right)j+x^2\cos y\,k\,,$$

तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

(c) If $\phi(x,y) = \log\sqrt{(x^2+y^2)}$, then prove that :

$$\text{grad}\,\phi = \frac{r-(k.r)k}{\{r-(k.r)k\}.\{r-(k.r)k\}}$$

यदि $\phi(x,y) = \log\sqrt{(x^2+y^2)}$, तब सिद्ध कीजिए :

$$\text{grad}\,\phi = \frac{r-(k.r)k}{\{r-(k.r)k\}.\{r-(k.r)k\}}$$

Unit - II / इकाई - II [5x2=10]

2. (a) If $r(t) = 5t^2 i + tj - t^3 k$, then prove that :

$$\int_1^2 \left(\frac{rd^2r}{dt^2}\right) dt = -14i + 75j - 15k$$

यदि $r(t) = 5t^2 i + tj - t^3 k$, तब सिद्ध कीजिए :

$$\int_1^2 \left(\frac{rd^2r}{dt^2}\right) dt = -14i + 75j - 15k$$

(b) Find the value of

$$\int_S \left(y^2z^2\hat{i} + z^2x^2\hat{j} + x^2y^2\hat{k}\right)\hat{n}\,dS$$

where S is a part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the plane- xy and bounded by it.

$\int_S \left(y^2 z^2 \hat{i} + z^2 x^2 \hat{j} + x^2 y^2 \hat{k} \right) \hat{n}\, dS$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ S, xy-तल के ऊपर तथा इसी से घिरा हुआ गोला $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का एक भाग है।

(c) Prove that :

$$\iiint_V \frac{dV}{r^2} = \iint_S \frac{r.n}{r^2} dS$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\iiint_V \frac{dV}{r^2} = \iint_S \frac{r.n}{r^2} dS$$

Unit - III / इकाई - III [5x2=10]

3. (a) Trace of curve :

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

वक्र $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

(b) A circle cuts the rectangular hyperbola $xy = 1$ at $(x_r, y_r); r = 1,2,3,4$ then prove that $x_1 x_2 x_3 x_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 = 1$.

एक वृत्त, एक आयताकार अतिपरवलय $xy=1$ को $(x_r, y_r); r=1,2,3,4$ पर काटता है, तब सिद्ध कीजिए कि $x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$.

(c) Prove that : The sum of reciprocal of two perpendicular focal chords is constant.

सिद्ध कीजिए : किसी शांकव से दो लम्बवत् नाभिय जीवाओं के व्युत्क्रमों का योग अचर होता है।

Unit - IV / इकाई - IV [5x2=10]

4. (a) Find the distance of point $(-1,-5,-10)$ from the point of intersection of the line $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ and the plane $x-y+z=5$.

सरल रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ और समतल $x-y+z=5$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से बिन्दु $(-1,-5,-10)$ की दूरी ज्ञात कीजिए।

(b) Find the equation of sphere passing through the origin and point $(0,0,0),(a,0,0),(0,b,0)$ and $(0,0,c)$. Also find centre and radius of sphere.

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो चार बिन्दुओं $(0,0,0),(a,0,0),(0,b,0)$ तथा $(0,0,c)$ से गुजरता है। इसकी केन्द्र और त्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।

(c) Find the equation of cylinder whose generators are parallel to straight line $x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ and guiding curve is the ellipse $x^2+2y^2=1, z=3$.

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक सरल रेखा $x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ के समान्तर हैं तथा निर्देशक वक्र दीर्घवृत्त $x^2+2y^2=1, z=3$ हैं।

Unit - V / इकाई - V [5x2=10]

5. (a) Find the condition that the plane $l\,x+m\,y+n\,z=p$ will touch the conicoid $ax^2+by^2+cz^2=1$.

समतल $l\,x+m\,y+n\,z=p$ के शांकवज $ax^2+by^2+cz^2=1$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

(b) Find equation of normal to the paraboloid $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=z$.

परवलयज $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=z$ के बिन्दु पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(c) Reduce the equation

$$x^2+4y^2+z^2-4yz+2zx-4xy-2x+4y-2z=3$$

to the normal form.

समीकरण

$$x^2+4y^2+z^2-4yz+2zx-4xy-2x+4y-2z=3$$

को अभिलम्ब रूप में समानीत कीजिए।

----x----