8 યામ ભૂમિતિ 1 (બિંદુ, રેખા)

- **અંતર સૂત્ર :** $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2) \in R^2$ માટે A અને B વચ્ચેનું અંતર

  $AB = d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- **ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર :** ત્રિકોણની બાજુઓના લંબદ્વિભાજકોના સંગમબિંદુને ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર કહે છે.
  ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર ત્રિકોણનાં ત્રણેય શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે હોય છે.
  જો P એ ΔABC નું પરિકેન્દ્ર હોય તો $AP = BP = CP$. કાટકોણ ત્રિકોણમાં **કર્ણનું મધ્યબિંદુ** ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર છે.
- **ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર :** ત્રિકોણની ત્રણેય મધ્યગાઓનાં સંગમબિંદુને ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર કહે છે.
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ તથા $C(x_3, y_3)$ શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર $G = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$
- **ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર :** ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓના અંતઃદ્વિભાજકોના સંગમબિંદુને ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર કહે છે.
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ તથા $C(x_3, y_3)$ એ ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ છે તથા $BC = a, CA = b$ તથા

  $AB = c$, તો ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર $I = \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$
- **ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર :** ત્રિકોણના ત્રણેય વેધોના સંગમબિંદુને ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર H કહે છે.
  G એ $\overline{HP}$ નું H તરફથી $2:1$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.
- **રેખાખંડનું વિભાજન :** ધારો કે A અને B સમતલનાં કોઈ બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે, બે ભિન્ન બિંદુઓ અનન્ય રેખા નિશ્ચિત કરે છે. આમ, A અને B થી અનન્ય રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ નિશ્ચિત થાય છે.

  જો $P \in \overleftrightarrow{AB}, P \neq A, P \neq B,$ તો $A-P-B$ અથવા $P-A-B$ અથવા $A-B-P$ હોઈ શકે. અહીં આપણે જોઈશું કે $P \in \overline{AB}$ (એટલે કે $A-P-B$) અથવા $P \notin \overline{AB}$ (એટલે કે $P-A-B$ અથવા $A-B-P$) પૈકી કોઈ એક માહિતી અને ગુણોત્તર $\frac{AP}{PB}$ નું મૂલ્ય જાણતા હોઈએ, તો આપણે P ના યામ નિશ્ચિત કરી શકીએ.
- **અંતઃવિભાજન :** જો $A-P-B$, તો P બિંદુ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $\frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તેમ કહેવાય. અહીં $A-P-B$ હોવાથી આ વિભાજનને $\overline{AB}$ નું અંતઃવિભાજન કહે છે.
- **બહિર્વિભાજન :** જો $P-A-B$ અથવા $A-B-P$ હોય, તો P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $-\frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તેમ કહેવાય. અહીં $P-A-B$ અથવા $A-B-P$ હોવાથી આ વિભાજનને $\overline{AB}$ નું બહિર્વિભાજન કહે છે.
  આમ, P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે $(\lambda \neq 0, -1)$ તે માટે
  (i) $A-P-B$ તો, $\lambda > 0$ અને બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું અંતઃવિભાજન કરે છે.
  (ii) $P-A-B$ તો, $-1 < \lambda < 0$ અને બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું બહિર્વિભાજન કરે છે.
  (iii) $A-B-P$ તો, $\lambda < -1$ અને બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું બહિર્વિભાજન કરે છે.

- **રેખાખંડનું વિભાજન કરતા બિંદુના યામ :**

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ને જોડતા $\overline{AB}$ ના વિભાજન કરતા બિંદુના યામ $\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$ થાય જ્યાં $\lambda \in R - \{0, -1\}$.

$\lambda = \frac{m}{n}$ લઈએ, તો વિભાજન બિંદુના યામ $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ લઈ શકાય. (જ્યાં $m+n \neq 0, m \neq 0$)

- **R^2 નાં ત્રણ ભિન્ન બિંદુઓ સમરેખ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત :**

R^2 નાં ત્રણ ભિન્ન બિંદુઓ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ સમરેખ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત

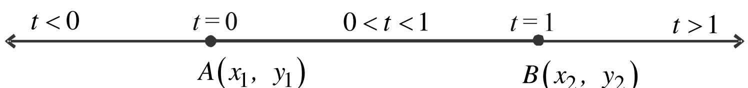
$\Delta = 0$ અર્થાત્ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- **રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો :** જો $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2) \in R^2$ ભિન્ન બિંદુઓ હોય, તો

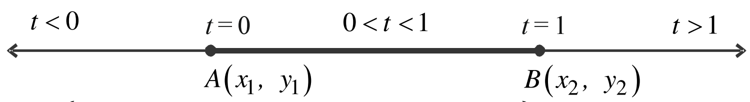
$x = tx_2 + (1-t)x_1, \quad y = ty_2 + (1-t)y_1, t \in R$ ને $\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો કહે છે અને t ને પ્રચલ કહે છે.

- $\overleftrightarrow{AB}$ ના કેટલાક ઉપગણો :

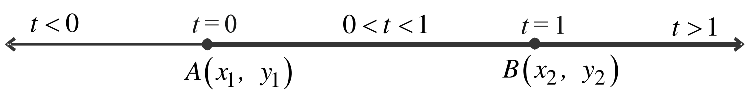
(1) $\overleftrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ;\ t \in R\right\}$



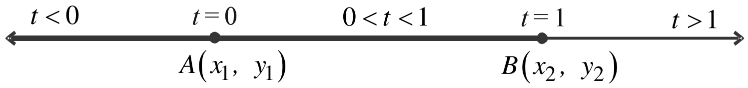
(2) $\overline{AB} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ;\ t \in [0, 1]\right\}$



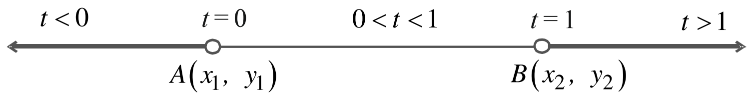
(3) $\overrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ;\ t \geq 0\right\}$



(4) $\overrightarrow{BA} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ;\ t \leq 1\right\}$



(5) $\overleftrightarrow{AB} - \overline{AB} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} \;;\; t \in R - [0, 1] \right\}$



- **રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ :**

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ એ R^2 નાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ નું કાર્તેઝિય સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ છે.

X-અક્ષને લંબ રેખાનું સમીકરણ $x = a$, છે, જ્યાં a અચળ છે.

Y-અક્ષને લંબ રેખાનું સમીકરણ $y = b$ છે, જ્યાં b અચળ છે.

- **રેખાનો ઢાળ :**

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ એ R^2 નાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે, જ્યાં $x_1 \neq x_2$. તેથી તેમને જોડતી $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ ન હોય, તથા $\overline{AB}$ નો ઢાળ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

- X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે ઘડિયાળના કાંટાથી વિરુદ્ધ દિશામાં જે ખૂણો બનાવે, તેનું માપ θ હોય, તો $tan\,\theta$ ને રેખાનો ઢાળ કહે છે. તેને સંકેતમાં m વડે દર્શાવાય છે.

$$\therefore \quad m = tan\,\theta \qquad\qquad 0 < \theta < \pi, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

- જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, તો $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ ધન હોય છે.
- જો $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, તો $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ ઋણ હોય છે.
- જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ હોય તો $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત નથી.
- જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ Y-અક્ષને લંબ હોય તો ઢાળ શૂન્ય છે.
- બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $m_1 = m_2$ છે.
- બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $m_1 \cdot m_2 = -1$ છે.
- **બે છેદતી રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો :**

જો રેખાઓ પરસ્પર લંબ ન હોય, તો તેમના છેદબિંદુ આગળ એકરૂપ અભિકોણોની બે જોડ રચાય છે. આમાંની એક એકરૂપ ગુરુકોણની જોડ તથા બીજી એકરૂપ લઘુકોણની જોડ છે. આ **લઘુકોણના રેડિયન માપને બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કહે છે.**

(1) એક રેખા X-અક્ષને લંબ હોય તથા બીજી રેખાનો ઢાળ m હોય, તો તે બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\alpha = \left| \frac{\pi}{2} - \theta \right|$ જ્યાં θ એ બીજી રેખાએ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે બનાવેલ ખૂણાનું માપ છે.

(2) એક પણ રેખા X-અક્ષને લંબ ન હોય, તેવી બે પરસ્પર છેદતી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય,

તો $tan\,\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ દ્વારા α મળે. જ્યાં $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. અહીં m_1 અને m_2 રેખાઓના ઢાળ છે.

- **રેખા $ax+by+c=0,\ a^2+b^2\neq 0,\ (a,b,c\in R)$નો ઢાળ :**

ધારો કે રેખા સમક્ષિતિજ કે શિરોલંબ નથી. તેથી $a\neq 0,\ b\neq 0$.

$\therefore$ રેખા $ax+by+c=0$ નો ઢાળ $= -\frac{a}{b}$.

જો $a=0$, તો રેખા સમક્ષિતિજ હોય, તેથી રેખાનો ઢાળ $m=0$.

જો $b=0$, તો રેખા શિરોલંબ રેખા હોય તેથી રેખાનો ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત થાય.

જો $c=0$ તો રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

- **રેખાના અક્ષો પરના અંતઃખંડ :**

***X*-અંતઃખંડ :** જો રેખા X-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $(a, 0)$માં છેદે તો રેખાનો *X*-અંતઃખંડ a છે તેમ કહેવાય. (જ્યાં $a\neq 0$)

Y-અક્ષને લંબરેખાનો ***X***-અંતઃખંડ ન મળે.

***Y*-અંતઃખંડ :** જો રેખા Y-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $(0, b)$માં છેદે તો રેખાનો *Y*-અંતઃખંડ b છે તેમ કહેવાય. (જ્યાં $b\neq 0$)

X-અક્ષને લંબરેખાનો *Y*-અંતઃખંડ ન મળે.

- **$ax+by+c=0,\ a\neq 0,\ b\neq 0$ રેખાના અંતઃખંડ :**

X-અંતઃખંડ $= -\frac{c}{a}$, *Y*-અંતઃખંડ $= -\frac{c}{b}$.

નોંધ : જો રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય તો બંને અંતઃખંડ શૂન્ય થાય છે.

- **રેખાની બહારના બિંદુથી રેખાનું લંબઅંતર :**

બિંદુ $P(x_1, y_1)$થી રેખા $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$નું લંબઅંતર, $p = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- **બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર :**

બે સમાંતર રેખાઓ $ax+by+c=0$ અને $ax+by+c'=0$, $a^2+b^2\neq 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર,

$p=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. (જ્યાં $c\neq c'$)

- જો $a_1x+b_1y+c_1=0$ અને $a_2x+b_2y+c_2=0$, $\left(a_i^2+b_i^2\neq 0,\ i=1,2\right)$ એ અનન્ય બિંદુમાં છેદતી રેખાઓ હોય, તો $l(a_1x+b_1y+c_1)+m(a_2x+b_2y+c_2)=0$ તેમનાં છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈક રેખા દર્શાવે છે, જ્યાં $l^2+m^2\neq 0, l,\ m\in R$.

- **બે રેખાઓ સંપાતી, સમાંતર, લંબ કે છેદક બને તે માટેની શરત :**

રેખાઓ $l_1 : a_1x+b_1y+c_1=0,\ l_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$.

(1) જો $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ હોય, તો l_1 અને l_2 સંપાતી રેખાઓ છે.

(2) જો $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ હોય, તો $l_1 \parallel l_2$.

(3) જો $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ હોય તો $l_1 \perp l_2$.

(4) જો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ હોય, તો રેખાઓ l_1 અને l_2 પરસ્પર છેદે છે તથા છેદબિંદુના યામ $\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$ છે.

- **બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનાં દ્વિભાજકનું સમીકરણ :**

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ રેખા છેદતી હોય તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાના દ્વિભાજકોનું સમીકરણ

  $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ છે.

- **સંગામી રેખાઓ :**

  જો બેથી વધુ ભિન્ન રેખાઓ અનન્ય બિંદુમાં છેદે, તો તેમને **સંગામી રેખાઓ** કહે છે તથા તેમના સામાન્ય છેદબિંદુને તેમનું સંગમબિંદુ કહે છે.

  રેખાઓ સંગામી બને તે માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત.

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

  $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad a_i^2 + b_i^2 \neq 0, \qquad i = 1, 2, 3$

  $a_3x + b_3y + c_3 = 0$

  $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો :

(1) જો $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$ દ્વારા બનતી રેખાઓ પૈકીની બે રેખાઓ કાટખૂણે હોય, તો $a^2 + d^2 + ac + bd =$ ......

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) $ab + cd$

ઉકેલ : હવે $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$ (1)

એ રેખાઓ $y = m_1x$, $y = m_2x$ અને $y = m_3x$ દર્શાવે કે, જેથી $m_1m_2 = -1$ થાય. (2)

(1) ને x^3 વડે ભાગતાં, $d\left(\frac{y}{x}\right)^3 + c\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b\left(\frac{y}{x}\right) + a = 0$ (3)

$\therefore$ બીજોનો ગુણાકાર $m_1m_2m_3 = -\frac{a}{d}$

$\therefore$ $(-1)\,m_3 = -\frac{a}{d}$ આથી $m_3 = \frac{a}{d}$ ((2) પરથી)

પરંતુ m_3 એ સમીકરણ (3)નું બીજ છે.

$\therefore$ $d\left(\frac{a}{d}\right)^3 + c\left(\frac{a}{d}\right)^2 + b\left(\frac{a}{d}\right) + a = 0$

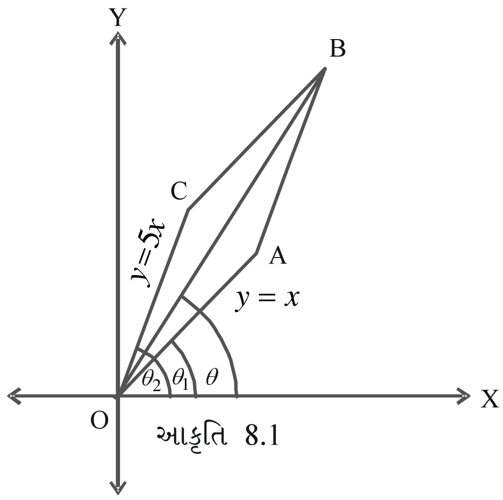
$\therefore$ $a^2 + ca + bd + d^2 = 0$

$\therefore$ $a^2 + d^2 + ac + bd = 0$ **જવાબ : (A)**

(2) ઊગમબિંદુ શિરોબિંદુ હોય તેવા પ્રથમ ચરણમાં આવેલા સમબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાજુઓનાં સમીકરણ $y^2 - 6xy + 5x^2 = 0$ દ્વારા દર્શાવેલ હોય, તો તેના વિકર્ણના સૌથી મોટા ઢાળની કિંમત ...... હોય.

(A) $\frac{2+\sqrt{13}}{3}$ (B) $\frac{2-\sqrt{13}}{3}$ (C) $\frac{2\pm\sqrt{13}}{5}$ (D) $\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.1

$y^2 - 6xy + 5x^2 = (y - x)(y - 5x) = 0$

$\therefore$ આપેલ પાસપાસેની બાજુઓ $y = 5x$ તથા $y = x$ છે.

$\therefore$ આકૃતિમાં $\theta_1 - \theta = \theta - \theta_2$

$\therefore$ $2\theta = \theta_1 + \theta_2$

$\therefore$ $tan2\theta = tan(\theta_1 + \theta_2)$

$\therefore$ $\frac{2tan\theta}{1-tan^2\theta} = \frac{tan\theta_1 + tan\theta_2}{1 - tan\theta_1 \, tan\theta_2}$

$= \frac{1+5}{1-5}$ $(tan\theta_1 = m_1 = 1, tan\theta_2 = m_2 = 5)$

$\frac{2tan\theta}{1-tan^2\theta} = \frac{6}{-4} = \frac{-3}{2}$

$\therefore$ $4tan\theta = -3 + 3tan^2\theta$

$\therefore$ $3tan^2\theta - 4tan\theta - 3 = 0$

$\therefore$ $tan\theta = \frac{4 \pm \sqrt{16-4(3)(-3)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$

$\therefore$ $tan\theta = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$ ($P(\theta)$ પ્રથમ ચરણમાં છે.)

બીજી વિકર્ણનો ઢાળ તો ઋણ થશે. **જવાબ : (A)**

(3) બિંદુ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ને જોડતાં રેખાખંડનું બિંદુ $P(x_1 + t(x_2 - x_1), \ y_1 + t(y_2 - y_1))$ અંતઃવિભાજન કરે, તો ......

(A) $t < 0$ (B) $0 < t < 1$ (C) $t > 1$ (D) $t = 1$

ઉકેલ : $P(x_1 + t(x_2 - x_1), \ y_1 + t(y_2 - y_1)) = P(tx_2 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)y_1)$

$P \in \overleftrightarrow{AB}$

પરંતુ બિંદુ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ને જોડતાં રેખાખંડનું બિંદુ P અંતઃવિભાજન કરે છે.

$\therefore \quad P \in \overline{AB}$

$\therefore \quad 0 < t < 1$ **જવાબ : (B)**

(4) રેખાઓ $x + y = 0$, $x - y = 0$ તથા $x - 7 = 0$ વડે બનતા ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર ...... છે.

(A) $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ (B) $(0, 7)$ (C) $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ (D) $(7, 0)$

ઉકેલ : $x + y = 0$ અને $x - y = 0$ પરસ્પર લંબ છે.

રેખાઓ $x + y = 0$, $x - y = 0$ તથા $x - 7 = 0$ વડે બનતો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

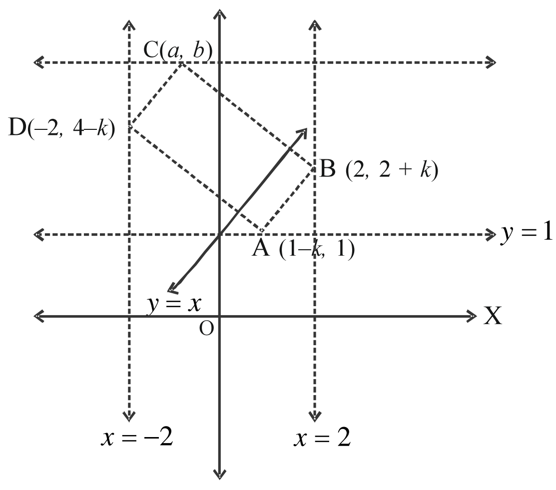
$x + y = 0$, $x - y = 0$ તથા $x - 7 = 0$ ને ઉકેલતાં ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $O(0, 0)$, $A(7, 7)$ અને $B(7, -7)$ મળે અને $m\angle AOB = \frac{\pi}{2}$.

પરિકેન્દ્ર $= \overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ $= (7, 0)$ **જવાબ : (D)**

(5) એક લંબચોરસ $ABCD$ કે જેની બાજુ AB એ રેખા $y = x$ને સમાંતર છે અને શિરોબિંદુ A એ રેખા $y = 1$ પર, શિરોબિંદુ B એ રેખા $x = 2$ પર અને શિરોબિંદુ D એ રેખા $x = -2$ પર આવેલા છે, તો બિંદુ Cના બિંદુગણનું સમીકરણ ...... થાય.

(A) $y = 5$ (B) Y-અક્ષ (C) $x = 5$ (D) X-અક્ષ

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.2

અહીં $\overleftrightarrow{AB}$ એ $y = x$ ને સમાંતર છે. તેથી ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $x - y + k = 0$ છે.

બિંદુ A એ રેખા $y = 1$ પર આવેલ છે અને બિંદુ B એ રેખા $x = 2$ પર આવેલ છે.

$A(1 - k, 1)$, $B(2, 2 + k)$ મળે.

$\overleftrightarrow{AD}$ એ $\overleftrightarrow{AB} : x - y + k = 0$ ને લંબ છે. તેથી $\overleftrightarrow{AD}$ નો ઢાળ $= -1$ થશે.

$\therefore \quad \overleftrightarrow{AD}$નું સમીકરણ $y - 1 = -1(x - 1 + k)$ એટલે કે $y = -x + 2 - k$ થાય.

પરંતુ D નો x-યામ $= -2$. આથી $y = 4 - k$

D ના યામ $= (-2, 4-k)$ મળે.

ધારો કે C ના યામ (a, b) છે.

$\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ $=$ $\overline{BD}$ નું મધ્યબિંદુ

$\therefore$ $a + 1 - k = 2 - 2$ અને $b + 1 = 2 + k + 4 - k$

$\therefore$ $a = k - 1$ અને $b = 5$

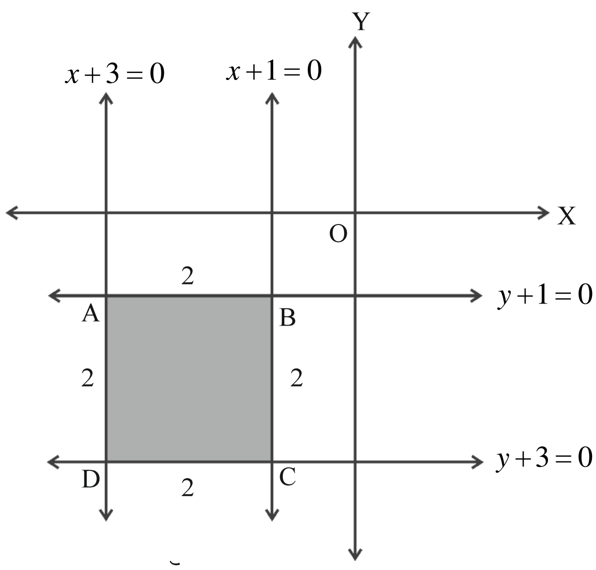
$\therefore$ માંગેલ બિંદુગણ રેખા $y = 5$ દર્શાવે છે.

જવાબ : (A)

(6) રેખાઓની જોડ $xy + x + y + 1 = 0$ અને $xy + 3x + 3y + 9 = 0$ વડે રચાતો ચતુષ્કોણ ...... છે.

(A) લંબચોરસ (B) ચોરસ (C) સમાંતરબાજુ (D) સમબાજુ ચતુષ્કોણ

ઉકેલ :



$xy + x + y + 1 = 0$

$\therefore$ $(x+1)(y+1) = 0$

$\therefore$ $x + 1 = 0$ અથવા $y + 1 = 0$

હવે, $xy + 3x + 3y + 9 = 0$

$\therefore$ $(x+3)(y+3) = 0$

$\therefore$ $x + 3 = 0$ અથવા $y + 3 = 0$

ચતુષ્કોણની બાજુઓ $x + 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $y + 1 = 0$, $y + 3 = 0$ છે.

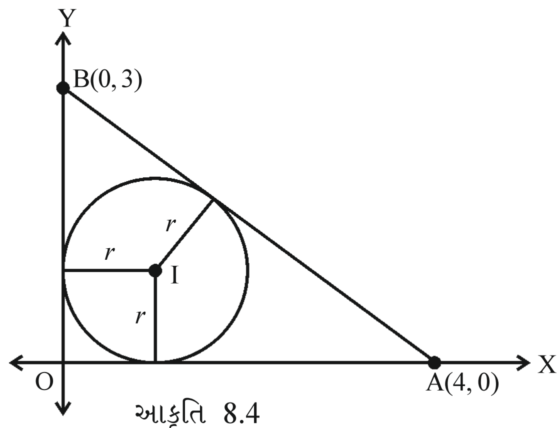
$\therefore$ $AB = BC = CD = DA = 2$ તથા બાજુઓ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore$ □ $ABCD$ ચોરસ છે. **જવાબ : (B)**

(7) રેખાઓ $x = 0$, $y = 0$ તથા $3x + 4y - 12 = 0$ વડે રચાતા ત્રિકોણના અંતઃકેન્દ્રના યામ

(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (C) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (D) $(1, 1)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.4

ધારો કે $x=0$, $y=0$ અને $3x+4y=12$ દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર I છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે અંતઃકેન્દ્ર Iના યામ (r, r) થશે.

હવે, કેન્દ્ર (r, r)નું રેખા $3x+4y-12=0$ થી લંબઅંતર ત્રિજ્યા r જેટલું થશે.

$$\therefore \quad r=\frac{|3r+4r-12|}{\sqrt{9+16}}$$

$\therefore \quad 7r-12=5r$ અથવા $7r-12=-5r$

$\therefore \quad 2r=12$ અથવા $7r+5r=12$

$\therefore \quad r=6$ અથવા $r=1$

પરંતુ $r=6$ શક્ય નથી. ((r, r) ત્રિકોણની અંદર હોય.)

$\therefore \quad r=1$

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્રના યામ $=(1, 1)$ **જવાબ : (D)**

બીજી રીત : $OB=a=3,\ OA=b=4,\ AB=c=5$

$A(x_1, y_1)=(4, 0),\ B(x_2, y_2)=(0, 3),\ O(x_3, y_3)=(0, 0)$

$$I=\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)=\left(\tfrac{12}{12}, \tfrac{12}{12}\right)=(1, 1)$$

ત્રીજી રીત : અંતઃકેન્દ્ર (r, r) છે.

$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{6}{6}=1$ આથી કેન્દ્ર $(1, 1)$ છે.

ચોથી રીત : $x=0$ તથા $y=0$ પરસ્પર લંબ હોવાથી કાટકોણ ત્રિકોણ રચશે.

આકૃતિ પરથી કાટકોણ ત્રિકોણની અંદર આવેલા વર્તુળની અંતઃત્રિજ્યા $r=\frac{OA+OB-AB}{2}$ થાય.

જ્યાં $OA=3,\ OB=4,\ AB=5$ છે.

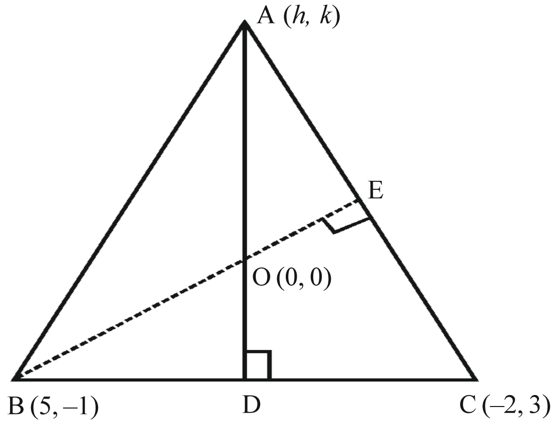
$\therefore\ r=\frac{3+4-5}{2}=1$

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્રના યામ $=(1, 1)$ મળે.

(8) જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $(5, -1)$ અને $(-2, 3)$ હોય તથા લંબકેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય, તો ત્રીજા શિરોબિંદુના યામ ......

(A) $(4, 7)$ (B) $(-4, -7)$ (C) $(2, -3)$ (D) $(5, -1)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.5

ધારો કે $A(h, k)$ ત્રીજું શિરોબિંદુ છે. $\overline{OA} \perp \overline{BC}$

$\therefore \left(\frac{k-0}{h-0}\right)\left(\frac{4}{-7}\right) = -1$ (ઢાળનો ગુણાકાર)

$\therefore 7h = 4k$ (1)

અને $\overline{OB} \perp \overline{AC}$ પણ છે. આથી, $\left(\frac{k-3}{h+2}\right)\left(\frac{-1}{5}\right) = -1$

$\therefore 5h - k + 13 = 0$ (2)

(1), (2) ને ઉકેલતાં $h = -4,\ k = -7$

$\therefore$ ત્રીજા શિરોબિંદુના યામ $A(-4, -7)$ થાય. **જવાબ : (B)**

(9) એક ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર $H\left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ અને પરિકેન્દ્ર $P\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ હોય, તો તેના મધ્યકેન્દ્ર G ના યામ : ......

(A) $\left(13+2\sqrt{7},\ 11\right)$ (B) $\left(13, 11+2\sqrt{5}\right)$

(C) $\left(\frac{13+2\sqrt{7}}{6}, \frac{11+2\sqrt{5}}{6}\right)$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં, પરિકેન્દ્ર $P\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, લંબકેન્દ્ર $H\left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ તથા ધારો કે મધ્યકેન્દ્ર $G(x, y)$ છે, તો

મધ્યકેન્દ્ર G એ $\overline{PH}$ નું P તરફથી $1:2$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ G ના યામ $= \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{13}{2}\right)+\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{13+2\sqrt{7}}{6}, \frac{11+2\sqrt{5}}{6}\right)$$ **જવાબ : (C)**

(10) રેખા $x+2y=15$ ની દિશામાં બિંદુ $(1, 2)$થી રેખા $3x-y-5=0$ નું અંતર = ...

(A) $2\sqrt{5}$ (B) $4\sqrt{5}$ (C) $\frac{2\sqrt{5}}{7}$ (D) $\frac{4\sqrt{5}}{7}$

ઉકેલ : $x+2y-15=0$ ની દિશામાં આવેલી રેખા એટલે કે તેને સમાંતર રેખાનું વ્યાપક સમીકરણ $x+2y+k=0$ છે. વળી તે $(1, 2)$ માંથી પસાર થાય છે. $1+4+k=0$ તેથી $k=-5$.

$\therefore$ તેનું સમીકરણ $x+2y-5=0$ મળે.

હવે $3x-y-5=0$ અને $x+2y-5=0$ ના છેદબિંદુના યામ = $\left(\frac{15}{7}, \frac{10}{7}\right)$

$\therefore$ માંગેલ અંતર = બિંદુ $\left(\frac{15}{7}, \frac{10}{7}\right)$થી $(1, 2)$ વચ્ચેનું અંતર

$= \sqrt{\left(\frac{15}{7}-1\right)^2+\left(\frac{10}{7}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{49}+\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{80}}{7} = \frac{4\sqrt{5}}{7}$ **જવાબ : (D)**

(11) ત્રણ રેખાઓ કે જેને $y^3-4x^2y=0$ વડે દર્શાવી છે, તે ......

(A) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ બનાવે (B) સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવે (C) કાટકોણ ત્રિકોણ બનાવે (D) ત્રિકોણ ન બનાવે.

ઉકેલ : $y^3-4x^2y=0 \Rightarrow y\left(y^2-4x^2\right)=0$

$\therefore y(y-2x)(y+2x)=0$

$\therefore y=0,\ y-2x=0,\ y+2x=0$

$\therefore y=0,\ y=2x,\ y=-2x$ $(0, 0)$ આગળ સંગામી છે.

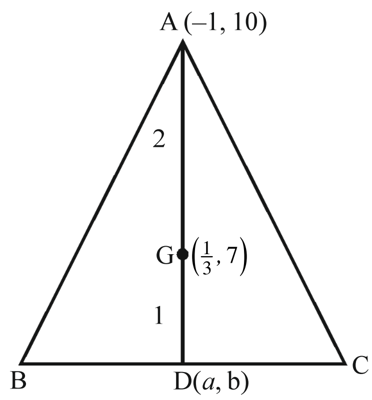
નોંધ : ત્રિઘાત સમપરિમાણ સમીકરણ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રણ રેખાઓ દર્શાવે છે.

$\therefore$ ત્રિકોણ ન બનાવે. **જવાબ : (D)**

(12) ત્રિકોણ ABCમાં $A(-1, 10)$, ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર $P(-3, 5)$ અને લંબકેન્દ્ર $H(7, 11)$ હોય, તો $\overline{BC}$ના મધ્યબિંદુના યામ ...... થાય.

(A) $\left(7, \frac{11}{2}\right)$ (B) $\left(1, \frac{11}{2}\right)$ (C) $\left(5, \frac{11}{2}\right)$ (D) $\left(-3, \frac{11}{2}\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.6

અહીં પરિકેન્દ્ર Pના યામ $(-3, 5)$ તથા લંબકેન્દ્ર Hના યામ $(7, 11)$

ધારો કે મધ્યકેન્દ્ર Gના યામ = (x, y) છે.

હવે, ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર G એ $\overline{PH}$નું P તરફથી $1:2$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ G ના યામ $= \left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

$= \left(\dfrac{(1)(7)+2(-3)}{1+2}, \dfrac{(1)(11)+2(5)}{1+2}\right) = \left(\frac{1}{3}, 7\right)$

આકૃતિ પરથી $AG:GD = 2:1$ તથા $D(a, b)$ લઈએ.

$\therefore$ G એ $\overline{AD}$ નું A તરફથી $2:1$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ G ના યામ $= \left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

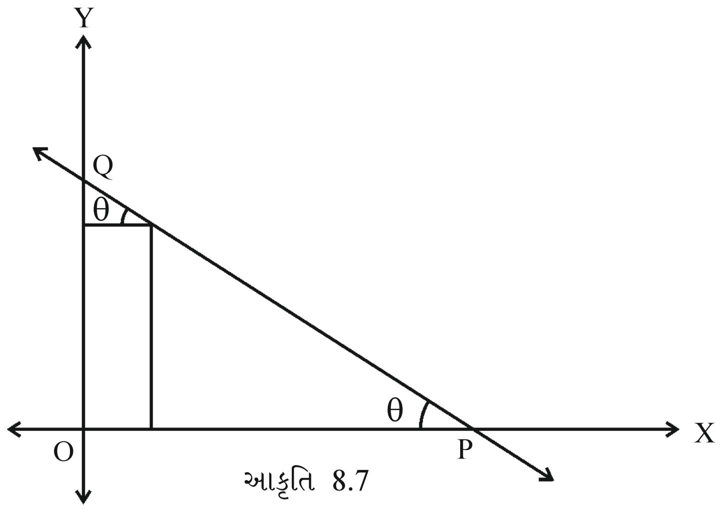
$\left(\frac{1}{3}, 7\right) = \left(\dfrac{2a+1(-1)}{2+1}, \dfrac{2(b)+1(10)}{2+1}\right)$

$\therefore$ $2a-1=1,\ 2b+10=21$ આથી, $a=1,\ b=\frac{11}{2}$. માટે $D\left(1, \frac{11}{2}\right)$ **જવાબ : (B)**

(13) (2, 8) માંથી પસાર થતી ઋણ ઢાળવાળી રેખા $\overleftrightarrow{PQ}$ એ ધન યામાક્ષોને P અને Qમાં છેદે છે. રેખા $\overleftrightarrow{PQ}$ બદલાતી હોય તો OP + OQનું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે.

(A) 10 (B) 18 (C) 2 (D) 8

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.7

$m\angle OPQ = \theta$

$OP = 2 + 8\cot\theta$, $OQ = 8 + 2\tan\theta$

$\therefore$ $OP + OQ = 10 + (8\cot\theta + 2\tan\theta)$

$\geq 10 + 8$ (સમાંતર મધ્યક $\geq$ સમગુણોત્તર મધ્યક)

નોંધ : અહીં $\overleftrightarrow{PQ}$ નો ઢાળ ઋણ છે તેથી $\tan\theta > 0$ and $\cot\theta > 0$. **Ans. : (C)**

(14) $m(2x+3y+6)+n(3x+2y+9)=0$ એ રેખાઓની સંહતિ દર્શાવે, તો બિંદુ $P(2,3)$ થી ન્યૂનતમ અંતરે આવેલી આ સંહતિની રેખાનું સમીકરણ = ...

(A) $5x+3y-15=0$ (B) $5x-3y+15=0$ (C) $5x+3y+15=0$ (D) $5x-3y-15=0$

ઉકેલ : અહીં રેખાઓ $2x+3y+6=0$ અને $3x+2y+9=0$ ને ઉકેલતાં $(-3, 0)$ મળે.

$\therefore$ આ બંને રેખાઓનું છેદબિંદુ $(-3, 0)$ મળે.

$\therefore$ $(2, 3)$ અને $(-3, 0)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ,

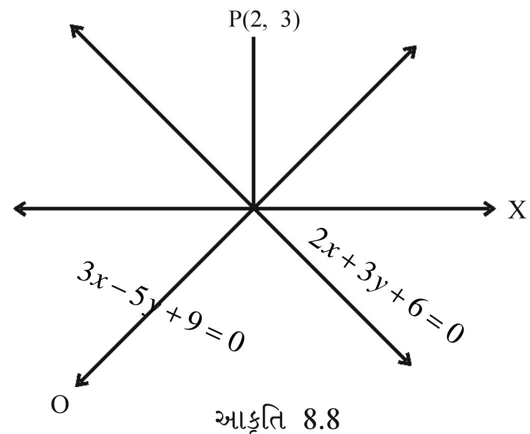
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $3x-5y+9=0$

$\therefore$ $P(2, 3)$થી ન્યૂનતમ અંતરે આવેલી રેખા એ $3x-5y+9=0$ ને લંબ અને $(-3, 0)$માંથી પસાર થતી રેખા દર્શાવે છે.

$\therefore$ $3x-5y+9=0$ ને લંબરેખાનું સમીકરણ, $5x+3y+k=0$ છે. વળી તે $(-3, 0)$માંથી પસાર થાય તો $k=15$ મળે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $5x+3y+15=0$.



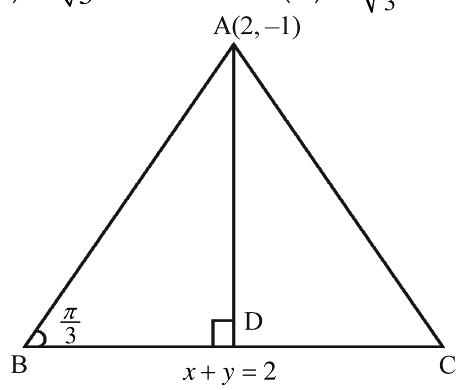
આકૃતિ 8.8

જવાબ : **(C)**

(15) સમબાજુ ત્રિકોણના આધારનું સમીકરણ $x+y=2$ અને શિરોબિંદુ $(2, -1$ છે, તો ત્રિકોણની બાજુનું માપ = ...

(A) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.9

અહીં ત્રિકોણ એ સમબાજુ છે.

$\therefore$ વેધ મધ્યગા પર સંપાતી છે.

અને $m\angle ABC = \frac{\pi}{3}$

હવે $AD = \frac{|2-1-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\angle ADB$ એ કાટકોણ છે.

$\frac{AD}{AB} = sin\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

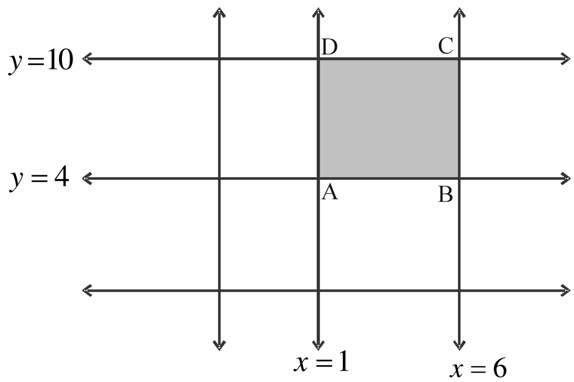
$\therefore \ AB = AD\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

આથી સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈ = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **જવાબ : (C)**

(16) $x^2 - 7x + 6 = 0$ અને $y^2 - 14y + 40 = 0$ વડે બનતા લંબચોરસનો વિકર્ણ ......

(A) $5x - 6y = 0$ (B) $5x + 6y = 0$ (C) $6x - 5y - 14 = 0$ (D) $6x - 5y + 14 = 0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.10

$x^2 - 7x + 6 = 0$ આથી, $(x-6)(x-1) = 0$

$\therefore \ x - 6 = 0$ અને $x - 1 = 0$ (1)

$y^2 - 14y + 40 = 0$ આથી, $(y-4)(y-10) = 0$

$\therefore \ y - 4 = 0$ અને $y - 10 = 0$ (2)

(1) અને (2) ઉકેલતાં, જોડ પરથી, શિરોબિંદુઓ $A(1, 4)$, $B(6, 4)$, $C(6, 10)$ અને $D(1, 10)$ મળે.

વિકર્ણ $\overleftrightarrow{AC}$ નું સમીકરણ,

$y - 4 = \frac{10-4}{6-1}(x-1)$ આથી, $5y - 20 = 6x - 6$

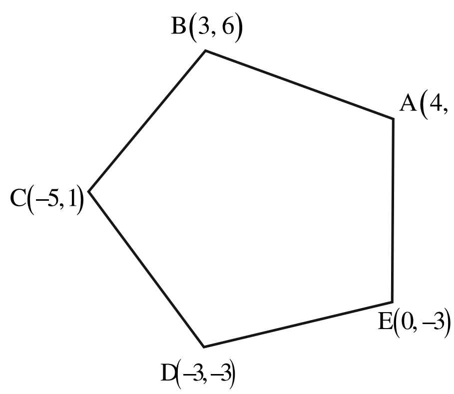
$\therefore \ 6x - 5y + 14 = 0$

$\overleftrightarrow{BD} : y - 4 = \frac{-6}{5}(x - 6)$ એટલે કે $6x + 5y - 56 = 0$ **જવાબ : (D)**

(17) જેનાં શિરોબિંદુઓ $(4, 1), (3, 6), (-5, 1), (-3, -3)$ અને $(0, -3)$ હોય તેવા પંચકોણનું ક્ષેત્રફળ = ...

(A) 56.5 ચોરસ એકમ (B) 30 ચોરસ એકમ (C) 93 ચોરસ એકમ (D) 46.5 ચોરસ એકમ

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.11

પંચકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}\left|\left\{\begin{Vmatrix}4 & 1\\3 & 6\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}3 & 6\\-5 & 1\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}-5 & 1\\-3 & -3\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}-3 & -3\\0 & -3\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}0 & -3\\4 & 1\end{Vmatrix}\right\}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left\{(24-3)+(3+30)+(15+3)+(9-0)+(0+12)\right\}\right.$$

$$= \left|\frac{1}{2}(21+33+18+9+12)\right| = \left|\frac{1}{2}(93)\right| = 46.5$$

$\therefore$ પંચકોણનું ક્ષેત્રફળ = 46.5 ચોરસ એકમ **જવાબ : (D)**

(18) બિંદુઓ $P(2, 3), Q(3, 5), R(7, 7)$ અને $S(4, 5)$ એ રીતે છે કે,

(A) P, Q, R અને S એ સમરેખ (B) $PQRS$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે

(C) S એ ΔPQR ની પર છે. (D) S એ ΔPQR ની અંદરના ભાગમાં છે.

ઉકેલ : ΔPQR નું મધ્યકેન્દ્ર $= \left(\frac{2+3+7}{3}, \frac{3+5+7}{3}\right) = (4, 5) = S$

આથી S એ ΔPQR ના અંદરના ભાગમાં છે. **જવાબ : (D)**

(19) રેખાઓ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો $tan\alpha$ = ...

(A) $\left|\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right|$ (B) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ (C) $\left|\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right|$ (D) $\left|\frac{2ab}{a^2-b^2}\right|$

ઉકેલ : રેખા $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ નો ઢાળ $m_1 = \frac{-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{-b}{a}$ તથા $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ નો ઢાળ $m_2 = -\frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{b}} = \frac{b}{a}$

$$tan\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-\frac{b}{a}-\frac{b}{a}}{1+\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)}\right| = \left|\frac{2ab}{a^2-b^2}\right|$$ **જવાબ : (D)**

(20) $x+y=0$ અને $y=[\pi]$ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ = ...

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0

ઉકેલ : $x+y=0$ નો ઢાળ $m_1 = \frac{-1}{1} = -1$ અને $y=[\pi]=3$ નો ઢાળ $m_2 = 0$.

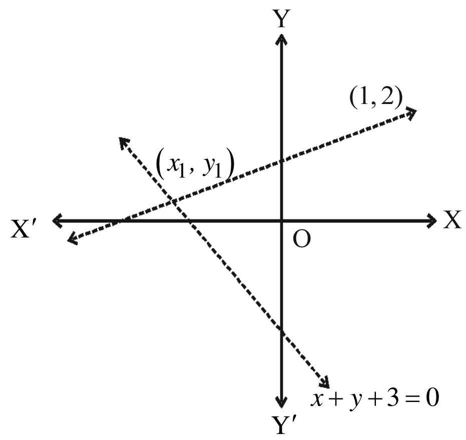
$\therefore$ બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-1-0}{1+(-1)0}\right| = 1.$$ આથી $\alpha = \frac{\pi}{4}$. **જવાબ : (A)**

(21) બિંદુ $(1, 2)$માંથી દોરવામાં આવેલ રેખાનું, રેખા $x+y+3=0$ સાથેનું છેદબિંદુ એ $(1, 2$ થી $3\sqrt{2}$ અંતરે હોય, તો રેખાનો ઢાળ = ...

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.12

$(1, 2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$\frac{x-x_1}{cos\theta} = \frac{y-y_1}{sin\theta} = r$, જ્યાં $r = 3\sqrt{2}$ $(0<\theta<2\pi)$ એટલે કે $\frac{x-1}{cos\theta} = \frac{y-2}{sin\theta} = 3\sqrt{2}$.

$(1, 2)$ થી r અંતરે કોઈ બિંદુ તેના પર હોય, તો

$\left(1+3\sqrt{2}\,cos\theta,\ 2+3\sqrt{2}\,sin\theta\right)$ બિંદુ $x+y+3=0$ પર હશે.

$\therefore\ 1+3\sqrt{2}\,cos\theta+2+3\sqrt{2}\,sin\theta+3 = 0$

$\therefore\ cos\theta+sin\theta=-\sqrt{2}$

$cos^2\theta+sin^2\theta+2sin\theta\,cos\theta = 2$

$\therefore\ sin2\theta=1$. આથી, $2\theta=\frac{\pi}{2}$ અથવા $\frac{5\pi}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{5\pi}{4}$

$cos\,\theta+sin\,\theta=-\sqrt{2}$ હોવાથી $\theta=\frac{5\pi}{4}$

$(1, 2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ $=$ $tan\theta = tan\,\frac{5\pi}{4}=1$ **જવાબ : (C)**

બીજી રીત :

$cos\,\theta+sin\,\theta=-\sqrt{2}$

$1+tan\theta=-\sqrt{2}\,sec\theta$

$1+2tan\theta+tan^2\theta=2(1+tan^2\theta)$

$tan^2\theta-2tan\theta+1=0$

$(tan\theta-1)^2=0$

$tan\theta=1=m$

ત્રીજી રીત :

$cos\theta+sin\theta=-\sqrt{2}$

$cos\theta\bullet\frac{1}{\sqrt{2}}+sin\theta\,\frac{1}{\sqrt{2}}=-1$

$cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=cos\pi$

$\theta=-\frac{\pi}{4}=(2n+1)\,\pi$

$\theta-\frac{\pi}{4}=-\pi$ $(-\pi<\theta\le\pi)$

$\theta=-\frac{3\pi}{4}$ આથી $m=tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=1$

(22) જો રેખાઓ $x sec\theta + y cosec\theta = a$ અને $x cos\theta - y sin\theta = a cos\, 2\theta$ પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલ લંબ રેખાખંડોની લંબાઈ p અને p' હોય, તો $4p^2 + p'^2$ ની કિંમત = ...

(A) a^2 (B) $3a^2$ (C) $2a^2$ (D) $4a^2$

ઉકેલ : $p = \frac{|0+0-a|}{\sqrt{sec^2\theta + cosec^2\theta}} = |a sin\theta\ cos\theta|$

$p' = \frac{|0-0-a cos\, 2\theta|}{\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta}} = |a cos\, 2\theta|$

એટલે કે $p = |a sin\theta \cos\theta| = \left|\frac{a}{2}\, sin\, 2\theta\right|$. આથી $2p = |a sin\, 2\theta|$.

વર્ગ કરીને અને ઉમેરતાં, $4p^2 + (p')^2 = a^2$. **જવાબ : (A)**

(23) રેખાઓ $x + (a-1)y + 1 = 0$ અને $2x + a^2y - 1 = 0$ એ પરસ્પર લંબ છે, તો

(A) $|a| = 2$ (B) $0 < a < 1$ (C) $-1 < a < 0$ (D) $a = -1$

ઉકેલ : રેખાઓના ઢાળ $-\frac{1}{a-1}$ અને $-\frac{2}{a^2}$ છે.

આ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore \left(-\frac{1}{a-1}\right)\left(-\frac{2}{a^2}\right) = -1$

$\therefore 2 = -(a-1)\, a^2 = -a^3 + a^2$

$\therefore a^3 - a^2 + 2 = 0$

$\therefore (a+1)(a^2 - 2a + 2) = 0$

કોઈ પણ $a \in R$ માટે $a^2 - 2a + 2 \neq 0$

$\therefore a = -1$ **જવાબ : (D)**

નોંધ : $a = 0, 1$ શક્ય નથી તે જુઓ.

(24) ત્રિકોણની બાજુઓ $x + y - 6 = 0$, $7x + y - 6 = 0$ અને $x - 7y = 6$ છે.
તેના અંતઃકેન્દ્રના યામ = ...

(A) $\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ (B) $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{7}\right)$ (C) $(-1, 5)$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : આપેલ દરેક રેખાઓ પર $\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ માંથી દોરેલ લંબની લંબાઈ $= \frac{12}{5\sqrt{2}}$

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્ર $= \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$. **જવાબ : (A)**

(25) જો $a+b+c=0$, તો તમામ રેખાઓ $ax+by+c=0$ $\left(a^2+b^2 \neq 0\ a, b, c \in R\right)$ નિશ્ચિત બિંદુ ...... માંથી પસાર થાય છે.

(A) $(1, 1)$ (B) $(1, 0)$ (C) $(0, 0)$ (D) $(0, 1)$

ઉકેલ : રેખાનું સમીકરણ $ax+by+c=0$ છે.

$ax+by+c=0$ માં $c=-a-b$ મૂકતાં, $ax+by-a-b=0$

$\therefore$ $a(x-1)+b(y-1)=0$, જ્યાં $a^2+b^2 \neq 0$

$\therefore$ $ax+by+c=0$ નિશ્ચિત બિંદુ $(1, 1)$ માંથી પસાર થાય છે. **જવાબ : (A)**

નોંધ : $ax+by+c=$ $a \cdot 1+b \cdot 1+c=0$ એ $C(1, 1)$ માંથી પસાર થાય છે, જે નિશ્ચિત બિંદુ છે.

(26) $\left(a^2-a-2\right)x+(a+1)\ y+a=0$ રેખા X–અક્ષને સમાંતર છે, તો a = ...

(A) –1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

ઉકેલ : $\left(a^2-a-2\right)x+(a+1)\ y+a=0$ રેખા X–અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore$ x નો સહગુણક $=0$, $a+1 \neq 0$ y નો સહગુણક $=a+1 \neq 0$

$\therefore$ $a^2-a-2=0$ $a+1 \neq 0$

$\therefore$ $(a-2)(a+1)=0$

$\therefore$ $a=2$ **જવાબ : (B)**

(27) જો બિંદુ $(1, 2)$ અને $(3, 4)$ એ રેખા $3x-5y+a=0$ ની એક બાજુએ હોય, તો ......

(A) $7<a<11$ (B) $a<0$ (C) $a=0$ (D) $a \in R-[7, 11]$

ઉકેલ : અહીં બિંદુઓ $(1, 2)$ અને $(3, 4)$ એ રેખા $3x-5y+a=0$ ની એક જ બાજુએ છે.

$\therefore$ $3-10+a$ અને $9-20+a$ સમચિહ્ન હોવા જોઈએ.

એટલે કે $a-7$ અને $a-11$ ને સમચિહ્ન હોવા જોઈએ.

$\therefore$ $a-7>0$ અને $a-11>0$ અથવા $a-7<0$ અને $a-11<0$

એટલે કે $a>7$, $a>11$ અથવા $a<7$, $a<11$

એટલે કે $a>11$ અથવા $a<7$. **જવાબ : (D)**

(28) રેખાઓ $5x+12y-1=0$ અને $10x+24y+k=0$ વચ્ચેનું અંતર 2 છે, તો k ની કિંમત = ...

(A) –54 (B) 50 (C) –54, 50 (D) 53

ઉકેલ : $5x+12y-1=0$ તથા $5x+12y+\frac{k}{2}=0$ સમાંતર રેખાઓ છે.

તેમની વચ્ચેનું અંતર $=\frac{\left|\frac{k}{2}+1\right|}{\sqrt{25+144}}=2$. આથી $|k+2|=52$ આથી $k=50, -54$ **જવાબ : (A), (B), (C)**

(29) જો રેખાઓ $x+2ay+a=0$, $x+3by+b=0$ અને $x+4cy+c=0$ એ સંગામી હોય, તો a, b, c ......માં હોય. $(a+c \neq 0)$, $(a \neq 0)$, $(c \neq 0)$

(A) સમાંતર શ્રેણી (B) સમગુણોત્તર શ્રેણી (C) સ્વરિત શ્રેણી (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં આપેલ રેખાઓ સંગામી છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2a & a \\ 1 & 3b & b \\ 1 & 4c & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -bc + 2a(b-c) + a(4c-3b) = 0$$

$$\therefore -bc + 2ac + (-ab) = 0$$

$$\therefore 2ac = b(a+c)$$

$$\therefore b = \frac{2ac}{a+c}$$

$\therefore$ a, b, c એ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. **જવાબ : (C)**

(30) જે રેખા X-અક્ષને સમાંતર હોય અને વક્ર $y=\sqrt{x}$ ને $\frac{\pi}{4}$ના માપના ખૂણે છેદે છે તેનું સમીકરણ ......

(A) $x=\frac{1}{4}$ (B) $y=\frac{1}{4}$ (C) $y=\frac{1}{2}$ (D) $y=1$

ઉકેલ : X-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ $y=k$ છે. ($k>0$ કારણ કે $\sqrt{x}>0$)

તે $y=\sqrt{x}$ ને છેદે છે. $y=k$ હોવાથી, $x=k^2$

છેદબિંદુના યામ (k^2, k).

હવે, $y=\sqrt{x}$. આથી, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(k^2, k) આગળ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2k} = tan\frac{\pi}{4} = 1$. આથી, $k=\frac{1}{2}$. [રેખા વક્રને $\frac{\pi}{4}$માપના ખૂણે છેદે છે.]

$\therefore$ માંગેલ રેખા $y=\frac{1}{2}$ છે. **જવાબ : (C)**

(31) જો સમબાજુ ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુ A$(-a, 0)$ અને B$(a, 0)$, $a > 0$, હોય અને ત્રીજુ શિરોબિંદુ C x-અક્ષ પર આવેલું હોય તો ΔABCનાં પરિવૃતનું સમીકરણ .... [Online April 22, 2013]

(A) $3x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}ay = 3a^2$ (B) $3x^2 + 3y^2 - 2ay = 3a^2$

(C) $x^2 + y^2 - 2ay = a^2$ (D) $x^2 + y^2 - \sqrt{3}ay = a^2$

ઉકેલ : ધારો કે Cના યામ (x, y) છે.

હવે, $CA^2 = CB^2 = AB^2$

$\Rightarrow (x+a)^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2 = (2a)^2$

$\Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = 4a^2$ ...(i)

અને $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 4a^2$ ...(ii)

(i) અને (ii), પરથી, $x = 0$ અને $y = \pm\sqrt{3}a$

(x, y) એ x-અક્ષની ઉપર હોય તો અને $a > 0$

તેથી $y = \sqrt{3}a$

$\therefore$ C $(0, \sqrt{3}a)$.

પરિવૃતનું સમીકરણ

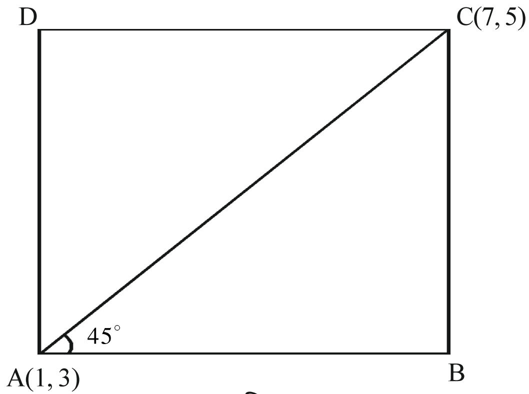
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ **જવાબ : (A)**

(32) $A(1, 3)$ અને $C(7, 5)$ એ ચોરસની બે સામસામેનાં શિરોબિંદુઓ છે, તો A માંથી પસાર થતી બાજુનું સમીકરણ એ ......

(A) $x+2y-7=0$ અથવા $2x-y+1=0$ (B) $x-2y+5=0$

(C) $2x+y-5=0$ (D) એક પણ નહિ.

જવાબ :



આકૃતિ 8.13

ધારો કે A માંથી પસાર થતી બાજુને સમાવતી રેખાનો ઢાળ m છે.

$\overleftrightarrow{AC}$ નો ઢાળ $= \frac{5-3}{7-1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-\frac{1}{3}}{1+\frac{m}{3}}\right|$ આથી, $1 = \left|\frac{3m-1}{m+3}\right|$

$\therefore 3m-1 = m+3$ અથવા $3m-1 = -m-3$

$\therefore 2m = 4$ અથવા $4m = -2$

$\therefore m = 2$ અથવા $m = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD}$ નું સમીકરણ $y-3 = 2(x-1)$ આથી, $2x-y+1=0$

$\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $y-3 = -\frac{1}{2}(x-1)$ આથી, $x+2y-7=0$ **જવાબ : (A)**

(33) જો રેખાઓ $x\sec\theta + y\operatorname{cosec}\theta = 2a$ અને $x\cos\theta + y\sin\theta = a\cos 2\theta$ પર $(0, 0)$ માંથી દોરેલ લંબ અનુક્રમે

p, p' હોય તો $\left(\frac{p}{p'} + \frac{p'}{p}\right)^2 = ...$

(A) $4\cos^2 4\theta$ (B) $4\operatorname{cosec}^2 4\theta$ (C) $4\sin^2 4\theta$ (D) $4\cot^2 4\theta$

ઉકેલ : અહીં, $p = \frac{|0+0-2a|}{\sqrt{sec^2\theta + cosec^2\theta}} = |2asin\theta\ cos\theta| = |asin\ 2\theta|$

અને $p' = \frac{|0+0-a\cos 2\theta|}{\sqrt{\cos^2\theta + sin^2\theta}} = |a\ cos\ 2\theta|$

$\left(\frac{p}{p'} + \frac{p'}{p}\right)^2 = (tan\ 2\theta + cot\ 2\theta)^2 = tan^2 2\theta + cot^2 2\theta + 2$

$= \frac{sin^2 2\theta}{cos^2 2\theta} + \frac{cos^2 2\theta}{sin^2 2\theta} + 2 = \frac{1}{sin^2 2\theta cos^2 2\theta} = \frac{4}{sin^2 4\theta} = 4cosec^2 4\theta$

જવાબ : **(B)**

(34) આપેલ કિંમતો પૈકી αની ...... કિંમત માટે રેખા $xcos\alpha + ysin\alpha = p$ (જ્યાં $p \neq 0$) નો ઢાળ $\sqrt{3}$ થાય.

(A) $-\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $-\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

ઉકેલ : $xcos\alpha + ysin\alpha = p$ નો ઢાળ $= -\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = \sqrt{3}$

$\therefore\ tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ tan\alpha = tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = tan\left(\pi - \left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\therefore\ \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ જવાબ : **(D)**

(35) ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર કયા બિંદુ પર કરવાથી બિંદુ $(6, -1)$ના યામો બદલાઈને $(8, -4)$ થાય ?

(A) $(2, -3)$ (B) $(-3, 2)$ (C) $(3, -2)$ (D) $(-2, 3)$

ઉકેલ : ધારો કે ઊગમબિંદુ $O(0, 0)$નું સ્થાનાંતર $O'(h, k)$ બિંદુ પર કરવાથી બિંદુ $(6, -1$ ના યામો બદલાઈને $(8, -4)$ થાય છે.

અહીં, $(x, y) = (6, -1), (x', y') = (8, -4)$

હવે, $x = x' + h,\ y = y' + k$

$\therefore\ 6 = 8 + h$ અને $-1 = -4 + k$

$\therefore\ h = -2$ અને $k = 3$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ $(h, k) = (-2, 3)$ જવાબ : **(D)**

(36) ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર $(-2, 3)$ બિંદુ આગળ કરતાં ...... બિંદુના નવા યામ $(3, -2)$ થાય.

(A) $(-1, 1)$ (B) $(1, 1)$ (C) $(1, -1)$ (D) $(-1, -1)$

ઉકેલ : અહીં, $(h, k) = (-2, 3), (x', y') = (3, -2)$

હવે, $x = x' + h,\ y = y' + k$

$\therefore\ x = 3 - 2 = 1,\ y = -2 + 3 = 1$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુના યામ $(1, 1)$ છે. જવાબ : **(B)**

(37) Y-અક્ષની સાથે $\frac{\pi}{6}$ માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાનો ઢાળ = ...

(A) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\pm\sqrt{3}$ (C) $-\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$

ઉકેલ : રેખા Y-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{6}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે. તેથી માંગેલ રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{3}$ કે $\frac{2\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનો ઢાળ $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ અથવા $\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$ મળે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનો ઢાળ $= \pm\sqrt{3}$ **જવાબ : (B), (C), (D)**

(38) રેખાઓ $\{(x, 0) \mid x \in R\}$ તથા $\{(0, y) \mid y \in R\}$ વચ્ચેનો ખૂણો ...... છે.

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) 3

ઉકેલ : $\{(x, 0) \mid x \in R\}$ = X-અક્ષ,

$\{(0, y) \mid y \in R\}$ = Y-અક્ષ.

રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ = X-અક્ષ તથા Y-અક્ષ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ = $\frac{\pi}{2}$. **જવાબ : (A)**

(39) રેખાઓ $x = y$ તથા $y = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... છે.

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : અહીં રેખા $x = y$ એટલે કે $x - y = 0$ નો ઢાળ $m_1 = 1$ રેખા. $y = 0$ નો ઢાળ $m_2 = 0$.

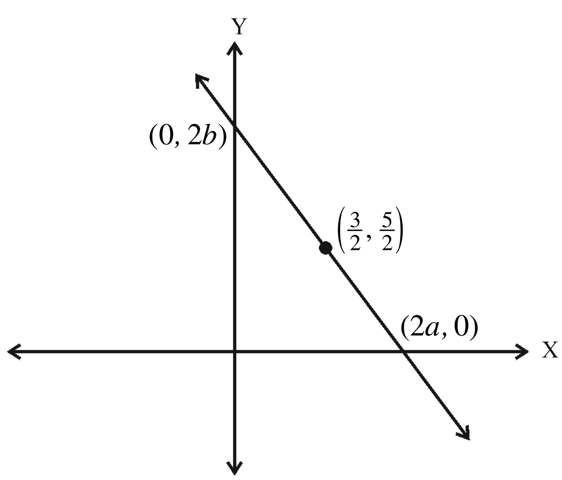
$\therefore$ $\tan\alpha = 1$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ **જવાબ : (D)**

(40) રેખાના અક્ષો વચ્ચે અંતરાયેલ રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ હોય, તો તે રેખાનું સમીકરણ ...... થાય.

(A) $3x+5y-15=0$ (B) $5x+3y-15=0$ (C) $3x+5y+15=0$ (D) $5x+3y+15=0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.14

રેખાના અક્ષો વચ્ચે અંતરાયેલ રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (a, b) હોય, તો તે રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$ છે.

$\therefore \ bx + ay - 2ab = 0$

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y - 2\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ છે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $5x + 3y - 15 = 0$ છે. **જવાબ : (B)**

(41) $4x - 7y + 10 = 0, \ x + y = 5, \ 7x + 4y = 15$ વડે બનતા ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર શોધો.

(A) $(-1, -2)$ (B) $(-1, 2)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(1, -2)$

ઉકેલ : ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં સમીકરણ અનુક્રમે,

$4x - 7y + 10 = 0, \ x + y = 5$ અને $7x + 4y = 15$ છે.

અહીં, રેખાઓ $4x - 7y + 10 = 0$ તથા $7x + 4y - 15 = 0$ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore$ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

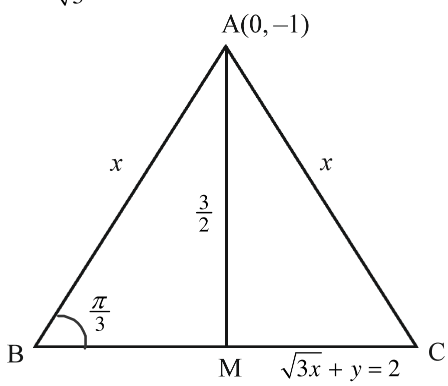
$\therefore$ $7x + 4y - 15 = 0$ તથા $4x - 7y + 10 = 0$ નું છેદબિંદુ લંબકેન્દ્ર થાય.

$4x - 7y + 10 = 0$ અને $7x + 4y - 15 = 0$ ને ઉકેલતાં, લંબકેન્દ્ર $= (1, 2)$. **જવાબ : (C)**

(42) સમભુજ ત્રિકોણની એકબાજુને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $\sqrt{3}x + y = 2$ તથા $(0, -1)$ એક શિરોબિંદુ હોય તો આ ત્રિકોણની બાજુનું માપ ......

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.15

$(0, -1)$ એ $\sqrt{3}x + y = 2$ પર નથી તે સ્પષ્ટ છે.

$(0, -1)$ માંથી $\sqrt{3}x + y = 2$ પરના લંબનું માપ $= \frac{\left|\sqrt{3}(0) + (-1) - 2\right|}{\sqrt{3 + 1}} = \frac{3}{2}$

ધારો કે બાજુનું માપ x છે.

$\therefore \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2$

$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{9}{4} = x^2$

$\therefore x^2 = 3$

$\therefore x = \sqrt{3}$.

બીજી રીત :

$x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} = \frac{3}{2}$

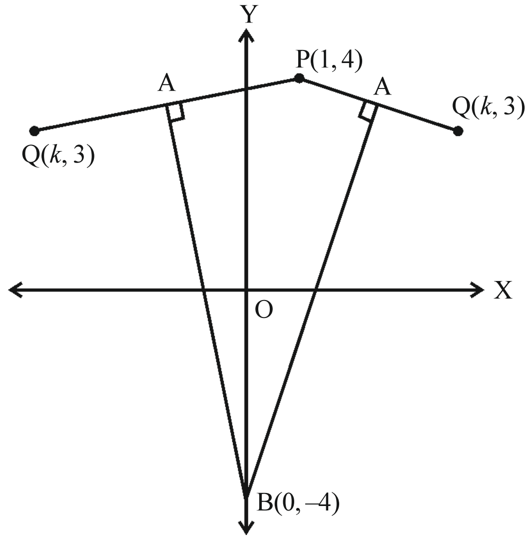
$\therefore x = \sqrt{3}$

જવાબ : (C)

(43) $P(1, 4)$ અને $Q(k, 3)$ને જોડતાં $\overline{PQ}$ના લંબ દ્વિભાજકનો Y-અંતઃખંડ –4 છે, તો kની શક્ય કિંમત = ...

(A) –4 (B) 1 (C) 2 (D) –2

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.16

ધારો કે $\overline{AB}$ એ $\overline{PQ}$ નો લંબદ્વિભાજક છે.

હવે $\overline{PQ}$ નો ઢાળ $= \frac{3-4}{k-1} = \frac{-1}{k-1}$

$\therefore$ $\overline{AB}$ નો ઢાળ $= k - 1$

હવે R એ $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ હોય,

તો તે $\left(\frac{k+1}{2}, \frac{3+4}{2}\right)$ એટલે કે, $\left(\frac{k+1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ બને.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $y - \frac{7}{2} = (k-1)\left(x - \frac{k+1}{2}\right)$

હવે $(0, -4)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર છે.

$\therefore$ $-4 - \frac{7}{2} = (k-1)\left(0 - \frac{k+1}{2}\right)$

$\therefore$ $\frac{-15}{2} = -\frac{k^2-1}{2}$ આથી, $k^2 - 1 = 15$

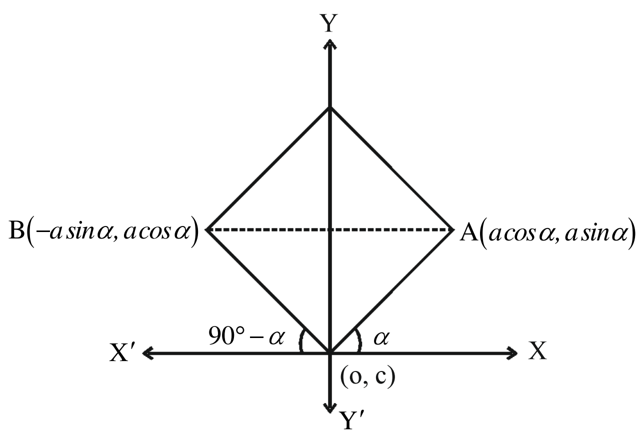
$\therefore$ $k^2 = 16$ આથી, $k = \pm 4$ **જવાબ : (A)**

(44) a બાજુવાળો ચોરસ X-અક્ષ ઉપરના અર્ધતલમાં છે અને એક શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ પર છે. X-અક્ષની ધન દિશા સાથેના ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી બાજુને સમાવતી રેખા α માપનો $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ ખૂણો બનાવે છે, તો ઊગમબિંદુમાંથી પસાર ન થતા વિકર્ણનું સમીકરણ ...... છે.

(A) $y(\cos\alpha + \sin\alpha) + x(\sin\alpha - \cos\alpha) = a$ (B) $y(\cos\alpha + \sin\alpha) + x(\sin\alpha + \cos\alpha) = a$

(C) $y(\cos\alpha + \sin\alpha) + x(\cos\alpha - \sin\alpha) = a$ (D) $y(\cos\alpha - \sin\alpha) - x(\sin\alpha - \cos\alpha) = a$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.17

આકૃતિમાં A અને Bના યામ દર્શાવેલ છે.

$\therefore$ વિકર્ણ $\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ એ

$$y - a\sin\alpha = \frac{a\cos\alpha - a\sin\alpha}{-a\sin\alpha - a\cos\alpha}\left(x - a\cos\alpha\right)$$

$$\therefore \quad y - a\sin\alpha = -\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}\left(x - a\cos\alpha\right)$$

$$\therefore \quad \left(y - a\sin\alpha\right)\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right) = -\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right)x + a\cos\alpha\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

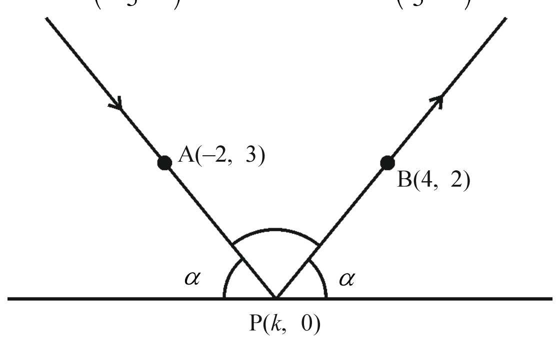
$$\therefore \quad x\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right) + y\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right) = a$$

જવાબ : (C)

(45) $(-2, 3)$ માંથી પસાર થતું કિરણ X-અક્ષ પરના બિંદુએથી પરાવર્તિત થઈ $(4, 2)$ માંથી પસાર થાય તો તે X-અક્ષ પરના બિંદુના યામ ......

(A) $\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$ (B) $\left(-\frac{8}{5}, 0\right)$ (C) $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ (D) $\left(\frac{8}{5}, 0\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.18

ધારો કે $A(-2, 3)$ અને $B(4, 2)$ તથા X અક્ષ પરનું બિંદુ $P(k, 0)$ છે.

જો $\overline{PB}$, X અક્ષની ધન દિશા સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે તો, $\overline{PB}$ નો ઢાળ $= \tan\alpha$ થશે.

$$\therefore \quad \tan\alpha = \overleftrightarrow{PB} \text{ નો ઢાળ } = \frac{2-0}{4-k} \qquad (1)$$

તેથી સ્પષ્ટ છે કે $\overline{AP}$ એ X અક્ષ સાથે બનાવેલા ખૂણાનું માપ $\pi - \alpha$ હોવાથી $\overline{AP}$ નો ઢાળ $= \tan\left(\pi - \alpha\right)$ થશે.

$$\therefore \quad \tan(\pi - \alpha) = \overline{AP} \text{ નો ઢાળ } = \frac{3-0}{-2-k} = \frac{-3}{k+2}$$

$$\therefore \quad -\tan\alpha = \frac{-3}{k+2} \qquad (2)$$

$\therefore$ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{-2}{4-k} = \frac{-3}{k+2}$$

$$\therefore \quad 2k + 4 = 12 - 3k$$

$$\therefore \quad 5k = 8 \text{ આથી, } k = \frac{8}{5}$$

$\therefore$ માંગેલ X-અક્ષ પરનું બિંદુ $P\left(\frac{8}{5}, 0\right)$ મળે.

જવાબ : (D)

(46) રેખાઓ $x\cos\beta + y\sin\beta = \frac{5\pi}{2}$ અને $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{\pi}{2}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $-\alpha-\beta$ (B) $\alpha+\beta$ (C) $|\alpha+\beta|$ (D) $|\beta-\alpha|$

ઉકેલ : રેખા $x\cos\beta + y\sin\beta = \frac{5\pi}{2}$ નો ઢાળ $m_1 = -\cot\beta$

રેખા $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{\pi}{2}$ નો ઢાળ $m_2 = -\cot\alpha$

જો બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય તો,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{-\cot\beta + \cot\alpha}{1+\cot\alpha\cot\beta}\right|$$

$$= \left|\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$\tan\theta = \pm\tan(\beta-\alpha)$$

$\therefore \quad \theta = \pm(\beta-\alpha)$ આથી, $\theta = |\beta-\alpha|$ **જવાબ : (D)**

(47) જો આપેલ બિંદુના પ્રચલ યામ $(\tan\theta - \sin\theta, \tan\theta + \sin\theta)$ હોય, તો આપેલા બિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 - y^2 = 16xy$ (B) $(x^2-y^2)^2 = 16xy$

(C) $(x^2-y^2)^2 = 12xy$ (D) $x^2 - y^2 = 12xy$

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ બિંદુ (x, y) છે.

$\therefore \quad (x, y) = (\tan\theta - \sin\theta, \tan\theta + \sin\theta)$

$\therefore \quad x = \tan\theta - \sin\theta, \; y = \tan\theta + \sin\theta$

તેથી $\quad \tan\theta = \frac{x+y}{2}, \; \sin\theta = \frac{y-x}{2}$

$\cot\theta = \frac{2}{x+y}, \; \operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{y-x}$

હવે, $\quad \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \quad \left(\frac{2}{y-x}\right)^2 - \left(\frac{2}{x+y}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \quad 4(x+y)^2 - 4(y-x)^2 = (y-x)^2(x+y)^2$$

$$\therefore \quad 4\left[x^2+2xy+y^2-y^2+2xy-x^2\right] = (x^2-y^2)^2$$

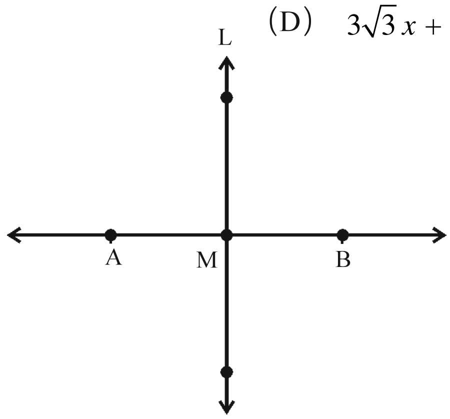
$\therefore \quad 16xy = (x^2-y^2)^2$ **જવાબ : (B)**

(48) જો કોઈ રેખાને સાપેક્ષ બિંદુ $\left(3\sqrt{3}, 5\right)$ નું પ્રતિબિંબ $\left(5\sqrt{3}, 7\right)$ હોય, તો તે રેખાનું સમીકરણ ....

(A) $3\sqrt{3}x + y + 18 = 0$ (B) $\sqrt{3}x + y + 18 = 0$

(C) $\sqrt{3}x + y - 18 = 0$ (D) $3\sqrt{3}x + y - 18 = 0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.19

ધારો કે $A\left(3\sqrt{3}, 5\right)$ નું પ્રતિબિંબ $B\left(5\sqrt{3}, 7\right)$ છે તથા $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ M છે.

$\therefore$ Mના યામ $= \left(\frac{3\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = \left(4\sqrt{3}, 6\right)$

હવે, $\overline{AB}$ નો ઢાળ $= \frac{7-5}{5\sqrt{3}-3\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $\overline{AB}$ ને લંબરેખા L હોય તો L નો ઢાળ $= -\sqrt{3}$. તે બિંદુ $M\left(4\sqrt{3}, 6\right)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $y - 6 = -\sqrt{3}\left(x - 4\sqrt{3}\right)$

$\therefore$ $y - 6 = -\sqrt{3}x + 12$

$\therefore$ $\sqrt{3}x + y - 18 = 0$ **જવાબ : (C)**

(49) ΔABC માં $(-3,-2)$, $(5,0)$ અને $\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણના અંતઃકેન્દ્રના યામ ....

(A) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (C) $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$ (D) $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

ઉકેલ : ધારો કે $A(-3,-2)$, $B(5,0)$ અને $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ છે.

$\therefore$ $a = BC = \sqrt{\left(5+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{13}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{425}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{17}$

$b = CA = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}+3\right)^2 + \left(\frac{13}{3}+2\right)^2} = \sqrt{\frac{425}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{17}$

$$c = AB = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

જો ΔABC નું અંતઃકેન્દ્ર I હોય તો,

$$I \text{ના યામ} = \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{5}{3}\sqrt{17}\,(-3) + \frac{5}{3}\sqrt{17}\,(5) + 2\sqrt{17}\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{5}{3}\sqrt{17} + \frac{5}{3}\sqrt{17} + 2\sqrt{17}}, \frac{\frac{5}{3}\sqrt{17}\,(-2) + \frac{5}{3}\sqrt{17}\,(0) + 2\sqrt{17}\left(\frac{13}{3}\right)}{\frac{5}{3}\sqrt{17} + \frac{5}{3}\sqrt{17} + 2\sqrt{17}}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{5}{3}(-3) + \frac{5}{3}(5) - \frac{2}{3}}{\frac{5}{3} + \frac{5}{3} + 2}, \frac{\frac{5}{3}(-2) + \frac{5}{3}(0) + 2\left(\frac{13}{3}\right)}{\frac{5}{3} + \frac{5}{3} + 2}\right) = \left(\frac{-15+25-2}{5+5+6}, \frac{-10+26}{5+5+6}\right) = \left(\frac{8}{16}, \frac{16}{16}\right)$$

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્રના યામ $= \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ **જવાબ : (B)**

(50) જેનો Y અંતઃખંડ તેના X અંતઃખંડ કરતાં 8 જેટલો વધારે હોય તેવી $(5, -3)$માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

(A) $\frac{x}{10} + \frac{y}{2} = -1$ અને $\frac{x}{4} + \frac{y}{-12} = \frac{3}{2}$ (B) $\frac{x}{-10} + \frac{y}{-2} = 1$ અને $\frac{x}{-4} - \frac{y}{12} = -1$

(C) $\frac{x}{10} + \frac{y}{2} = -1$ અને $\frac{x}{4} + \frac{y}{12} = 1$ (D) $\frac{x}{10} + \frac{y}{-3} = \frac{3}{2}$ અને $\frac{x}{4} + \frac{2y}{12} = \frac{3}{4}$

ઉકેલ : ધારો કે X અંતઃખંડ a અને Y અંતઃખંડ b છે.

$\therefore$ $b = a + 8$ થશે.

તેથી, માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{a+8} = 1$ થશે. વળી તે $(5, -3)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \frac{5}{a} - \frac{3}{a+8} = 1$

$\therefore 5a + 40 - 3a = a^2 + 8a$

$\therefore a^2 + 6a - 40 = 0$

$\therefore (a+10)(a-4) = 0$

$\therefore a = -10$ અથવા $a = 4$

$\therefore$ જો $a = -10$ તો $b = -2$. તેથી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{-10} + \frac{y}{-2} = 1$

$\therefore \frac{x}{10} + \frac{y}{2} = -1$

$\therefore$ જો $a = 4$ તો $b = 12$. તેથી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{4} + \frac{y}{12} = 1$. **જવાબ : (C)**

(51) $A(-4, 6)$, $B(2, -2)$ અને બિંદુ C એ રેખા $2x - y + 1 = 0$ પરનું બિંદુ હોય, તો ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ ....

(A) $2x + y + 3 = 0$ (B) $2x - y - 3 = 0$ (C) $2x - y + 3 = 0$ (D) $2x + y - 3 = 0$

ઉકેલ : અહીં $A(-4, 6)$, $B(2, -2)$ છે તથા બિંદુ C એ રેખા $2x - y + 1 = 0$ પર હોવાથી $C(x, 2x+1)$ લઈએ.

$\therefore$ ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રના યામ (α, β) હોય, તો

$\alpha = \frac{-4+2+x}{3}$, $\beta = \frac{6-2+2x+1}{3}$

$\therefore$ $x = 3\alpha + 2$, $2x = 3\beta - 5$

$\therefore$ $2(3\alpha + 2) = 3\beta - 5$

$\therefore$ $6\alpha - 3\beta + 9 = 0$

$\therefore$ $2\alpha - \beta + 3 = 0$

વ્યાપક રીતે, મધ્યકેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ $2x - y + 3 = 0$. **જવાબ : (C)**

(52) $A(a, 0)$, $B(0, 0)$, $C(0, c)$ શિરોબિંદુવાળા ΔABC ની મધ્યગાઓ $\overline{CD}$ અને $\overline{BE}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો ......

(A) $c^2 = 4a^2$ (B) $c^2 = 2a^2$ (C) $a^2 = 4c^2$ (D) $a^2 = 2c^2$

ઉકેલ : $\overline{CD}$ અને $\overline{BE}$ મધ્યગાઓ છે.

$\therefore$ D એ $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ થશે અને E એ $\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ થશે.

$\therefore$ Dના યામ $= \left(\frac{a}{2}, 0\right)$, Eના યામ $= \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$\overline{CD} \perp \overline{BE}$. આથી, ($\overline{CD}$ નો ઢાળ) ($\overline{BE}$ નો ઢાળ) $= -1$

$$\therefore \left(\frac{c-0}{0-\frac{a}{2}}\right)\left(\frac{0-\frac{c}{2}}{0-\frac{a}{2}}\right) = -1$$

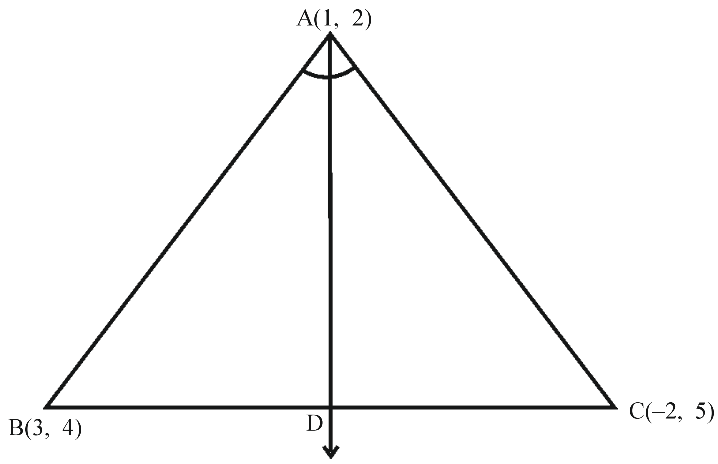
$$\therefore \frac{\frac{-c^2}{2}}{\frac{a^2}{4}} = -1. \quad \text{આથી, } \frac{-2c^2}{a^2} = -1$$

$\therefore 2c^2 = a^2$ **જવાબ : (D)**

(53) $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ અને $C(-2, 5)$ એ ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ છે. $\angle A$ નો દ્વિભાજક $\overline{BC}$ ને જે બિંદુઓમાં છેદે તે બિંદુના યામ ....

(A) $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ (B) $\left(1, \frac{22}{5}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{22}{5}\right)$ (D) $\left(\frac{22}{5}, \frac{2}{5}\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.20

અહીં, $AB^2 = (1-3)^2 + (2-4)^2 = 4+4 = 8.$ આથી, $AB = 2\sqrt{2}$

$AC^2 = (1+2)^2 + (2-5)^2 = 9+9 = 18.$ આથી, $AC = 3\sqrt{2}$

$\therefore$ D એ $\overline{BC}$ નું B તરફથી $BD : DC = AB : AC = 2:3$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ D ના યામ $= \left(\dfrac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \dfrac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$

$= \left(\dfrac{\frac{2}{3}(-2) + 3}{\frac{2}{3} + 1}, \dfrac{\frac{2}{3}(5) + 4}{\frac{2}{3} + 1}\right) = \left(1, \frac{22}{5}\right)$ **જવાબ : (B)**

(54) પરસ્પર લંબ ન હોય તેવી રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો $\alpha =$ ...... $(b_1 \neq 0, b_2 \neq 0)$

(A) $tan^{-1}\left(\dfrac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$ (B) $tan^{-1}\left|\dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 - b_1b_2}\right|$

(C) $tan^{-1}\left(\left|\dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right|\right)$ (D) $tan^{-1}\left(\left|\dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}\right|\right)$

ઉકેલ : અહીં રેખા $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ નો ઢાળ $m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$.

રેખા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ નો ઢાળ $m_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$.

જો બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણાનું માપ α હોય તો,

$\therefore$ $tan\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$

$$= \frac{\left|-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\right|}{\left|1+\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)\right|}$$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \left|\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}\right|$$

$$\therefore \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\left|\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}\right|\right)$$

જવાબ : (D)

(55) રેખા $ax+by+c=0$ ને સાપેક્ષ ઊગમબિંદુનું પ્રતિબિંબ ......

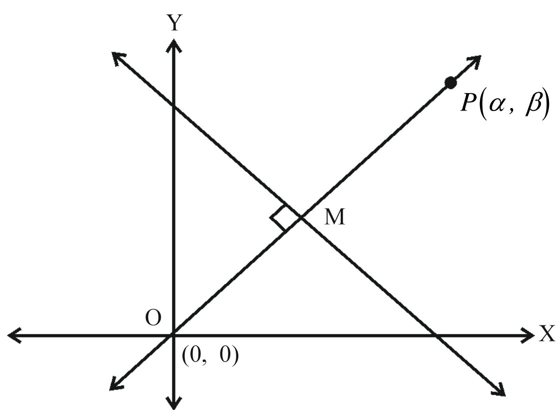
(A) $\left(\frac{2ac}{a^2+b^2}, \frac{2bc}{a^2+b^2}\right)$

(B) $\left(\frac{-2ac}{a^2+b^2}, \frac{2bc}{a^2+b^2}\right)$

(C) $\left(\frac{-2ac}{a^2+b^2}, \frac{-2bc}{a^2+b^2}\right)$

(D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.21

ધારો કે $O(0,0)$ નું પ્રતિબિંબ $P(\alpha, \beta)$ છે.

વળી M એ $\overline{OP}$ નું મધ્યબિંદુ છે. તેથી $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ થશે.

M એ રેખા $ax+by+c=0$ પરનું બિંદુ છે.

$$\therefore \; a\left(\frac{\alpha}{2}\right) + b\left(\frac{\beta}{2}\right) + c = 0$$

$$\therefore \; a\alpha + b\beta + 2c = 0 \qquad (1)$$

આપેલ રેખા $ax+by+c=0$ નો ઢાળ $m_1 = -\frac{a}{b}$

$\overline{OP}$ નો ઢાળ $m_2 = \frac{\beta-0}{\alpha-0} = \frac{\beta}{\alpha}$

$$\therefore \; m_1m_2 = -1$$

$\therefore \left(-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = -1$

$\therefore -\frac{a\beta}{\alpha b} = -1$ આથી $\alpha = \frac{a}{b}\beta$ (2)

(1) અને (2) પરથી $a\left(\frac{a\beta}{b}\right) + b\beta + 2c = 0$

$\therefore a^2\beta + b^2\beta = -2bc.$ આથી $\beta = \frac{-2bc}{a^2+b^2}$ તથા $\alpha = \frac{-2ac}{a^2+b^2}$

રેખા $ax + by + c = 0$ ને સાપેક્ષ ઊગમબિંદુનું પ્રતિબિંબ $\left(\frac{-2ac}{a^2+b^2}, \frac{-2bc}{a^2+b^2}\right)$ **જવાબ : (C)**

(56) રેખાઓ $p\left(p^2+1\right)x - y + q = 0$ અને $\left(p^2+1\right)^2 x + \left(p^2+1\right)y + 2q = 0$ એક સામાન્ય રેખાને લંબ હોય, તો......

[AIEEE : 2009]

(A) p ની કોઈ પણ કિંમત માટે નહિ.
(B) p ની એક જ કિંમત માટે
(C) p ની બે જ કિંમતો માટે
(D) p ની બેથી વધુ કિંમતો માટે

ઉકેલ : આપેલ રેખાઓ સામાન્ય રેખાને લંબ છે.

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સમાંતર છે.

$\therefore m_1 = m_2$ (સમતલીય હોવાથી)

$\therefore p\left(p^2+1\right) = -\frac{\left(p^2+1\right)^2}{p^2+1}$

$\therefore p\left(p^2+1\right) = -\left(p^2+1\right)$

$\therefore p = -1$ $\left[\left(p^2+1\right) \neq 0\right]$ **જવાબ : (B)**

(57) રેખા $L: \frac{x}{5} + \frac{y}{b} = 1$ $(13, 32)$ માંથી પસાર થાય છે. રેખા K નું સમીકરણ $\frac{x}{c} + \frac{y}{3} = 1$ છે અને તે L ને સમાંતર છે, તો L અને K વચ્ચેનું અંતર = ... [AIEEE : 2010]

(A) $\frac{23}{\sqrt{15}}$
(B) $\sqrt{17}$
(C) $\frac{17}{\sqrt{15}}$
(D) $\frac{23}{\sqrt{17}}$

ઉકેલ : હવે રેખા $L: \frac{x}{5} + \frac{y}{b} = 1$ એ $(13, 32)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \frac{13}{5} + \frac{32}{b} = 1$ આથી, $\frac{32}{b} = 1 - \frac{13}{5} = -\frac{8}{5}$

$\therefore b = \frac{32 \times 5}{-8} = -20$

$\therefore$ રેખા Lનું સમીકરણ $\frac{x}{5}+\frac{y}{-20}=1$ બને છે એટલે કે $4x-y=20$. (1)

રેખા L એ રેખા K ને સમાંતર છે, એટલે કે $\frac{x}{c}+\frac{y}{3}=1$ને સમાંતર છે.

તેમના ઢાળ સમાન છે.

$\therefore$ $4=-\frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{3}}$ આથી, $4=\frac{-3}{c}$

$\therefore$ $c=\frac{-3}{4}$

$\therefore$ રેખા K એ $\frac{x}{-\frac{3}{4}}+\frac{y}{3}=1$ આથી, $-4x+y=3$

$4x-y+3=0$ તથા $4x-y-20=0$ વચ્ચેનું અંતર $\frac{|23|}{\sqrt{16+1}}=\frac{23}{\sqrt{17}}$. **જવાબ : (D)**

(58) રેખા $L(3,-2)$ માંથી પસાર થાય છે. તે રેખા $\sqrt{3}x+y=1$ ની સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે. જો L એ X-અક્ષને છેદે તો રેખા Lનું સમીકરણ ...... [IIT : 2011]

(A) $y+\sqrt{3}x+2-3\sqrt{3}=0$ (B) $y-\sqrt{3}x+2+3\sqrt{3}=0$

(C) $\sqrt{3}y-x+3+2\sqrt{3}=0$ (D) $\sqrt{3}y+x-3+2\sqrt{3}=0$

ઉકેલ : $(3,-2)$ માંથી પસાર થતી રેખા $y+2=m(x-3)$ (1)

એ રેખા $\sqrt{3}\,x+y=1$ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે. આ રેખાનો ઢાળ $=-\sqrt{3}$

$\therefore$ $\tan\frac{\pi}{3}=\left|\frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}\right|$ આથી, $\sqrt{3}=\pm\frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}$

$\therefore$ $m=\sqrt{3}$ અથવા 0.

અહીં રેખા X-અક્ષને છેદે છે, આથી, $m\neq 0$. આથી $m=\sqrt{3}$.

(1) માં મૂકતાં, જરૂરી રેખાનું સમીકરણ

$y+2=\sqrt{3}(x-3)$ આથી, $y-\sqrt{3}\,x+2+3\sqrt{3}=0$ **જવાબ : (B)**

(59) રેખાઓ $x+y=|a|$ અને $ax-y=1$ એકબીજાને પ્રથમ ચરણમાં છેદે છે. a ની બધી જ શક્ય કિંમતોના ગણનો અંતરાલ = ... [AIEEE : 2010]

(A) $(0,\infty)$ (B) $(1,\infty)$ (C) $(-1,\infty)$ (D) $(-1,1)$

ઉકેલ : ધારો કે $a>0$.

રેખાઓ $x+y=a$ અને $ax-y=1$ આપેલ છે.

જેનો સરવાળો કરતાં, $(a+1)\,x=a+1$ આથી, $x=1$. $(a\neq -1,\ a>0)$

આથી, $1+y=a$ આથી, $y=a-1$

અહીં, $(1, a-1)$ એ પ્રથમ ચરણમાં છે. આથી, $a-1>0$. આથી, $a>1$

$\therefore \quad a \in (1, \infty)$

ધારો કે $a<0$. તેથી, રેખાઓ $x+y=-a$ અને $ax-y=1$ આપેલ છે. $(a \neq -1)$

જેનો સરવાળો કરતાં, $(1+a)\,x=1-a$ આથી, $x=\frac{1-a}{1+a}$

આથી, $y=-a-\frac{1-a}{1+a}=\frac{-a-a^2-1+a}{1+a}=-\frac{a^2+1}{1+a}$

આથી, $\left(\frac{1-a}{1+a}, -\frac{a^2+1}{1+a}\right)$ એ પ્રથમ ચરણમાં આવશે.

$\therefore \quad \frac{1-a}{1+a}>0$ તથા $a+1<0$

$\therefore \quad \frac{a-1}{a+1}<0$ તથા $a+1<0$

$\therefore\ a-1>0 \Rightarrow a>1$

$\therefore\ a+1<0.$ તેથી $a<-1.$ વળી, $a-1>0 \Rightarrow a>1$ જે શક્ય નથી.

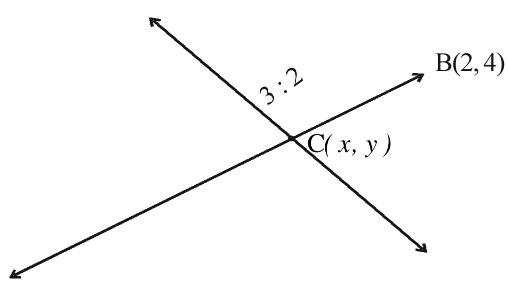
$a \in (1, \infty)$

નોંધ : $a=-1$ હોય તો $x+y=1$, $-x-y=1$ સમાંતર થાય. **જવાબ : (B)**

(60) રેખા $2x+y=k$ એક એવા બિંદુમાંથી પસાર થાય છે, જે $A(1,1)$ અને $B(2,4)$ને જોડતાં રેખાખંડનું A તરફથી $3:2$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તો $k=$ ...... [AIEEE : 2012]

(A) $\frac{29}{5}$ (B) 5 (C) 6 (D) $\frac{11}{5}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.22

જો $C(x, y)$ એ $\overline{AB}$નું $3:2$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો $(x, y)=\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)$

$x=\frac{3(2)+2(1)}{3+2}=\frac{8}{5}$, $\quad y=\frac{3(4)+2(1)}{3+2}=\frac{14}{5}$

હવે $C\left(\frac{8}{5}, \frac{14}{5}\right)$ એ $2x + y = k$ પર છે.

$\therefore \frac{16}{5} + \frac{14}{5} = k.$ આથી, $k = \frac{30}{5} = 6$ **જવાબ : (C)**

(61) બિંદુ $(4, 3)$ માંથી પસાર થતી અને જેના અક્ષો પરના અંતઃખંડોનો સરવાળો -1 હોય, તેવી રેખાનું સમીકરણ = ... [AIEEE : 2004]

(A) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -1$ અને $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = -1$ (B) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -1$ અને $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = -1$

(C) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ અને $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1$ (D) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ અને $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$

ઉકેલ : a અને b એ અક્ષો પરના અંતઃખંડો છે. રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ છે. (1)

હવે, રેખા (1) એ $(4, 3)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1$ (2)

પરંતુ $a + b = -1$ (3)

(3) પરથી $b = -1 - a$ ને (2) માં મૂકતાં, $\frac{4}{a} + \frac{3}{-1-a} = 1$ (4)

$\therefore -4 - 4a + 3a = -a - a^2$

$\therefore a^2 = 4$. આથી $a = \pm 2$

જો $a = 2$, તો $b = -1 - 2 = -3$. જો $a = -2$, તો $b = -1 + 2 = 1$

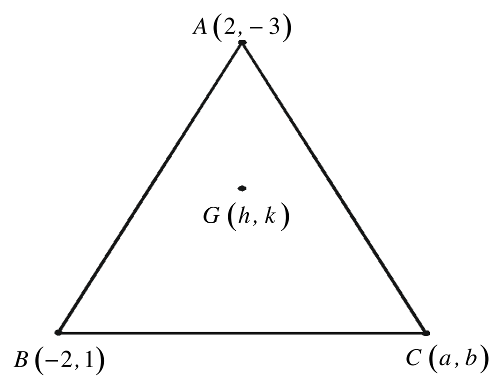
$\therefore$ રેખા એ $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$ અને $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$ એટલે કે $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ અને $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$. **જવાબ : (D)**

નોંધ : (4, 3) ફક્ત વિકલ્પ (D) નું જ સમાધાન કરે છે.

(62) જો $A(2, -3)$ અને $B(-2, 1)$ એ ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુ હોય અને ત્રીજું શિરોબિંદુ રેખા $2x + 3y = 9$ પર આવેલ હોય, તો ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ = ... [AIEEE : 2011]

(A) $x - y = 1$ (B) $2x + 3y = 1$ (C) $2x + 3y = 3$ (D) $2x - 3y = 1$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.23

ધારો કે ત્રીજું શિરોબિંદુ C(a, b) છે તથા મધ્યકેન્દ્ર $G(h, k)$ છે.

હવે, $h = \frac{2-2+a}{3}$ અને $k = \frac{-3+1+b}{3}$

$\therefore$ $a = 3h$ અને $b = 3k + 2$ (1)

અહીં $C(a, b)$એ $2x + 3y = 9$ પર આવેલ છે.

$\therefore$ $2a + 3b = 9$

$2(3h) + 3(3k + 2) = 9$ ((1) પરથી)

$\therefore$ $2h + 3k + 2 = 3$

$\therefore$ $2h + 3k - 1 = 0$

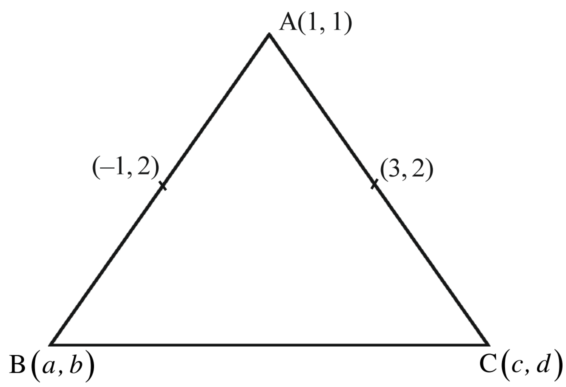
આથી $G(h, k)$નો બિંદુગણ એ $2x + 3y - 1 = 0$ છે. **જવાબ : (B)**

(63) જો ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ $(1, 1)$ અને શિરોબિંદુમાંથી પસાર થતી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ $(-1, 2)$ અને $(3, 2)$ હોય, તો ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર = ...

(A) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ (B) $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ (D) $\left(1, \frac{7}{3}\right)$

[AIEEE : 2005]

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.24

અહીં, $a + 1 = 2(-1), b + 1 = 2(2)$ આથી, $a = -3,\ b = 3.$

$\therefore$ B એ $(-3, 3)$ છે.

હવે, $c + 1 = 6,\ d + 1 = 4$ આથી, $c = 5,\ d = 3$

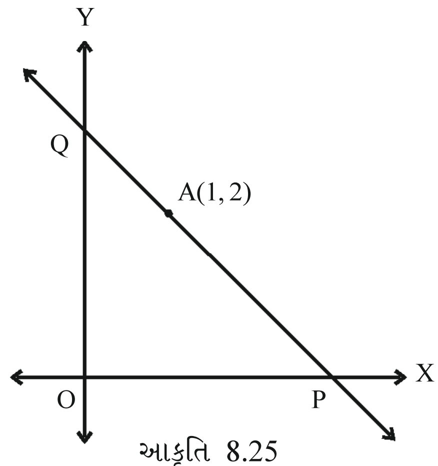
$\therefore$ C એ $(5, 3)$ છે.

$\therefore$ મધ્યકેન્દ્ર એ $\left(\frac{1-3+5}{3}, \frac{1+3+3}{3}\right)$ એટલે કે, $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. **જવાબ : (D)**

(64) બિંદુ $(1, 2)$માંથી રેખા એ રીતે દોરવામાં આવે છે કે જેથી અક્ષોને P અને Q માં મળે તથા ત્રિકોણ OPQ બનાવે, જ્યાં O એ ઊગમબિંદુ છે. જો ત્રિકોણ OPQ નું ક્ષેત્રફળ ન્યૂનતમ હોય, તો રેખા PQ નો ઢાળ = ... [AIEEE : 2012]

(A) $-\frac{1}{4}$ (B) -4 (C) -2 (D) $-\frac{1}{2}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.25

$A(1, 2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $y-2=m(x-1)$.

આ રેખા X-અક્ષને મળે ત્યાં $y=0$ થાય.

$$\therefore \quad -2=m(x-1)$$

$$\therefore \quad OP=1-\frac{2}{m}$$

આ રેખા Y-અક્ષને મળે ત્યાં $x=0$.

$y-2=-m$. આથી, $OQ=2-m$.

(ΔOPQ) નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{1}{2}(OP)(OQ)$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{m}\right)(2-m)=\frac{1}{2}\left(2-m-\frac{4}{m}+2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(4-\left(m+\frac{4}{m}\right)\right)$$

આથી (ΔOPQ) નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{4m-m^2-4}{2m}$

$f(m)=\frac{4m-m^2-4}{2m}$ લો. આથી, $f'(m)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{m^2}$

$\therefore$ (ΔOPQ) નું ક્ષેત્રફળ ન્યૂનતમ બને તે માટે,

$f'(m)=0$. આથી $\frac{-1}{2}+\frac{2}{m^2}=0$. આથી $m^2=4$

$m=\pm 2$. તેથી, $m=-2$. $(m=2$ તો $OP=0)$

(**નોંધ** : $f''(m)=\frac{-4}{m^3}$ આથી $m=-2$ માટે $f''(m)>0$. $f(m)$ ન્યૂનતમ ક્ષેત્રફળ છે.) **જવાબ : (C)**

(65) જો x_1, x_2, x_3 અને y_1, y_2, y_3 એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં સમાન ગુણોત્તર ધરાવતા હોય, તો બિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) એ ...... [IIT : 1999]

(A) રેખા પર

(B) ઉપવલય પર

(C) વર્તુળ પર

(D) ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ

ઉકેલ : $x_2 = x_1 r,\ x_3 = x_1 r^2$ અને $y_2 = y_1 r,\ y_3 = y_1 r^2$.

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 r & y_1 r & 1 \\ x_1 r^2 & y_1 r^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} x_1 y_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 \\ r^2 & r^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

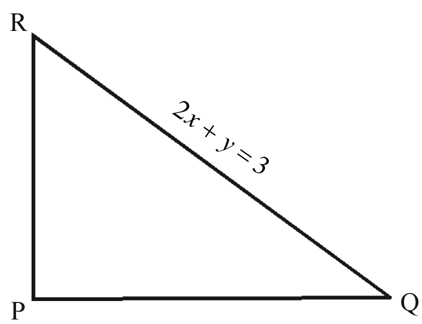
$\therefore$ બિંદુઓ એક રેખા પર છે એટલે કે તે સમરેખ છે. **જવાબ : (A)**

(66) જો સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ત્રિકોણ PQR નો $P(2,1)$ આગળ કાટખૂણો હોય તથા જો રેખા $\overleftrightarrow{QR}$ નું સમીકરણ $2x + y = 3$ હોય, તો રેખાઓ $\overleftrightarrow{PQ}$ અને $\overleftrightarrow{PR}$ નું સંયુક્ત સમીકરણ ...... [IIT : 1999]

(A) $3x^2 - 3y^2 + 8xy + 20x + 10y + 25 = 0$ (B) $3x^2 - 3y^2 + 8xy - 20x - 10y + 25 = 0$

(C) $3x^2 - 3y^2 + 8xy + 10x + 15y + 20 = 0$ (D) $3x^2 - 3y^2 - 8xy - 10x - 15y - 20 = 0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.26

અહીં $2x + y = 3$ માટે $m = -2, \alpha = \frac{\pi}{4}, t = tan\alpha = 1$

$m_1 = \frac{m-t}{1+mt} = \frac{-2-1}{1-2} = 3$

$\overleftrightarrow{PQ}$ અને $\overleftrightarrow{PR}$ પરસ્પર લંબ હોવાથી $m_2 = \frac{-1}{3}$

$\therefore\ y - 1 = 3(x-2)$ અને $y - 1 = -\left(\frac{1}{3}\right)(x-2)$

$\therefore$ રેખાઓનું સંયુક્ત સમીકરણ $(y - 3x + 5)(3y + x - 5) = 0$

$\therefore\ 3x^2 - 3y^2 + 8xy - 20x - 10y + 25 = 0$ **જવાબ : (B)**

(67) જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ $PQRS$ નાં શિરોબિંદુઓ $P(1, 2), Q(4, 6), R(5, 7)$ અને $S(a, b)$ હોય, તો ......

[IIT : 1998]

(A) $a = 2, b = 4$ (B) $a = 3, b = 4$ (C) $a = 2, b = 3$ (D) $a = 2, b = 5$

ઉકેલ : વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.

$\therefore \left(\frac{1+5}{2}, \frac{7+2}{2}\right) = \left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+6}{2}\right)$

$\therefore$ $a = 2$ અને $b = 3$

જવાબ : (C)

(68) વક્ર $f(x) = x^2 + bx - b$ ના બિંદુ $(1, 1)$ આગળના સ્પર્શક તથા અક્ષો વડે પ્રથમ ચરણમાં ત્રિકોણ બને છે. જો તેનું ક્ષેત્રફળ 2 હોય, તો b = ...

[IIT : 2001]

(A) –1 (B) 3 (C) –3 (D) 1

ઉકેલ : $f(x) = x^2 + bx - b$

$\therefore$ $f'(x) = 2x + b$ આથી $\left(f'(x)\right)_{(1,1)} = 2(1) + b = 2 + b$

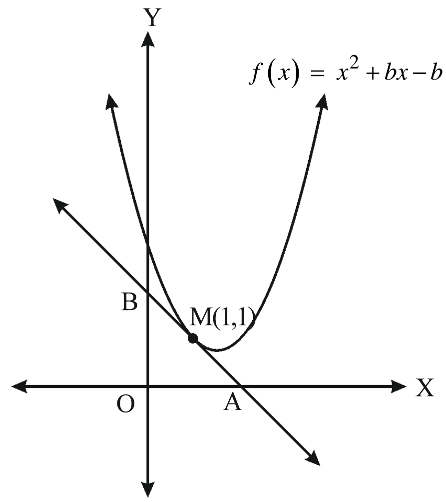
આમ, $(1, 1)$ આગળનો સ્પર્શકનો ઢાળ $2 + b$ મળે છે.

$\therefore$ $(1, 1)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ એ $y - 1 = (2 + b)(x - 1)$.

$\therefore$ $x - \frac{y}{2+b} = 1 - \frac{1}{2+b} = \frac{1+b}{2+b}$

$\therefore$ $\frac{x}{\frac{(1+b)}{2+b}} - \frac{y}{(2+b)\frac{(1+b)}{2+b}} = 1$

$\therefore$ $\frac{x}{\frac{(1+b)}{2+b}} - \frac{y}{1+b} = 1$



આકૃતિ 8.27

તે અક્ષો પરના અંતઃખંડોના સ્વરૂપમાં છે.

$OA = \frac{1+b}{2+b}, \ OB = -(1+b)$

$\therefore$ ત્રિકોણ OAB નું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2}\left(\frac{1+b}{2+b}\right)(-1)(1+b) = 2$ (આપેલ છે.)

$\therefore$ $(1+b)^2 = -4(2+b)$

$\therefore$ $1 + b^2 + 2b = -8 - 4b$

$\therefore$ $b^2 + 6b + 9 = 0$ $(b + 3)^2 = 0$

$\therefore$ $b = -3.$

જવાબ : (C)

(69) શિરોબિંદુઓ $\left(1, \sqrt{3}\right), (0, 0)$ અને $(2, 0)$ વડે બનતા ત્રિકોણનું અંતઃ કેન્દ્ર ...... [AIEEE : 2002]

(A) $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (D) $\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ઉકેલ : ધારો કે $A\left(1, \sqrt{3}\right), B(0, 0), C(2, 0)$ એ આપેલ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

હવે, $AB = \sqrt{(0-1)^2 + \left(0-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4+0} = 2$

અને $CA = \sqrt{(2-1)^2 + \left(0-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

આથી ΔABC એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્ર અને મધ્યકેન્દ્ર એક જ છે.

પણ ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર $\left(\frac{1+0+2}{3}, \frac{\sqrt{3}+0+0}{3}\right)$ છે.

આથી અંતઃકેન્દ્ર પણ $\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ થાય. **જવાબ : (D)**

(70) $(4, 0), (-1, -1), (3, 5)$ શિરોબિંદુ વડે બનતો ત્રિકોણ ...... [AIEEE : 2002]

(A) સમદ્વિબાજુ અને કાટકોણ (B) સમદ્વિબાજુ પણ કાટકોણ નહિ.

(C) કાટકોણ પણ સમદ્વિબાજુ નહિ. (D) કાટકોણ નહિ અને સમદ્વિબાજુ નહિ.

ઉકેલ : ધારો કે $A(4, 0), B(-1, -1)$ અને $C(3, 5)$ એ આપેલ બિંદુઓ છે.

તો $AB = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26},$

$BC = \sqrt{(3+1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

અને $CA = \sqrt{(4-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$AB = CA$ પરથી ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ છે.

અને $BC^2 = AB^2 + CA^2$

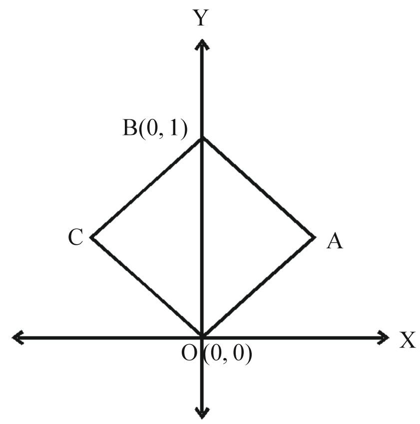
આથી, ત્રિકોણ કાટકોણ છે. **જવાબ : (A)**

(71) રેખાઓ $y = mx, y = mx+1, y = nx$ અને $y = nx+1$ વડે રચાતા સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = ...

[IIT : 2001]

(A) $\frac{|m+n|}{(m-n)^2}$ (B) $\frac{2}{|m+n|}$ (C) $\frac{1}{(m+n)}$ (D) $\frac{1}{|m-n|}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.27

સમીકરણો ઉકેલતાં, ચાર શિરોબિંદુઓ નીચે પ્રમાણે મળે છે :

$O(0,0), A\left(\frac{1}{m-n}, \frac{m}{m-n}\right), \ B(0,1), \ C\left(\frac{1}{n-m}, \frac{n}{n-m}\right)$

$OABC$ $= 2(OAB$ નું ક્ષેત્રફળ$)$

$= 2(\frac{1}{2}$ આધાર $\times$ ઉંચાઈ$)$

$= (1-0)\left|\frac{1}{m-n}\right| = \frac{1}{|m-n|}$

(બે શિરોબિંદુઓ O અને B Y-અક્ષ પર છે અને આથી $\Delta = \frac{1}{2}$ પાયો $\times$ ઊંચાઈ, જ્યાં ઊંચાઈ એ A નો x-યામ છે.) **જવાબ : (D)**

(72) રેખાઓ $3x+4y=9$ અને $y=mx+1$ ના છેદબિંદુના x-યામની પૂર્ણાંક કિંમતો m ની કેટલી પૂર્ણાંક કિંમતો માટે મળે ?

(A) 2 (B) 0 (C) 4 (D) 1 [IIT : 2001]

ઉકેલ : છેદબિંદુનો x-યામ.

$x = \frac{5}{3+4m} = \frac{5}{1}$ અથવા $\frac{5}{-1}$ અથવા $\frac{5}{5}$ અથવા $\frac{5}{-5}$ કારણ કે x એ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore \ 3+4m = 1, \ -1, \ 5$ અથવા -5

$\therefore \ 4m = -2 \ -4, \ 2, \ -8$

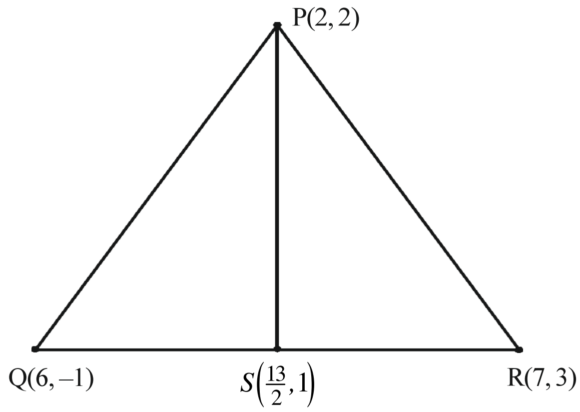
$\therefore \ m = -\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, -2$ એ 4 કિંમતો છે.

પરંતુ m ની પૂર્ણાંક કિંમતો માત્ર 2 (બે) એટલે –1 અને –2 છે. **જવાબ : (A)**

(73) ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $P(2,2)$, $Q(6,-1)$ અને $R(7,3)$ છે અને મધ્યગા $\overline{PS}$ છે, તો $(1,-1)$ માંથી પસાર થતી અને $\overleftrightarrow{PS}$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ ...... [IIT : 2000]

(A) $2x-9y-7=0$ (B) $2x-9y-11=0$ (C) $2x+9y-11=0$ (D) $2x+9y+7=0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.28

$\overleftrightarrow{PS}$ નો ઢાળ $= \frac{1-2}{\frac{13}{2}-2} = -\frac{2}{9}$

$\therefore$ $(1, -1)$ માંથી પસાર થતી અને $\overleftrightarrow{PS}$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ

$y+1=-\frac{2}{9}(x-1)$ એટલે કે $2x+9y+7=0$. **જવાબ : (D)**

(74) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી આપેલ રેખાઓને લંબરેખા સમાંતર રેખાઓ $4x+2y=9$ અને $2x+y+6=0$ ને P અને Q બિંદુમાં અનુક્રમે મળે છે, તો બિંદુ O હવે $\overline{PQ}$ ને ...... ગુણોત્તરમાં છેદે. [IIT : 2002]

(A) 1 : 2 (B) 3 : 4 (C) 2 : 1 (D) 4 : 3

ઉકેલ : $4x+2y=9$ નું $p-\alpha$ સ્વરૂપ $\frac{4x}{\sqrt{20}}+\frac{2y}{\sqrt{20}}=\frac{9}{\sqrt{20}}$, છે. અહીં $p=\frac{9}{\sqrt{20}}$

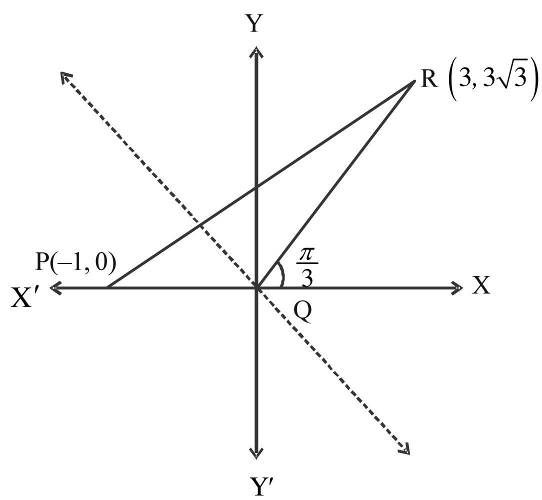
તેમજ $2x+y+6=0$ નું $p-\alpha$ સ્વરૂપ $-\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{y}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$ થાય. આથી $p' = \frac{6}{\sqrt{25}}$.

$\therefore$ $\frac{PO}{QO} = \frac{\frac{9}{\sqrt{20}}}{\frac{6}{\sqrt{5}}} = \frac{3}{4}$ **જવાબ : (B)**

(75) જો $P(-1, 0)$, $Q(0, 0)$ અને $R(3, 3\sqrt{3})$ એ ત્રણ બિંદુઓ હોય, તો ખૂણા PQR ના દ્વિભાજકને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ = ... [IIT : 2002]

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}x+y=0$ (B) $x+\sqrt{3}y=0$ (C) $\sqrt{3}x+y=0$ (D) $x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.29

$\overleftrightarrow{QR}$ નો ઢાળ $= \frac{3\sqrt{3}-0}{3-0} = \sqrt{3}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{QR}$ એ X-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો કોણ બનાવશે.

$\therefore$ $m\angle RQP = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $\angle RQP$ નો દ્વિભાજક $\overleftrightarrow{QR}$ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

આથી તે X-અક્ષ સાથે $\frac{2\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

તથા $\angle PQR$ નો દ્વિભાજક $(0, 0)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ તેને સમાતી રેખાનું સમીકરણ એ $y-0 = tan\frac{2\pi}{3}(x-0)$

$\therefore$ $y = -\sqrt{3}x$ આથી, $\sqrt{3}x + y = 0$. **જવાબ : (C)**

(76) જો (a_1, b_1) અને (a_2, b_2)થી સમાન અંતરે આપેલ બિંદુગણ $(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c=0$ હોય, તો $c =$ ...... [AIEEE : 2003]

(A) $a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2$ (B) $\frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2\right)$

(C) $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2}$ (D) $\frac{1}{2}\left(a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2\right)$

ઉકેલ : ધારો કે $P(x, y)$ કોઈ બિંદુ છે.

$A(a_1, b_1)$ અને $B(a_2, b_2)$એ આપેલ બિંદુઓ છે.

$PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$

$\therefore$ $(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2$

$\therefore$ $a_1^2 + b_1^2 - 2a_1x - 2b_1y = a_2^2 + b_2^2 - 2a_2x - 2b_2y$

$\therefore$ $2(a_1-a_2)x + 2(b_1-b_2)y + a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2 = 0$

$\therefore$ $(a_1-a_2)x + (b_1-b_2)y + \frac{1}{2}\left(a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2\right) = 0$

$(a_1-a_2)x + (b_1-b_2)y + c = 0$ એ માંગેલ બિંદુગણ છે.

$\therefore$ $c = \frac{1}{2}\left(a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2\right)$ **જવાબ : (D)**

(77) જો $0 < \theta < \alpha < \frac{\pi}{4}$ એક ખૂણાનું માપ છે. જો $P = (cos\theta, sin\theta)$ અને $Q = (cos(\alpha-\theta), sin(\alpha-\theta))$, તો Q એ P માંથી ...... રીતે મેળવી શકાય. [IIT : 2002]

(A) α માપના ખૂણે ઊગમબિંદુ સાપેક્ષ સમઘડી દિશામાં ઘૂમાવીને

(B) α માપના ખૂણે ઊગમબિંદુ સાપેક્ષ વિષમઘડી દિશામાં ઘૂમાવીને

(C) $tan\alpha$ ઢાળ સાથે રેખાનું ઊગમબિંદુથી પ્રતિબિંબ

(D) $tan\frac{}{2}$ ઢાળ સાથે ઊગમબિંદુને સાપેક્ષ રેખાનું પ્રતિબિંબ

ઉકેલ : α ખૂણે સમઘડી દિશામાં ઘૂમાવતા $P(cos\theta, sin\theta)$એ $\left(cos(\alpha-\theta), sin(\alpha-\theta)\right)$ બનશે. વિષમઘડી દિશામાં P એ $\left(cos(\alpha+\theta), sin(\alpha+\theta)\right)$ થશે.

હવે $\overleftrightarrow{PQ}$ નો ઢાળ $= \dfrac{sin\theta - sin(\alpha-\theta)}{cos\theta - cos(\alpha-\theta)}$

$$= \frac{2cos\frac{\alpha}{2}\ sin\frac{2\theta-\alpha}{2}}{-2sin\frac{\alpha}{2}\ sin\frac{2\theta-\alpha}{2}} = -cot\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PQ}$ એ $tan\frac{\alpha}{2}$ ઢાળવાળી રેખાને લંબ છે.

આથી Q એ P ના પ્રતિબિંબ પરથી મેળવી શકાય જ્યાં P એ $tan\frac{\alpha}{2}$ ઢાળવાળી રેખા પર છે. **જવાબ : (D)**

(78) જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $(a\,cost, a\,sint)$, $(b\,sint, -b\,cost)$ અને $(1, 0)$ હોય, તો તેના મધ્યકેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ મેળવો. (જ્યાં t એ પ્રચલ છે.) [AIEEE : 2003]

(A) $(3x+1)^2+(3y)^2=a^2-b^2$ (B) $(3x-1)^2+(3y)^2=a^2-b^2$

(C) $(3x-1)^2+(3y)^2=a^2+b^2$ (D) $(3x+1)^2+(3y)^2=a^2+b^2$

ઉકેલ : જો (α, β) એ મધ્યકેન્દ્ર હોય, તો

$\alpha = \dfrac{a\,cost + b\,sint + 1}{3}$ અને $\beta = \dfrac{a\,sint - b\,cost}{3}$

$\therefore$ $a\,cost + b\,sint = 3\alpha - 1$ અને $a\,sint - b\,cost = 3\beta$

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં, $a^2+b^2=(3\alpha-1)^2+(3\beta)^2$

આથી (α, β)નું બિંદુગણ એ $(3x-1)^2+(3y)^2=a^2+b^2$. **જવાબ : (C)**

(79) જો શૂન્યેતર સંખ્યાઓ a, b, c એ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો રેખા $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{1}{c}=0$ એ હંમેશા એક નિશ્ચિત બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. એ બિંદુ ...... [AIEEE-2005]

(A) $(-1,-2)$ (B) $(-1,2)$ (C) $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ (D) $(1,-2)$

ઉકેલ : a, b, c એ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

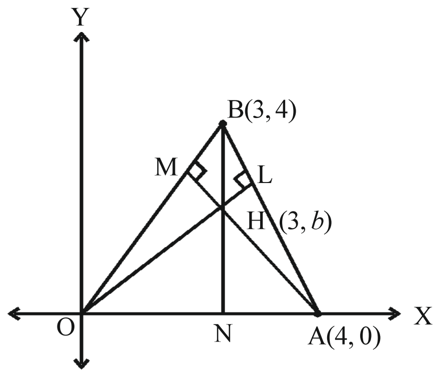
$\therefore$ $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$

$\therefore$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{1}{c}=0$ રેખા $(1,-2)$માંથી પસાર થાય છે. **જવાબ : (D)**

(80) જેનાં શિરોબિંદુઓ $(0, 0), (3, 4)$ અને $(4, 0)$ હોય તેવા ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર ...... [I.I.T.-2003]

(A) $\left(3, \frac{7}{3}\right)$ (B) $\left(3, \frac{5}{4}\right)$ (C) $(5, -2)$ (D) $\left(3, \frac{3}{4}\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.30

$\overleftrightarrow{OB}$ નો ઢાળ $= \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AM}$ નો ઢાળ $= \frac{-3}{4}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AM}$ નું સમીકરણ $y - 0 = \frac{-3}{4}(x-4)$ થાય.

$\therefore$ $3x + 4y - 12 = 0$ (1)

એ જ રીતે, $\overleftrightarrow{OL}$ નું સમીકરણ $x - 4y = 0$ (2)

(1) અને (2) ને ઉકેલતાં, લંબકેન્દ્ર એ $\left(3, \frac{3}{4}\right)$ છે.

બીજી રીત :

$\overline{BN}$ વેધ હોય તો તેનું સમીકરણ $x = 3$ છે.

$\therefore$ લંબકેન્દ્રનો x યામ $= 3$

($\overleftrightarrow{OH}$ નો ઢાળ) ($\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ) $= -1$

$\therefore \left(\frac{b}{3}\right)(-4) = -1$

$\therefore b = \frac{3}{4}$

$\therefore$ લંબકેન્દ્ર $\left(3, \frac{3}{4}\right)$ છે. **જવાબ : (D)**

(81) ત્રણ રેખાઓ $2x + 11y - 5 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$ અને $24x + 7y - 20 = 0$. [AIEEE : 2002]

(A) ત્રિકોણ બનાવે. (B) એ માત્ર સંપાતી છે.

(C) કોઈ એક રેખા બાકીની બે રેખાથી બનતા બીજા ખૂણાનો દ્વિભાજક થાય. (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $24x + 7y - 20 = 0$ અને $4x - 3y - 2 = 0$થી બનતા ખૂણાના દ્વિભાજકો એ

$$\frac{24x+7y-20}{\sqrt{576+49}} = \pm \frac{4x-3y-2}{\sqrt{16+9}}$$

$$\therefore \frac{24x+7y-20}{25} = \pm \frac{4x-3y-2}{5}$$

ધન નિશાની લેતાં, $\frac{24x+7y-20}{25} = \frac{4x-3y-2}{5}$

$\therefore$ $24x+7y-20 = 5(4x-3y-2)$

$\therefore$ $24x + 7y - 20 = 20x - 15y - 10$

$\therefore$ $4x + 22y - 10 = 0$

$\therefore$ $2x + 11y - 5 = 0$

આ આપેલ ત્રીજી રેખા છે. **જવાબ : (C)**

(82) જો આપેલ રેખાઓ $x^2-2cxy-7y^2=0$ ના ઢાળનો સરવાળો એ તેના ગુણાકારથી 4 ગણો હોય, તો c ની કિંમત ...... [AIEEE : 2004]

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) –2

ઉકેલ : $x^2-2cxy-7y^2=0$

$7\left(\frac{y}{x}\right)^2+2c\left(\frac{y}{x}\right)-1=0$

અહીં, $m_1+m_2=\frac{2c}{-7}$ અને $m_1 m_2=\frac{1}{-7}$

વળી, $m_1+m_2=4\,m_1 m_2$

$\therefore\ \frac{-2c}{7}=\frac{-4}{7}$

$\therefore\ c=2.$ **જવાબ : (C)**

(83) જો $6x^2-xy+4cy^2=0$ ની કોઈ એક રેખા $3x+4y=0$ છે. c = ... [AIEEE : 2004]

(A) 1 (B) –1 (C) 3 (D) –3

ઉકેલ : $6x^2-xy+4cy^2=0$

$\therefore\ 6-\frac{y}{x}+4c\,\frac{y^2}{x^2}=0$ (1)

અને $3x+4y=0$ એ બે પૈકીની એક રેખા છે.

આથી, $\frac{y}{x}=\frac{-3}{4}$ સમીકરણ (1) નું એક બીજ થાય.

(1) માં $\frac{y}{x}=\frac{-3}{4}$ મૂકતાં, $6+\frac{3}{4}+4c\left(\frac{9}{16}\right)=0$

$\therefore\ 24+3+9c=0$

$\therefore\ c=-3$ **જવાબ : (D)**

(84) રેખાઓ $ax+2by+3b=0$ અને $bx-2ay-3a=0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને X-અક્ષને સમાંતર રેખા કે જ્યાં $(a,b)\neq(0,0)$ એ ...... [AIEEE : 2005]

(A) X-અક્ષની નીચે તથા $\frac{2}{3}$ અંતરે હોય. (B) X-અક્ષ નીચે તથા $\frac{3}{2}$ અંતરે

(C) X-અક્ષ ઉપર તથા $\frac{2}{3}$ અંતરે (D) X-અક્ષ ઉપર તથા $\frac{3}{2}$ અંતરે

ઉકેલ : આપેલ રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા $(ax+2by+3b)+k\,(bx-2ay-3a)=0$ (1)

જો x નો સહગુણક 0 હોય, તો આ રેખા X-અક્ષને સમાંતર થશે.

$\therefore \quad a + kb = 0$. આથી, $k = -\frac{a}{b}$.

(1) માં મૂકતાં, $(ax + 2by + 3b) - \frac{a}{b}(bx - 2ay - 3a) = 0$

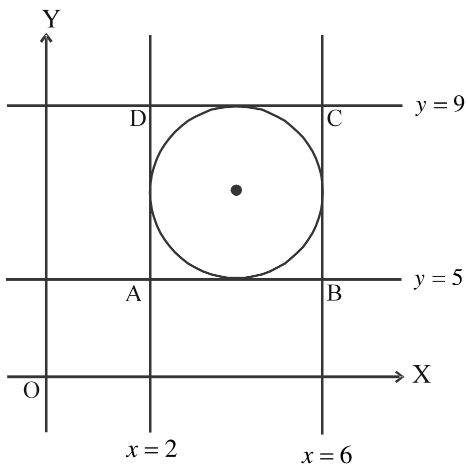
$\therefore \quad 2(b^2 + a^2)y + 3(b^2 + a^2) = 0$ એટલે કે $y = -\frac{3}{2}$, $\quad (a^2 + b^2 \neq 0)$

આ રેખા X-અક્ષથી નીચેના ભાગમાં $\frac{3}{2}$ અંતરે છે. **જવાબ : (B)**

(85) બે રેખાઓની જોડ $y^2 - 14y + 45 = 0$ અને $x^2 - 8x + 12 = 0$ વડે ચોરસ બને છે. તે ચોરસનાં અંતઃવૃત્તનું કેન્દ્ર ...... [IIT : 2003]

(A) $(7, 4)$ (B) $(4, 7)$ (C) $(3, 7)$ (D) $\left(\frac{3}{8}, 4\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.31

$y^2 - 14y + 45 = 0$

$\therefore (y - 9)(y - 5) = 0.$ બે રેખાઓ $y = 9$ અને $y = 5$ મળે.

તેવી જ રીતે $x^2 - 8x + 12 = 0$ એ રેખાઓ $x = 2$ અને $x = 6$ની જોડ છે.

આથી, ચોરસ ABCD ના અંતઃવૃત્તનું કેન્દ્ર $= \left(\frac{2+6}{2}, \frac{5+9}{2}\right)$ એટલે કે $(4, 7)$ થાય.

જવાબ : (B)

(86) જો $my^2 + (1 - m^2)xy - mx^2 = 0$ ની કોઈ એક રેખા એ રેખાઓ $xy = 0$ ના ખૂણાની દ્વિભાજક હોય, તો $m =$ ...... [AIEEE : 2007]

(A) 2 (B) 1 (C) 2 (D) $-\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $x = 0$ તથા $y = 0$ વચ્ચેના ખૂણાની દ્વિભાજક રેખાઓ $y = \pm x$ હોય એટલે કે $y^2 - x^2 = 0$

$\therefore \quad m = 1.$ **જવાબ : (B)**

(87) $L_1 : x - y = 1$, $L_2 : x + y = 1$, $L_3 : 2x + 2y = 5$, $L_4 : 2x - 2y = 7$ રેખાઓનાં સમીકરણ માટે સાચુ વિધાન .... (Online May 26, 2012)

(A) $L_1 \parallel L_4$, $L_2 \parallel L_3$, L_1 અને L_4 છેદે છે.

(B) $L_1 \perp L_2$, $L_1 \parallel L_3$, L_1 અને L_2 છેદે છે.

(C) $L_1 \perp L_2$, $L_2 \parallel L_3$, L_1 અને L_4 છેદે છે.

(D) $L_1 \perp L_2$, $L_1 \perp L_3$, L_2 અને L_4 છેદે છે.

ઉકેલ : અહીં રેખાઓ, $L_1 : x - y = 1$, $L_2 : x + y = 1$, $L_3 : 2x + 2y = 5$, $L_4 : 2x - 2y = 7$

$L_1 \perp L_2$ (તેમના ઢાળનો ગુણાકાર –1 છે.)

$L_1 \perp L_3$ (તેમના ઢાળનો ગુણાકાર –1 છે.)

હવે, $L_2 : x + y = 1$

$L_4 : 2x - 2y = 7$

$\therefore\ 2x - 2(1 - x) = 7$

$\therefore\ 2x - 2 + 2x = 7$

$\therefore\ x = \frac{9}{4}$ અને $y = \frac{-5}{4}$

તેથી, L_2 અને L_4 છેદે છે. **Ans. : (D)**

(88) રેખા $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ના અક્ષો વચ્ચે અંતરાયેલા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ...... છે. (જ્યાં p અચળ છે.) (AIEEE : 2002)

(A) $x^2 + y^2 = \frac{4}{p^2}$ (B) $x^2 + y^2 = 4p^2$ (C) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{2}{p^2}$ (D) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$

ઉકેલ : રેખા $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ એ X અક્ષને $A\left(\frac{p}{\cos\alpha}, 0\right)$ અને Y અક્ષને $B\left(0, \frac{p}{\sin\alpha}\right)$ માં છેદે છે.

ધારો કે $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ $M(x_1, y_1)$ હોય, તો $(x_1, y_1) = \left(\frac{p}{2\cos\alpha}, \frac{p}{2\sin\alpha}\right)$

$\therefore\ \cos\alpha = \frac{p}{2x_1},\ \sin\alpha = \frac{p}{2y_1}$

હવે, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ પરથી, $\frac{p^2}{4x_1^2} + \frac{p^2}{4y_1^2} = 1$

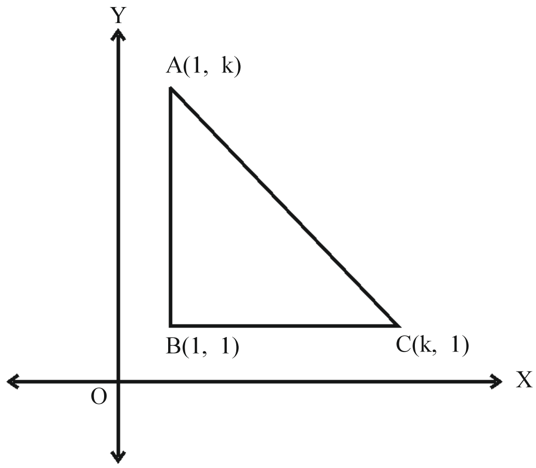
$\therefore\ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{y_1^2} = \frac{4}{p^2}$

$\therefore$ માંગેલ $\overline{AB}$ ના મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$ **ઉકેલ : (D)**

(89) $A(1, k)$, $B(1, 1)$ અને $C(k, 1)$ એ $\overline{AC}$ કર્ણવાળા કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ હોય અને જો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 2 ચો. એકમ હોય તો $k \in$ .... (AIEEE : 2007)

(A) $\{0, 2\}$ (B) $\{-1, 3\}$ (C) $\{-3, -2\}$ (D) $\{1, 3\}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.32

$\Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ 2 ચોરસ એકમ છે.

$\therefore \quad \frac{1}{2} \times AB \times BC = 2$

$\therefore \quad \frac{1}{2} \times |k-1||k-1| = 2$

$\therefore \quad (k-1)^2 = 4$

$\therefore \quad |k-1| = \pm 2$

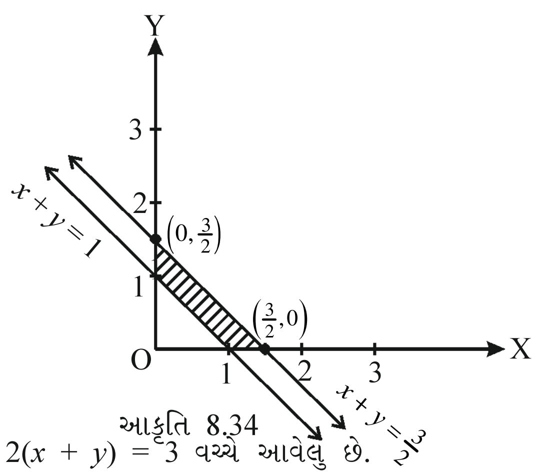
$\therefore \quad k = 3, -1$

$\therefore \quad k \in \{-1, 3\}$ **ઉકેલ : (B)**

(90) બિંદુ $(1, a)$ રેખાઓ $x + y = 1$ અને $2(x + y) = 3$ ની વચ્ચે આવેલું છે. તો a કયા અંતરાલમાં આવેલું હશે ? (Online May 12, 2012)

(A) $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ (B) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (C) $(-\infty, 0)$ (D) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.34

$(1, a)$ એ $x + y = 1$ અને $2(x + y) = 3$ વચ્ચે આવેલુ છે.

$x = 1$ એ $2(x + y) = 3$ માં મૂકો

આપણને y નો વિસ્તાર મળશે.

તેથી, $2(1 + y) = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

તેથી, 'a' એ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ અંતરાલમાં મળશે. **Sol. : (D)**

એક કરતાં વધુ વિકલ્પો સાચા હોય તેવા પ્રશ્નો

(91) રેખાયુગ્મ $3a^2x^2 + 7xy + (4a - 5)y^2 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓની જોડ પરસ્પર લંબ હોય, તો a = ...

(A) $-2 - \sqrt{19}$ (B) $-2 + \sqrt{19}$ (C) $\frac{-2 + \sqrt{19}}{3}$ (D) $\frac{-2 - \sqrt{19}}{3}$

ઉકેલ : જો રેખાયુગ્મ $3a^2x^2 + 7xy + (4a - 5)y^2 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓની જોડ પરસ્પર લંબ હોય, તો

x^2 નો સહગુણક + y^2 નો સહગુણક = 0

$\therefore\ 3a^2 + 4a - 5 = 0$

$\therefore\ a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(-5)}}{2 \times 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{2 \times 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}$ **ઉકેલ : (C), (D)**

(92) ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 31 એકમ હોય તથા તેના બે શિરોબિંદુ (3, 4) અને (–4, 6) હોય તો ત્રીજા શિરોબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $2x + 7y + 28 = 0$ (B) $2x + 7y - 28 = 0$

(C) $2x + 7y - 96 = 0$ (D) $2x + 7y + 96 = 0$

ઉકેલ : ધારો કે $A(3, 4)$, $B(-4, 6)$ અને $C(x, y)$ છે.

$$\therefore\ D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$$

હવે, ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ 31 એકમ છે.

$\therefore\ 31 = \frac{1}{2}|D|$

$\therefore\ |-2x - 7y + 34| = 62$

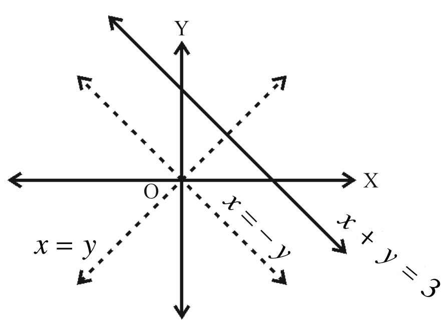
$\therefore\ -2x - 7y + 34 = 62$ અથવા $-2x - 7y + 34 = -62$

$\therefore\ 2x + 7y + 28 = 0$ અથવા $2x + 7y - 96 = 0$ **ઉકેલ : (A), (C)**

(93) એક બિંદુ રેખા $x + y = 3$ પર એ રીતે છે, કે જેથી તે રેખાઓ $|x| = |y|$ થી સમાન અંતરે છે. તેના યામ ......

(A) $(0, 3)$ (B) $(3, 0)$ (C) $(-3, 0)$ (D) $(0, -3)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.33

$|x| = |y|$ પરથી, $x - y = 0$ અને $x + y = 0$

આ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાના દ્વિભાજક એ $\frac{x-y}{\sqrt{2}} = \pm \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

આથી, $y = 0$ અને $x = 0$

$y = 0$ સાથે ઉકેલતાં, $x + y = 3$ પરથી $(3, 0)$ મળે.

$x = 0$ સાથે ઉકેલતાં, $x + y = 3$ પરથી $(0, 3)$ મળે. **જવાબ : (A), (B)**

(94) જો $S_1, S_2 ...$ એ એવા ચોરસ છે કે દરેક $n > 1$ માટે S_n ની બાજુની લંબાઈ એ S_{n+1} ના વિકર્ણની લંબાઈ બરાબર થાય છે. જો S_1ની બાજુની લંબાઈ 10 હોય, તો n ની કઈ કિંમત માટે S_n નું ક્ષેત્રફળ 1 સેમીથી ઓછું થાય ?

[IIT : 1999]

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

ઉકેલ : જો ચોરસની બાજુ a હોય, તો વિકર્ણની લંબાઈ $d = a\sqrt{2}$

આપેલ શરત પરથી $a_n = \sqrt{2} \bullet a_{n+1}$

$\therefore \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2}} = \frac{a_{n-1}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{a_{n-2}}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = ... = \frac{a_1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}.$

n ના સ્થાને $n-1$ લેતાં,

$a_n = \frac{a_1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}} = \frac{10}{(2)^{\frac{n-1}{2}}}$

S_n નું ક્ષેત્રફળ < 1. આથી, $a_n^2 < 1$.

આથી, $\frac{100}{2^{n-1}} < 1$. આથી, $200 < 2^n$

$\therefore \quad 2^7 = 128 < 200,\ 2^8 = 256 > 200$

$\therefore \quad n = 8, 9, 10$ **જવાબ : (B), (C), (D)**

●