

32T MATH

2022

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Q. No. 1 (a-j) carries 1 mark each	1 × 10 = 10
Q. Nos. 2-13 carry 4 marks each	4 × 12 = 48
Q. Nos. 14-20 carry 6 marks each	6 × 7 = 42
	<hr/>
	Total = 100

1. Answer the following questions :

1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Give an example of a column matrix which is also a row matrix.

এটা স্তম্ভ মৌলকক্ষৰ উদাহৰণ দিয়া যিটো শাৰী মৌলকক্ষও হয়।

(b) "Diagonal elements of a skew-symmetric matrix are always zero" — Why?

"বিষম-সমমিত মৌলকক্ষৰ বিকৰ্ণ মৌলবোৰ সদায় শূন্য" — কিয়?

(c) Let  $f(x) = [x]$ , where  $[x]$  is a greatest integer function and  $g(x) = x$ . Find the value of  $(f \circ g)(-\frac{1}{3})$ .

ধৰা হ'ল  $f(x) = [x]$ , য'ত  $[x]$  হ'ল গৰিষ্ঠ অখণ্ড ফলন আৰু  $g(x) = x$ .  $(f \circ g)(-\frac{1}{3})$ -ৰ মান উলিওৱা।

(d) Differentiate  $\sin x$  with respect to  $e^x$ .

$e^x$ -ৰ সাপেক্ষে  $\sin x$ -ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

(e) Write down the value of  $\int_{-2}^2 |x| dx$ .

$\int_{-2}^2 |x| dx$ -ৰ মান লিখা।

(f) Find the order of the differential equation

$$\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)^5 + \sin(y'') = 0.$$

$$\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)^5 + \sin(y'') = 0 \text{ অৱকল সমীকৰণটোৰ ক্ৰম নিৰ্ণয় কৰা।}$$

(g) Find the principal value of  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ -ৰ মুখ্যমান উলিওৱা।}$$

(h) Fill in the blank :

খালী ঠাই পূৰ কৰা :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(i) What is the direction cosine of X-axis ?

X-অক্ষৰ দিশাংক কিমান ?

(j) Let  $A$  and  $B$  be any two given sets. If  $f : A \rightarrow B$  is a onto function, then find the range of  $f$ .

ধৰা হ'ল  $A$  আৰু  $B$  যিকোনো দুটা সংহতি। যদি  $f : A \rightarrow B$  এটা আচ্ছাদক ফলন হয়, তেন্তে  $f$ -ৰ পৰিসৰ উলিওৱা।

2. Define an equivalence relation. Check whether the following relation  $R$  defined on the set of integers  $\mathbb{Z}$  is an equivalence relation or not, where  $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ is an integer}\}$ .

সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ সংজ্ঞা দিয়া।  $\mathbb{Z}$ -ত সংজ্ঞাবদ্ধ তলৰ সম্বন্ধ  $R$  টো সমতুল্যতা সম্বন্ধ হ'বনে নহয় পৰীক্ষা কৰা, য'ত  $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ এটা অখণ্ড সংখ্যা}\}$ ।

**OR / অথবা**

Show that the function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defined as  $f(x) = 2x - 3$  is invertible. Also find the inverse of  $f$ .

দেখুওৱা যে  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -ত সংজ্ঞাবদ্ধ  $f(x) = 2x - 3$  ফলনটো প্ৰতিলোমনীয়।  $f$ -ৰ প্ৰতিলোমও উলিওৱা।

3. Show that  
দেখুওৱা যে

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{8}{17} = \cos^{-1} \frac{84}{85}$$

**OR / অথবা**

Solve the following equation :

তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$2 \tan^{-1} (\cos x) = \tan^{-1} (2 \operatorname{cosec} x)$$

4. If  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  and  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , then find the value  $\lambda$  and  $\mu$

such that  $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$ , where 0 is zero matrix of order 2.

4

যদি  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  আৰু  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  হয়, তেন্তে  $\lambda$  আৰু  $\mu$  -ৰ মান উলিওৱা যাতে

$A^2 + \lambda A + \mu I = 0$ , য'ত 0 হৈছে 2 ঘাতৰ শূন্য মৌলিকম্ফ।

OR/ অথবা

Determine the value of  $a$  for which the system is consistent. 4

$a$  -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাৰ বাবে প্ৰণালীটো সুসংগত হয়।

$$x + y + z = 1$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$ax + ay + 2az = 4$$

5. Find the value of  $k$  so that the following function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 100x}{99}, & \text{if } x \neq 0 \\ k, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is continuous at  $x = 0$ .

4

$$\text{যদি } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 100x}{99}, & \text{যদি } x \neq 0 \\ k, & \text{যদি } x = 0 \end{cases}$$

ফলনটো  $x = 0$  বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়, তেহে  $k$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

6. Find  $\frac{dy}{dx}$  if —  $2+2=4$

উলিওৱা  $\frac{dy}{dx}$  যদিহে —

(i)  $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

(ii)  $y = e^{\cos x}$

7. Prove that the greatest integer function defined by

$$f(x) = [x], 0 < x < 2 \text{ is not differentiable at } x = 1.$$

4

প্রমাণ কৰা যে  $f(x) = [x], 0 < x < 2$ -ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ গৰিষ্ঠ অখণ্ড ফলনটো  $x = 1$

বিন্দুত অৱকলনীয় নহয়।

OR/ অথবা

If (যদি)  $e^y(x+1)=1$ , show that ( দেখুওৱা য়ে ) 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

8. Evaluate : 2+2=4

মান নির্ণয় কৰা :

(a)  $\int \left( x^{3/2} + 2e^x - \frac{1}{x} \right) dx$

(b)  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

OR/ অথবা

Evaluate :

মান নির্ণয় কৰা :

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$$

9. Find the equations of the tangent and normal to the curve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 2 \text{ at } (1, 1). \quad 2+2=4$$

$x^{2/3} + y^{2/3} = 2$  বক্ৰৰ (1, 1) বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

OR / অথবা

Find the local maxima and local minima, if any, of the function  
 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ . 2+2=4

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$  ফলনটোৰ স্থানীয় গৰিষ্ঠ আৰু স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা, যদি আছে।

10. A particle moves along the curve  $6y = x^3 + 2$ . Find the point(s) on the curve at which the  $y$ -coordinate is changing 8 times as fast as the  $x$ -coordinate. 4

এটা কণিকা  $6y = x^3 + 2$  বক্ৰৰে চলাচল কৰে। বক্ৰটোৰ সেই বিন্দু (বোৰ) উলিওৱা য'ত  $x$ -স্থানাংক তকৈ 8 গুণ বেছি বেগত  $y$ -স্থানাংক পৰিৱৰ্তিত হয়।

OR / অথবা

Show that the function  $f(x) = \cos 3x$  is neither strictly increasing nor decreasing on  $(0, \pi/2)$ . 4

দেখুওৱা যে  $f(x) = \cos 3x$  ফলনটো  $(0, \pi/2)$ -ত সতত বৰ্ধমান বা হ্রাসমান এটাও নহয়।

11. Evaluate  $\int_0^5 (x+1) dx$  as the limit of a sum. 4

যোগফলৰ চৰম মান হিচাপে  $\int_0^5 (x+1) dx$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Evaluate :

4

মান নির্ণয় করা :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

12. Show that the vector  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  is equally inclined to the axes OX, OY and OZ. 4

দেখুওরা যে  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  ভেক্টরটো OX, OY আৰু OZ অক্ষৰ লগত সমভাৱে হেলনীয়া হয়।

OR / অথবা

State the triangle inequality for any two vectors and prove it. 1+3=4

যিকোনো দুটা ভেক্টৰৰ বাবে ত্ৰিভুজ অসমিকটো লিখি প্ৰমাণ কৰা।

13. Probability of solving a specific problem independently by A and B are  $\frac{1}{2}$  and  $\frac{1}{3}$  respectively. If both try to solve the problem independently, find the probability that — 2+2=4

- (i) the problem is solved  
(ii) exactly one of them solves the problem.

A আৰু B য়ে এটা বিশেষ সমস্যা স্বতন্ত্ৰভাৱে সমাধান কৰাৰ সম্ভাৱিতা ক্ৰমে  $\frac{1}{2}$  আৰু  $\frac{1}{3}$ । যদি সমস্যাটো সমাধানৰ বাবে উভয়ে স্বতন্ত্ৰভাৱে চেষ্টা কৰে, তেন্তে সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা যাতে —

- (i) সমস্যাটো সমাধান হয়  
(ii) তেওঁলোকৰ ঠিক এজনে সমস্যাটোৰ সমাধান আগবঢ়ায়।

OR/ অথবা

Let  $X$  denote the number of hours Rita studies during a randomly selected school day. The probability that  $X$  can take the values  $x$ , has the following form :

$$P(X=x) = \begin{cases} 0.1, & \text{if } x=0 \\ kx, & \text{if } x=1 \text{ or } 2 \\ k(5-x), & \text{if } x=3 \text{ or } 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where  $k$  is an unknown constant.

(a) Find the value of  $k$ .

(b) What is the probability that Rita studies at least two hours, exactly two hours and at most two hours ?  $1+1+1=4$

যাদৃচ্ছিকভাবে নির্বাচন করা স্কুলীয়া দিনত কোনোবা এদিন বীতার অধ্যয়ন করা মুঠ ঘণ্টার সংখ্যাটো  $X$  বে বুজোরা হ'ল।  $X$ -ৰ মান  $x$  হোৱাৰ সম্ভাৱিতাক নিম্নোক্ত ৰূপত প্ৰকাশ কৰা হৈছে :

$$P(X=x) = \begin{cases} 0.1, & \text{যদি } x = 0 \\ kx, & \text{যদি } x = 1 \text{ বা } 2 \\ k(5-x), & \text{যদি } x = 3 \text{ বা } 4 \\ 0, & \text{অন্যথা} \end{cases}$$

য'ত  $k$  এটা অজ্ঞাত ধ্ৰুবক।

(a)  $k$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) বীতাই কমপক্ষে দুই ঘণ্টা, সঠিক দুই ঘণ্টা আৰু সৰ্বোচ্চ দুই ঘণ্টা অধ্যয়ন কৰাৰ সম্ভাৱিতাবোৰ কিমান ?

14. Find the minors and cofactors of the elements of the determinant 3+3=6

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কটোৰ মৌলবোৰৰ অনুৰাশি আৰু সহৰাশি উলিওৱা।

OR / অথবা

Find  $A^{-1}$  by using elementary transformation, where — 6

মৌলিক ৰূপান্তৰ প্ৰক্ৰিয়া প্ৰয়োগ কৰি  $A^{-1}$  উলিওৱা য'ত —

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

15. Define homogeneous function of degree  $n$ . Solve the differential equation 1+5=6

$$(x^2 + xy) dy = (x^2 + y^2) dx$$

$n$  মাত্রাৰ সমমাত্রিক ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

$(x^2 + xy) dy = (x^2 + y^2) dx$  অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা।

**OR / অথবা**

- (i) Solve the differential equation : 3

অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা :

$$x \frac{dy}{dx} + (2x + 1)y = xe^{-2x}$$

- (ii) Form the differential equation of the family of circles touching the X-axis at origin. 3

মূলবিন্দুত X-অক্ষক স্পৰ্শ কৰা বৃত্তৰ পৰিয়াল এটাৰ অৱকল সমীকৰণটো গঠন কৰা।

16. Integrate :

অনুকলন কৰা :

(a)  $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} dx$

(b)  $\int x \sin^{-1} x dx$

2+4=6

OR/ অথবা

$$(a) \int \left( \frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x} \right) dx$$

$$(b) \int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 1} dx$$

17. For any three vectors  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , prove that

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad 6$$

যিকোনো তিনটি ভেক্টর  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ -র বাবে প্রমাণ করা যে

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad |$$

OR/ অথবা

Three vectors  $\vec{a}, \vec{b}$  and  $\vec{c}$  satisfy the condition  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ .  
Evaluate the quantity

$$\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} \quad \text{if } |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4 \text{ and } |\vec{c}| = 2. \quad 6$$

$\vec{a}, \vec{b}$  আৰু  $\vec{c}$  ভেক্টৰ তিনটিই  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  চৰ্ত সিদ্ধ কৰে।

$\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদিহে  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4$  আৰু  $|\vec{c}| = 2$  হয়।

18. Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \quad \text{and}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}). \quad 6$$

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \quad \text{আৰু}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) \quad \text{ৰেখা দুডালৰ মাজৰ নূন্যতম দূৰত্ব উলিওৱা।}$$

**OR/ অথবা**

Find the equation of the plane passing through the point  $(-1, 3, 2)$  and perpendicular to each of the planes  $x + 2y + 3z = 5$  and  $3x + 3y + z = 0$ . 6

$(-1, 3, 2)$  বিন্দুৰে যোৱা আৰু  $x + 2y + 3z = 5$  আৰু  $3x + 3y + z = 0$  সমতল দুখনৰ প্ৰত্যেকৰে লম্বভাৱে থকা সমতলখনৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

**OR/ অথবা**

19. Minimize  $Z = 3x + 5y$

subject to  $x + 3y \geq 3$

$$x + y \geq 2$$

$$x, y \geq 0$$

6

$$x + 3y \geq 3$$

$$x + y \geq 2$$

$x, y \geq 0$  সীমাবদ্ধতা সাপেক্ষে  $Z = 3x + 5y$  -ৰ সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা।

OR/ অথবা

Minimise and Maximise  $Z = 5x + 10y$

subject to

$$x + 2y \leq 120$$

$$x + y \geq 60$$

$$x - 2y \geq 0$$

$$x, y \geq 0$$

6

$$x + 2y \leq 120$$

$$x + y \geq 60$$

$$x - 2y \geq 0$$

$x, y \geq 0$  সাপেক্ষে  $Z = 5x + 10y$  -ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা।

20. Of the students in a college, it is known that 60% reside in hostel and 40% are day scholars (not residing in hostel). Previous year results report that 30% of all students who reside in hostel attain A grade and 20% of day scholars attain A grade in their annual examination. At the end of the year, one student is chosen at random from the college and he has an A grade, what is the probability that the student is a hostlier ? 6

এখন মহাবিদ্যালয়ৰ 60% য়ে ছাত্ৰাবাসত আৰু 40% য়ে ছাত্ৰাবাসত নাথাকে বুলি জানিব পৰা গ'ল। আগৰ বছৰৰ ফলাফল অনুসৰি বছৰেকীয়া পৰীক্ষাত ছাত্ৰাবাসত থকা সকলো ছাত্ৰৰ 30% য়ে আৰু ছাত্ৰাবাসত নথকা ছাত্ৰসকলৰ 20% য়ে A গ্ৰেড পাইছিল। বছৰৰ অন্তত মহাবিদ্যালয়খনৰ যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা এজন ছাত্ৰই A গ্ৰেড পালে। ছাত্ৰজন ছাত্ৰাবাসৰ আবাসী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

OR/ অথবা

Find the mean number of heads in three tosses of a fair coin.

এটা নিখুঁত মুদ্ৰা তিনিবাৰ টছ কৰি পোৱা মুণ্ড সংখ্যাৰ মাধ্যম নিৰ্ণয় কৰা।

6

OR / অথবা

Minimize and Maximize  $Z = 5x + 10y$

subject to

$$x + 2y \leq 120$$

$$x + y \leq 60$$

$$x - 2y \leq 0$$

$$x, y \geq 0$$

$$x + 2y \leq 120$$

$$x + y \leq 60$$

$$x - 2y \leq 0$$

Minimize and Maximize  $Z = 5x + 10y$  subject to

20. Of the students in a college, it is known that 60% reside in hostel and 40% are day scholars (not residing in hostel). Previous year results report that 30% of all students who reside in hostel attain A grade and 20% of day scholars attain A grade in their annual examination. At the end of the year, one student is chosen at random from the college and he has an A grade, what is the probability that the student is a hostler?

২০. এক কলেজের ছাত্রদের মধ্যে ৬০% ছাত্রছাত্রী হোস্টেল বাস করে এবং ৪০% ছাত্রছাত্রী দিনের স্কলার (হোস্টলে বাস করে না)। গত বছর হোস্টেল বাসকারী ছাত্রদের মধ্যে ৩০% এ গ্রেডে এবং দিনের স্কলারদের মধ্যে ২০% এ গ্রেডে উত্তীর্ণ হন। বছরের শেষে কলেজ থেকে একজন ছাত্রছাত্রীকে এ গ্রেডের জন্য নির্বাচন করা হল। নির্বাচিত ছাত্রছাত্রীটির হোস্টলে বাস করার সম্ভাব্যতা কত?

OR / অথবা

Find the mean number of heads in three tosses of a fair coin.