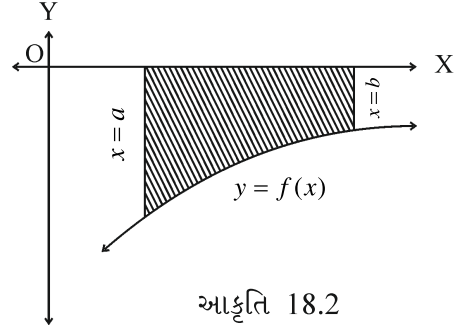
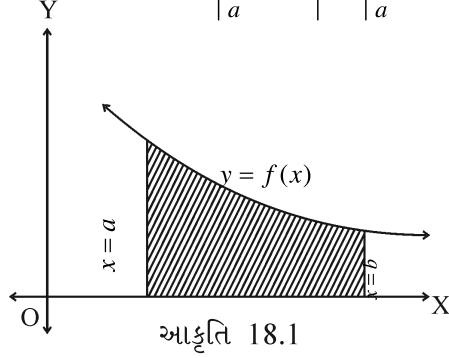


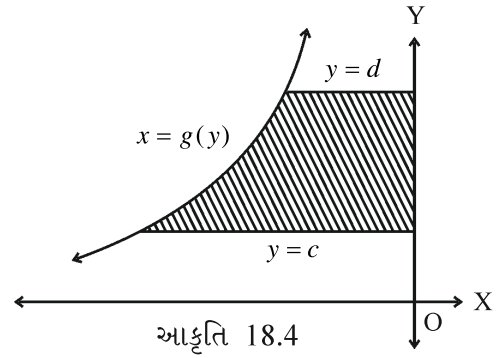
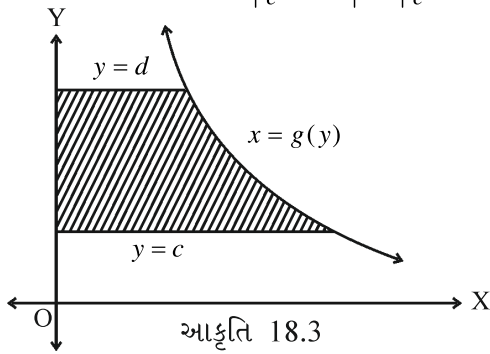
- (1) વક્ર $y = f(x)$, X -અક્ષ અને રેખાઓ $x = a$, $x = b$ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \left| \int_a^b y \, dx \right| = \left| \int_a^b f(x) \, dx \right|$$



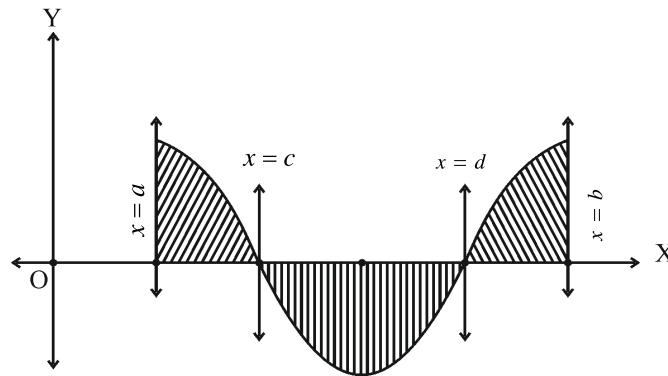
- (2) વક્ર $x = g(y)$ Y -અક્ષ અને રેખાઓ $y = c$, $y = d$ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \left| \int_c^d x \, dy \right| = \left| \int_c^d g(y) \, dy \right|$$

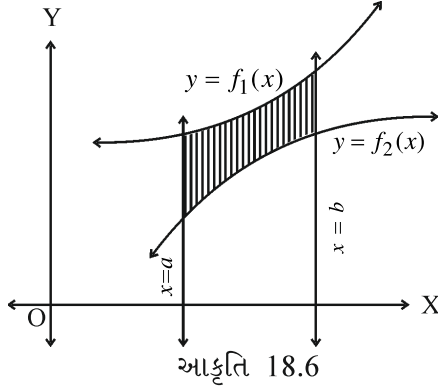


- (3) જો વક્ર $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ વચ્ચે X -અક્ષને $x = c$ અને $x = d$ માં છેદે (જ્યાં $c, d \in (a, b)$) તો $x = a$ અને $x = b$ તથા X -અક્ષ વચ્ચેના ભાગનું ક્ષેત્રફળ. ($a < c < d < b$)

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \left| \int_a^c f(x) \, dx \right| + \left| \int_c^d f(x) \, dx \right| + \left| \int_d^b f(x) \, dx \right|$$

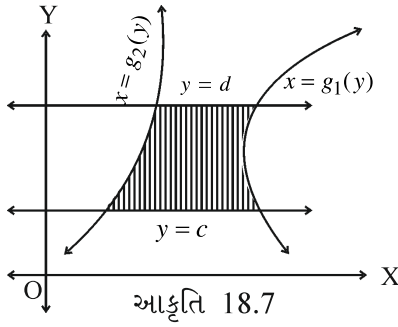


- (4) વકો $y = f_1(x)$ અને $y = f_2(x)$ તથા $x = a$ અને $x = b$ વચ્ચે ઘેરાયેલા ભાગનું ક્ષેત્રફળ



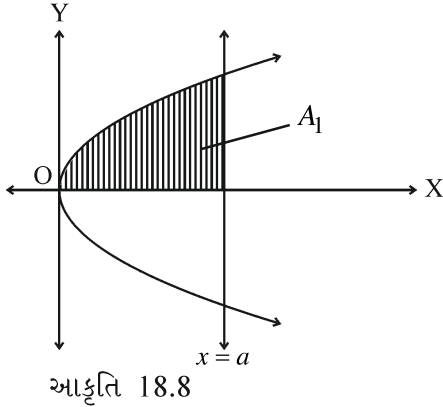
$$\text{ક્ષેત્રફળ } A = \left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \right|$$

- (5) વકો $x = g_1(y)$ અને $x = g_2(y)$ તથા $y = c$ અને $y = d$ વચ્ચે ઘેરાયેલા ભાગનું ક્ષેત્રફળ



$$\text{ક્ષેત્રફળ } A = \left| \int_c^d [g_1(y) - g_2(y)] dy \right|$$

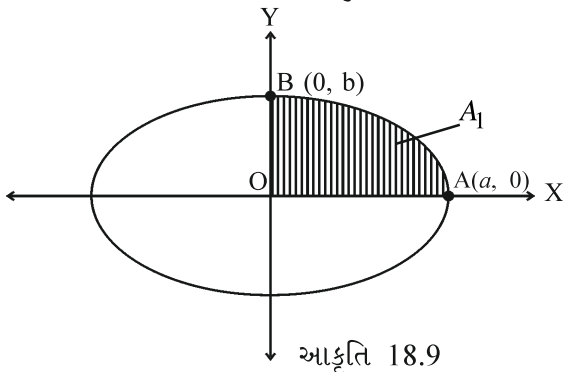
- (6) જો વક અને તેનાથી આવૃત્તપ્રદેશ X -અક્ષ પરત્વે સંમિત હોય તથા એક ખંડ X -અક્ષના ઉપરના અર્ધતલમાં હોય અને બીજો એક ખંડ X -અક્ષની નીચેના અર્ધતલમાં હોય, તો એક અર્ધતલમાંના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધી બમણું કરવાથી આખા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મળે.



$$A_1 = \left| \int_0^a y dx \right|$$

$$A = 2A_1$$

- (7) જો વક અને તેનાથી આવૃત્ત થયેલ પ્રદેશ બંને અક્ષ પરત્વે સંમિત હોય, તો પ્રથમ ચરણમાં રહેલા ભાગનું ક્ષેત્રફળ મેળવી તેને ચાર ગણું કરવાથી આખા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મળશે.



$$A_1 = \left| \int_0^a y dx \right|$$

$$A = 4A_1$$

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

- (1) વક્ર $xy=16$, X -અક્ષ અને રેખાઓ $x=4$ અને $x=8$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.
 (A) $2 \log_e 16$ (B) $16 \log_e 2$ (C) $\log_e 4$ (D) $\log_e 16$

ઉકેલ : અહીં, આપેલ વક્ર $xy=16$

તેથી, $x > 0$ તો $y > 0$ અને $x < 0$ તો $y < 0$.

$\therefore y > 0$ તથા $4 \leq x \leq 8$, તેથી વક્ર X -અક્ષની ઉપર છે.

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = |I|$

$$\text{જ્યાં } I = \int_4^8 y \, dx$$

$$I = \int_4^8 \frac{16}{x} \, dx$$

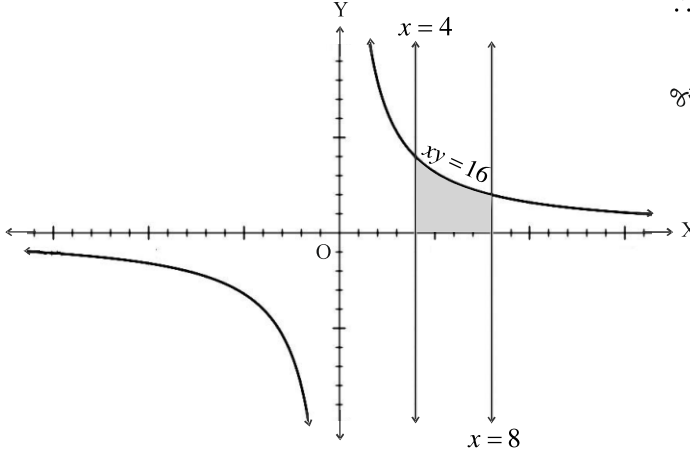
$$= 16 \left[\log |x| \right]_4^8$$

$$= 16 [\log 8 - \log 4]$$

$$= 16 \log \left(\frac{8}{4} \right)$$

$$= 16 \log_e 2$$

જવાબ : (B)



આકૃતિ 18.10

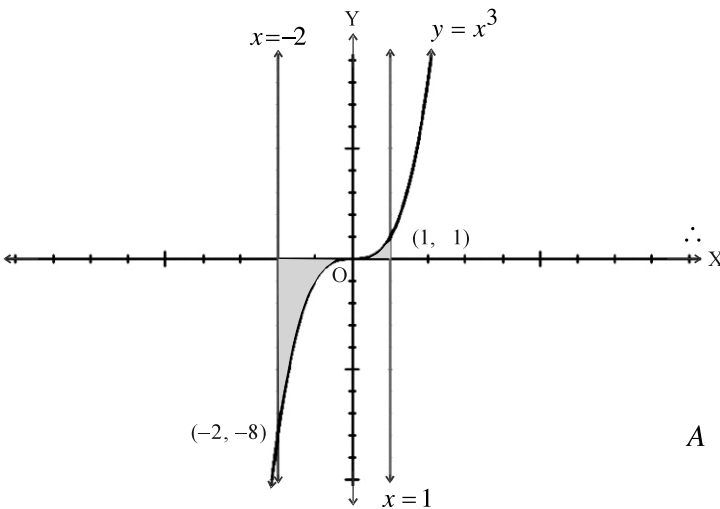
- (2) વક્ર $y=x^3$, X -અક્ષ અને રેખાઓ $x=-2$ અને $x=1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

- (A) -9 (B) $\frac{15}{4}$ (C) $\frac{17}{4}$ (D) $\frac{13}{4}$

ઉકેલ : અહીં આપેલ વક્ર $y=x^3$ તેથી, જ્યારે $x < 0$ ત્યારે $y < 0$ અને $x > 0$ ત્યારે $y > 0$.

$\therefore$ જ્યારે $-2 \leq x \leq 0$ ત્યારે $y \leq 0$ અને જ્યારે $0 < x \leq 1$ ત્યારે $y > 0$.

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = |I_1| + |I_2|$



આકૃતિ 18.11

$$I_1 = \int_{-2}^0 y \, dx$$

$$= \int_{-2}^0 x^3 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0$$

$$= 0 - 4$$

$$I_1 = -4$$

$$I_2 = \int_0^1 y \, dx$$

$$= \int_0^1 x^3 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

$$I_2 = \frac{1}{4}$$

$$A = |I_1| + |I_2|$$

$$= |-4| + \left| \frac{1}{4} \right|$$

$$= 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

જવાબ : (C)

(3) વક્ર $y = |x-2|$, X -અક્ષ અને રેખાઓ $x=1$ અને $x=3$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(AIEEE : 2004)

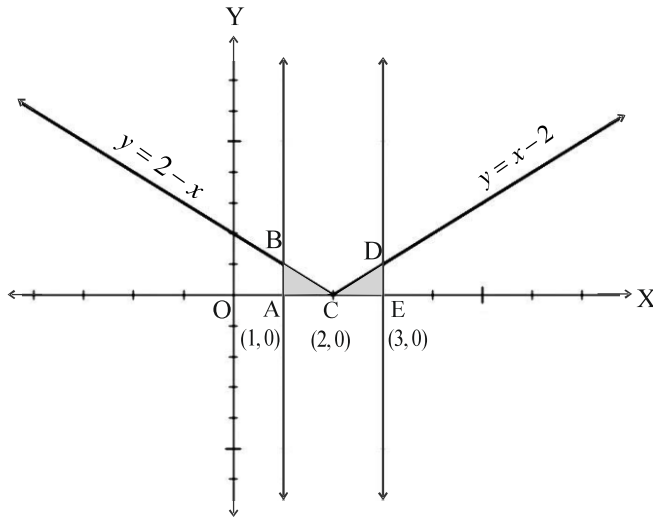
ઉકેલ અહીં આપેલ વક્ર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે.

$$y = |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x \leq 2 \end{cases}$$

$$y_2 = x-2, \quad x \geq 2 \quad \text{અને} \quad y_1 = 2-x, \quad x \leq 2$$

x	2	3	4
y	0	1	2

x	2	1	-1
y	0	1	3



આકૃતિ 18.12

$$\therefore \text{ક્ષેત્રફળ} = I_1 + I_2$$

$$= \int_1^2 y_1 dx + \int_2^3 y_2 dx$$

$$= \int_1^2 (2-x) dx + \int_2^3 (x-2) dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3$$

$$= \left[(4-2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \right] + \left[\left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2-4) \right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$(\text{ક્ષેત્રફળ} = 2 \Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = 2 \left(\frac{1}{2} \times b \times h \right))$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 1).$$

જવાબ : (A)

(4) વર્તુળ $x^2 + y^2 = 16$ અને પરવલય $y^2 = 6x$ દ્વારા ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

- (A) $\frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$ (B) $\frac{2}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ (C) $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ (D) $\frac{4}{3}(\sqrt{3} + 2\pi)$

ઉકેલ : અહીં વર્તુળ $x^2 + y^2 = 16$ તથા $y^2 = 6x$ ઉકેલતાં,

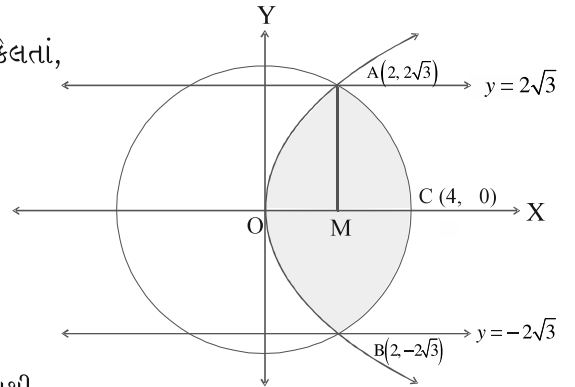
$$\therefore x^2 + 6x = 16$$

$$\therefore x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$\therefore (x+8)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -8 \text{ અથવા } x = 2$$

$$x = -8 \text{ માટે } y^2 = -48 < 0 \text{ જે શક્ય નથી.}$$



આકૃતિ 18.13

$$\text{આમ, છેલ્લિંદુ } A(2, 2\sqrt{3}), B(2, -2\sqrt{3})$$

$$\text{હવે, } x_1 = \sqrt{16 - y^2}, x_2 = \frac{y^2}{6}$$

$$\text{મોંગેલ ક્ષેત્રફળ} = OACBO \text{ નું ક્ષેત્રફળ}$$

$$= 2(OACO \text{ નું ક્ષેત્રફળ})$$

$$= 2 \int_0^{2\sqrt{3}} (x_1 - x_2) dy$$

$$= 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{16 - y^2} - \frac{y^2}{6} \right) dy$$

$$= 2 \left[\frac{y}{2} \sqrt{16 - y^2} + 8 \sin^{-1} \frac{y}{4} - \frac{y^3}{18} \right]_0^{2\sqrt{3}}$$

$$= 2 \left[\frac{2\sqrt{3}}{2} \sqrt{16 - 12} + 8 \sin^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{4} - \frac{24\sqrt{3}}{18} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 8 \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \right]$$

$$= 2 \left[2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{3} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{2\sqrt{3} + 8\pi}{3} \right]$$

$$= \frac{4}{3} (\sqrt{3} + 4\pi)$$

જવાબ : (C)

બીજી રીત :

$$OACO \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = OAM \text{ નું ક્ષેત્રફળ} + ACM \text{ નું ક્ષેત્રફળ}$$

$$= \int_0^2 \sqrt{6x} dx + \int_2^4 \sqrt{16 - x^2} dx$$

$$= \sqrt{6} \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 + \left[\frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} + 8 \sin^{-1} \frac{x}{4} \right]_2^4$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{6} (2\sqrt{2}) + \left[8 \sin^{-1} 1 - 2\sqrt{3} - 8 \sin^{-1} \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{8}{3} \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{2} - \frac{8\pi}{6}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}$$

$$\therefore \text{ મોંગેલ ક્ષેત્રફળ} = \frac{4}{3} (\sqrt{3} + 4\pi)$$

જવાબ : (C)

(5) વક્ર $y = x \sin x$, X -અક્ષ અને $x = 0$ અને $x = 2\pi$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

- (A) 2π (B) 3π (C) 4π (D) π

ઉકેલ : અહીં આપેલ વક્ર $y = x \sin x$

તેથી, $\pi \leq x \leq 2\pi$ તો $y \leq 0$. $0 \leq x \leq \pi$ તો $y \geq 0$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ માંગેલ ક્ષેત્રફળ } A &= \int_0^{\pi} y \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} y \, dx \right| \\ &= \int_0^{\pi} x \sin x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx \right| \\ &= [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi} + \left| [-x \cos x + \sin x]_{\pi}^{2\pi} \right| \\ &= \pi + \left| \{(-2\pi) - (\pi)\} \right| = \pi + |-3\pi| = 4\pi \quad \text{જવાબ : (C)} \end{aligned}$$

(6) પરવલય $ay = 3(a^2 - x^2)$ તથા X -અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ થશે. ($a > 0$)

- (A) $2a^2$ (B) $4a^2$ (C) $\frac{3}{4}a^2$ (D) $\frac{5}{4}a^2$

ઉકેલ : અહીં, આપેલ વક્ર $ay = 3(a^2 - x^2)$ છે.

$y = 0$ લેતાં $3(a^2 - x^2) = 0$ મળે. તેથી $x = \pm a$.

તેથી આપેલ વક્ર X -અક્ષને $x = a$ અને $x = -a$ માં છેદશે.

વળી, $-a \leq x \leq a$ ત્યારે $y \geq 0$

તેથી પરવલય $ay = 3(a^2 - x^2)$ અને X -અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું

$$\text{ક્ષેત્રફળ } A = \int_{-a}^a y \, dx.$$

$$\therefore A = \int_{-a}^a \frac{3(a^2 - x^2)}{a} \, dx$$

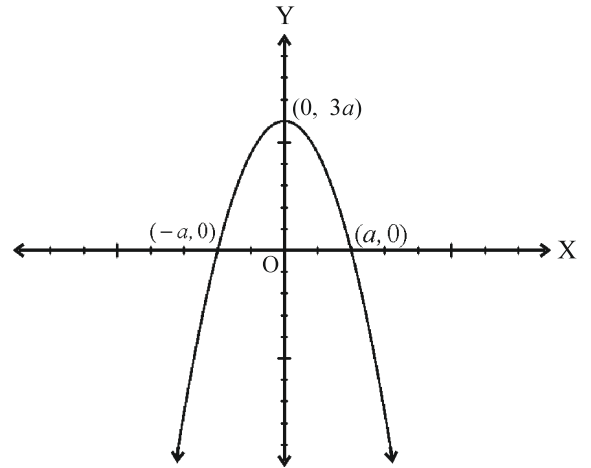
$$= \frac{3}{a} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= \frac{6}{a} \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= \frac{6}{a} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= \frac{6}{a} \left[a^3 - \frac{a^3}{3} \right] = \frac{6}{a} \left(\frac{2a^3}{3} \right) = 4a^2$$

જવાબ : (B)



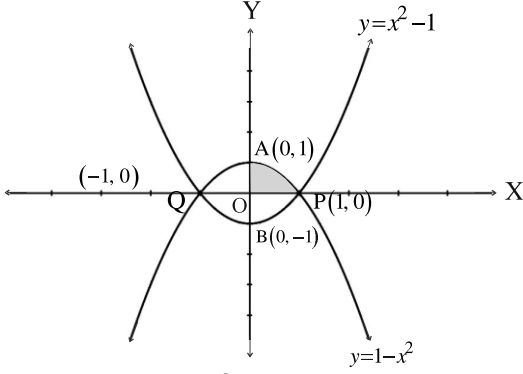
આકૃતિ 18.14

(7) વક્રો $y = 1 - x^2$ અને $y = x^2 - 1$ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{16}{3}$

ઉકેલ : અહીં વક્ર $y = 1 - x^2$ એટલે $x^2 = (1 - y)$ એ $A(0, 1)$ શીર્ષવાળો પરવલય દર્શાવશે તથા વક્ર

$y = x^2 - 1$ એટલે $x^2 = 1 + y$ એ $B(0, -1)$ શીર્ષવાળો પરવલય દર્શાવશે.



આકૃતિ 18.15

છેદબિંદુ શોધતાં,

$$1 - x^2 = x^2 - 1$$

$$\therefore 2x^2 = 2$$

$$\therefore x^2 = 1$$

$$\therefore x = \pm 1$$

આમ, $x = 1 \Rightarrow y = 0$ અને $x = -1 \Rightarrow y = 0$

આમ વક્રોના છેદબિંદુ $P(1, 0)$ અને $Q(-1, 0)$ મળે.

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $\Delta =$ (પ્રદેશ PAQBP નું ક્ષેત્રફળ)

$= 4(\text{પ્રદેશ PAOP નું ક્ષેત્રફળ})$

$$= 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx$$

$$= 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 4 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

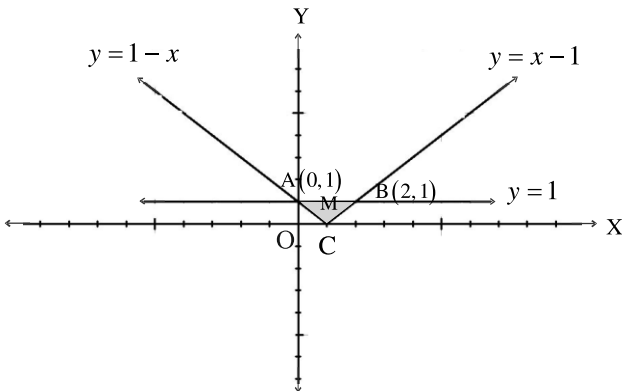
જવાબ : (C)

(8) વક્ર $y = |x - 1|$ અને $y = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(IIT : 1994)

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{5}{2}$

ઉકેલ : વક્ર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :



આકૃતિ 18.16

$$y = |x - 1| = \begin{cases} 1 - x, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$y = 1 - x, x \leq 1, \quad y = x - 1, x \geq 1,$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

રેખા $y = 1$ એ વક્ર $y = 1 - x$ ને $A(0, 1)$ માં છેદશે

અને રેખા $y = 1$ એ $y = x - 1$ ને $B(2, 1)$ માં છેદશે.

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} |D|$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0) - 0 + 1(2) = 2$$

$$\Delta = \frac{1}{2} |D| = \frac{1}{2} |2| = 1$$

જવાબ : (B)

બીજી રીત (સંકલનથી)

$$\Delta = - \int_0^1 (1-y) dy + \int_0^1 (y+1) dy$$

$$= - \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_0^1 = - \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} = 1 \quad \text{અથવા} \quad \int_0^1 2y dy = \left[y^2 \right]_0^1 = 1.$$

ત્રીજી રીત (ભૌમિતિક)

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = \frac{1}{2} (2-0) \cdot 1 = 1$$

(9) વક્ર $y = \log_e (x+e)$ અને અક્ષો વચ્ચે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ થશે.

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4 (AIEEE : 2005)

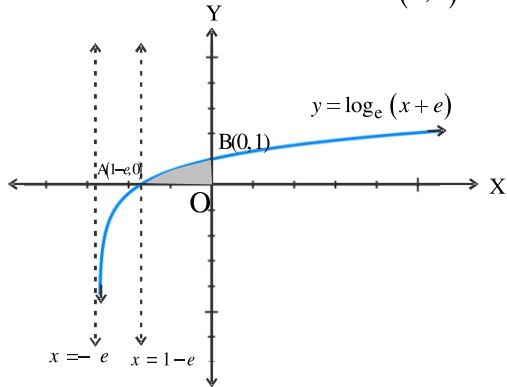
ઉકેલ : વક્ર $y = \log_e (x+e)$ જ્યારે $(x+e) > 0$ i.e. $x > -e$ હોય ત્યારે જ વ્યાખ્યાયિત છે.

$$\text{વળી } y = 0 \Rightarrow \log_e (x+e) = 0 \Rightarrow x+e = 1 \Rightarrow x = 1-e$$

$\therefore$ વક્ર $y = \log_e (x+e)$, X-અક્ષને $A(1-e, 0)$ માં છેદશે.

$$\text{વળી, જ્યારે } x = 0 \Rightarrow y = \log_e e = 1$$

$\therefore$ વક્ર Y-અક્ષને $B(0, 1)$ માં છેદશે.



આકૃતિ 18.17

$$\therefore \text{ માંગેલ ક્ષેત્રફળ } \Delta = \int_{1-e}^0 y dx$$

$$= \int_{1-e}^0 \log(x+e) dx$$

$$\text{ધારો કે, } t = x+e$$

$$\therefore dx = dt$$

$$\text{વળી } x = 1-e \Rightarrow t = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow t = e$$

$$\therefore \Delta = \int_1^e \log t dt$$

$$= [t \cdot \log t - t]_1^e$$

$$= (e \log e - e) - (-1) = 1$$

જવાબ : (B)

(10) વક્ર $y = 2^{kx}$ અને X -અક્ષના ઉપરના અર્ધતલમાં રેખાઓ $x = 0$ અને $x = 2$ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{3}{\log 2}$ હોય તો $k = \dots\dots$

- (A) -1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : અહીં, વક્ર $y = 2^{kx}$ હોવાથી x અને k ની કોઈ પણ કિંમત માટે $y > 0$ થશે.

તેથી વક્ર $y = 2^{kx}$, $0 \leq x \leq 2$ માટે X -અક્ષના ઉપરના અર્ધતલમાં હશે.

$$\text{તેથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ } A = \int_0^2 y dx = \int_0^2 2^{kx} dx$$

$$= \frac{1}{k} \left[\frac{2^{kx}}{\log 2} \right]_0^2$$

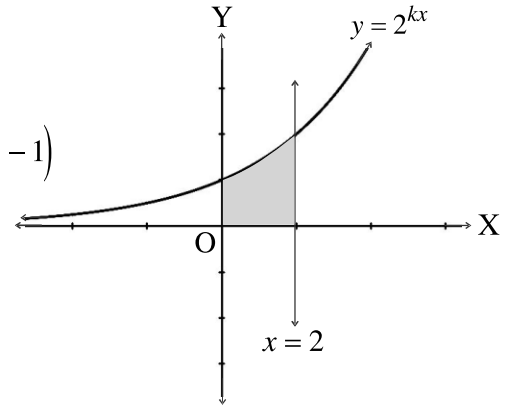
$$= \frac{1}{k \log 2} (2^{2k} - 1)$$

હવે, $A = \frac{3}{\log 2}$ આપેલ છે.

$$\therefore \frac{3}{\log 2} = \frac{(2^{2k} - 1)}{k \cdot \log 2}$$

$$\therefore 2^{2k} - 1 = 3k$$

$$\therefore k = 1$$



આકૃતિ 18.18

જવાબ : (C)

(11) વક્ર $y = 4 + 3x - x^2$ અને X -અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $\dots\dots$ છે.

- (A) $\frac{125}{3}$ (B) $\frac{125}{4}$ (C) $\frac{125}{6}$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : આપેલ વક્ર $y = 4 + 3x - x^2$

$$y = -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{25}{4}$$

$$\therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\left(y - \frac{25}{4}\right)$$

આપેલ વક્ર $P\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)$ શીર્ષવાળો પરવલય છે.

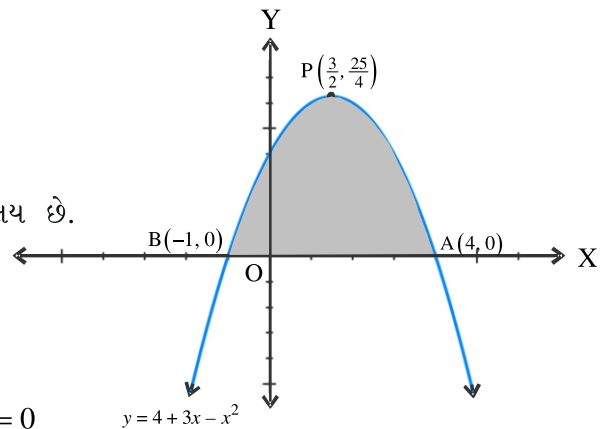
$y = 0$ લેતાં,

$$4 + 3x - x^2 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\therefore (x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ અથવા } x = -1$$



આકૃતિ 18.19

તેથી, આપેલો વક્ર X -અક્ષને $A(4, 0)$ અને $B(-1, 0)$ બિંદુએ છેદે છે.

$$\therefore \text{ માંગેલ ક્ષેત્રફળ } \Delta = \int_{-1}^4 y \, dx$$

$$\Delta = \int_{-1}^4 (4 + 3x - x^2) \, dx$$

$$= \left[4x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^4$$

$$= \left\{ \left(16 + 24 - \frac{64}{3} \right) - \left(-4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \right) \right\}$$

$$= \frac{125}{6}$$

જવાબ : (C)

(12) $x^2 + y^2 = 2ax$ વડે આપૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $\frac{1}{2} \pi a^2$

(B) πa^2

(C) $2\pi a^2$

(D) $4\pi a^2$

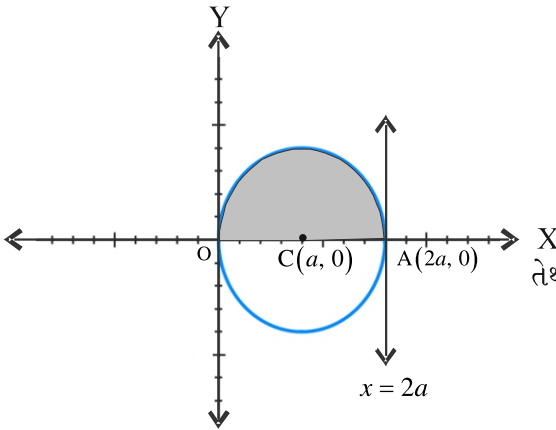
ઉકેલ : આપેલ વક્ર $x^2 + y^2 = 2ax$

$$\therefore x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2$$

$$\therefore (x - a)^2 + (y - 0)^2 = a^2$$

આમ આપેલ વક્ર $C(a, 0)$ કેન્દ્રવાળું અને a ત્રિજયાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.

$$y = 0 \text{ લેતાં, } x^2 = 2ax$$



$$\therefore x^2 - 2ax = 0$$

$$\therefore x(x - 2a) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ અથવા } x = 2a$$

તેથી, આપેલ વર્તુળ X -અક્ષને $O(0, 0)$ અને $A(2a, 0)$ માં છેદશે.

$$\therefore \text{ માંગેલ ક્ષેત્રફળ } = 2 \int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} \, dx$$

$$= 2 \int_0^{2a} \sqrt{a^2 - (x - a)^2} \, dx$$

$$= 2 \left[\frac{x-a}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) \right]_0^{2a}$$

આકૃતિ 18.20

$$= 2 \left[\frac{\pi}{2} \times \frac{a^2}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \times \frac{a^2}{2} \right) \right]$$

$$= \pi a^2$$

નોંધ : a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ πa^2 જ થાય.

જવાબ : (B)

(13) વક્ર $y = (x-1)(x-2)(x-3)$, X -અક્ષ અને રેખાઓ $x=0$ અને $x=3$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $\frac{9}{4}$

(B) $\frac{11}{4}$

(C) $\frac{11}{2}$

(D) $\frac{9}{2}$

ઉકેલ : આપેલ વક્ર $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ માટે

x	0	1	2	3
y	-6	0	0	0

તથા જ્યારે $0 \leq x \leq 1$ ત્યારે $y \leq 0$

$1 \leq x \leq 2$ ત્યારે $y \geq 0$

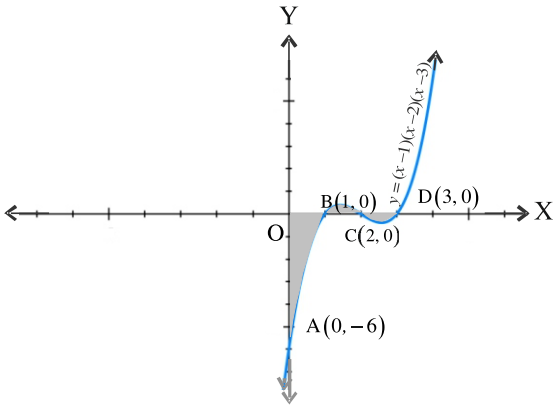
$2 \leq x \leq 3$ ત્યારે $y \leq 0$ તેથી વક્રનો કાચો આલેખ આ પ્રમાણે થશે :

તેથી વક્ર, X -અક્ષ અને રેખાઓ $x=0$ અને $x=3$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

$$\Delta = \left| \int_0^1 y \, dx \right| + \left| \int_1^2 y \, dx \right| + \left| \int_2^3 y \, dx \right|$$

$$\text{જ્યાં } y = f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$= (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$



આકૃતિ 18.21 $\therefore F(x) = \int (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \, dx$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x \right)$$

$$\therefore F(0) = 0, F(1) = \left(\frac{1}{4} - 2 + \frac{11}{2} - 6 \right) = -\frac{9}{4}$$

$$F(2) = (4 - 16 + 22 - 12) = -2, F(3) = \left(\frac{81}{4} - 54 + \frac{99}{2} - 18 \right) = \frac{-9}{4}$$

$$\therefore \Delta = |F(1) - F(0)| + |F(2) - F(1)| + |F(3) - F(2)|$$

$$= \left| \frac{-9}{4} - 0 \right| + \left| -2 - \left(\frac{-9}{4} \right) \right| + \left| \frac{-9}{4} - (-2) \right| = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \quad \text{જવાબ : (B)}$$

(14) વક્ર $x = y^2 + 4y + 3$, Y -અક્ષ અને રેખા $y=2$, $y=-2$ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) 18

(B) $\frac{56}{3}$

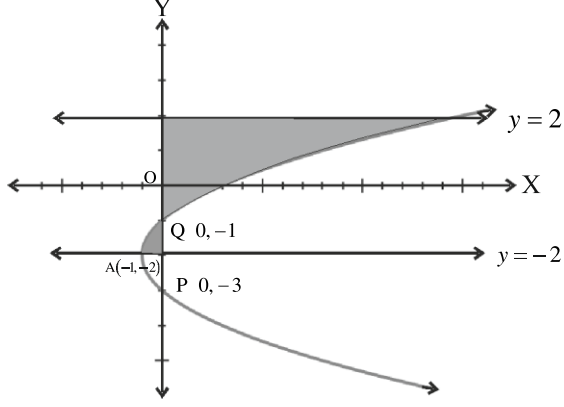
(C) $\frac{52}{3}$

(D) $\frac{100}{3}$

ઉકેલ : અહીં, $x = y^2 + 4y + 3$

$$\therefore x + 1 = y^2 + 4y + 4$$

$$\therefore (x + 1) = (y + 2)^2$$



આકૃતિ 18.22

સમીકરણ $A(-1, -2)$ શીર્ષવાળો પરવલય દર્શાવે છે.

અહીં, $x = y^2 + 4y + 3$ અને Y -અક્ષના છેદબિંદુ માટે $x = 0$ લેતાં,

$$y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$\therefore (y + 3)(y + 1) = 0$$

$$\therefore y = -3 \text{ અથવા } y = -1.$$

પરવલય Y -અક્ષને $P(0, -3)$ અને $Q(0, -1)$ માં છેદશે.

$$\therefore \text{ માંગેલ ક્ષેત્રફળ } \Delta = \left| \int_{-2}^{-1} x \, dy \right| + \left| \int_{-1}^2 x \, dy \right|$$

$$\Delta = |I_1| + |I_2|$$

$$I_1 = \int_{-2}^{-1} (y^2 + 4y + 3) \, dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{3} + \frac{4y^2}{2} + 3y \right]_{-2}^{-1}$$

$$= \left(\frac{-1}{3} + 2 - 3 \right) - \left(\frac{-8}{3} + 8 - 6 \right) = \frac{-2}{3}$$

$$\therefore |I_1| = \frac{2}{3}$$

$$I_2 = \int_{-1}^2 (y^2 + 4y + 3) \, dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{3} + \frac{4y^2}{2} + 3y \right]_{-1}^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 8 + 6 \right) - \left(\frac{-1}{3} + 2 - 3 \right) = 18$$

$$\Delta = |I_1| + |I_2| = \frac{2}{3} + 18 = \frac{56}{3}$$

જવાબ : (B)

(15) વકો $x^2 = 4by$ અને $y^2 = 4ax$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે. ($a > 0, b > 0$)

- (A) $16ab$ (B) $16\pi ab$ (C) $\frac{16ab}{3}$ (D) $16\pi^2 ab$

ઉકેલ : આપેલ વકો $x^2 = 4by$ અને $y^2 = 4ax$ ઊગમબિંદુ શીર્ષવાળા અનુક્રમે Y -અક્ષ અને X -અક્ષ પ્રત્યે સંમિત પરવલયો છે.

$$\frac{x^2}{4b} = y \text{ અને } y^2 = 4ax \text{ ઉકેલતાં,}$$

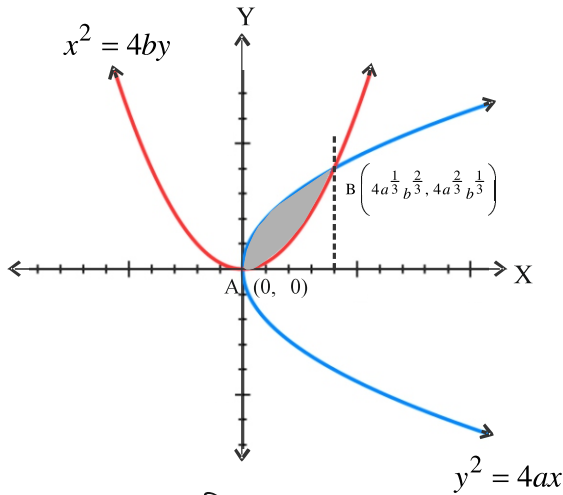
$$\left(\frac{x^2}{4b}\right)^2 = 4ax$$

$$\therefore x^4 - 64ab^2x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 64ab^2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ અથવા } x = 4 \cdot a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$$

$$x = 0 \text{ લેતાં } y = 0 \text{ અને } x = 4 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} \text{ લેતાં } y = 4 a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \text{ આપેલ વકોનાં છેદબિંદુ } A(0, 0) \text{ અને } B\left(4 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}, 4 a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}\right) \text{ છે.}$$



આકૃતિ 18.23

$$\text{મંગેલ ક્ષેત્રફળ} = \Delta = \int_0^{4 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}} (y_1 - y_2) dx$$

$$= 4 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} \int_0^{4 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}} \left(2\sqrt{ax} - \frac{x^2}{4b}\right) dx$$

$$= 2\sqrt{a} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{4 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}} - \left[\frac{x^3}{12b} \right]_0^{4 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 2a^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} \cdot 8 a^{\frac{1}{2}} b \right) - \frac{1}{4b} \left(\frac{64ab^2}{3} \right)$$

$$= \frac{32}{3} ab - \frac{16}{3} ab$$

$$= \frac{16}{3} ab$$

જવાબ : (C)

(16) જો વકો $x = ay^2$ અને $y = ax^2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 1 હોય, તો $a = \dots\dots$. ($a > 0$)

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 3

(IIT :2004)

ઉકેલ : આપેલ વકોનાં સમીકરણો $x = ay^2$ અને $y = ax^2$ ને ઉકેલતાં,

$$x = a(ax^2)^2$$

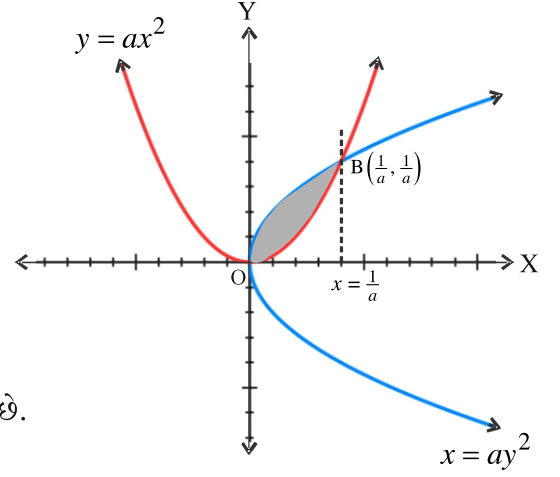
$$\therefore x = a^3 x^4$$

$$\therefore x(1 - a^3 x^3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ અથવા } x = \frac{1}{a}$$

$$\text{જો } x = 0 \text{ તો } y = 0 \text{ અને } x = \frac{1}{a} \text{ તો } y = \frac{1}{a}$$

તેથી વક્રોની છેદબિંદુઓ $O(0, 0)$ અને $B\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$ છે.



આકૃતિ 18.24

$$\text{મંગેલ ક્ષેત્રફળ } A = \int_0^{\frac{1}{a}} (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{a}} \left(\sqrt{\frac{x}{a}} - ax^2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right\} - \frac{ax^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{a}}$$

$$= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{a}} - \frac{ax^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{2}{3a^2} - \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{3a^2}$$

$$\text{હવે, } A = 1$$

$$\therefore \frac{1}{3a^2} = 1. \text{ આથી, } a^2 = \frac{1}{3}. \text{ આથી, } a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

જવાબ : (A)

(17) વક્ર $x^2 + y^2 = 4$ અને $x^2 + y^2 = 4y$ વડે ઘેરાયેલા સામાન્ય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

(A) $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

(B) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

(C) $2\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$

(D) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

ઉકેલ : વક્ર $x^2 + y^2 = 4$, $(0, 0)$ કેન્દ્રવાળું અને 2 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે અને

$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

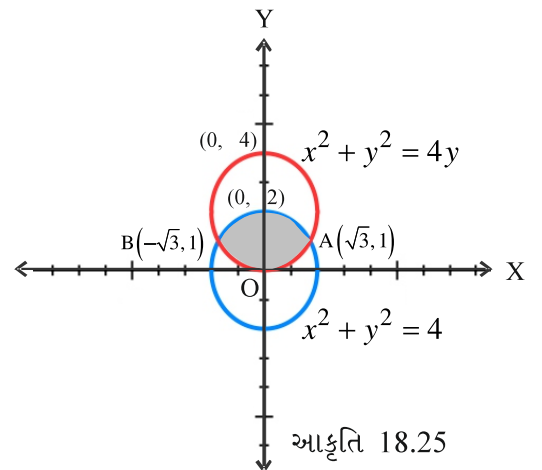
$$\Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

તે $(0, 2)$ કેન્દ્રવાળું અને 2 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ

દર્શાવશે.

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ અને } x^2 + y^2 = 4y \text{ ને ઉકેલતાં,}$$

$$4y = 4. \text{ આથી, } y = 1$$



આકૃતિ 18.25

$$y=1 \Rightarrow x^2+1=4 \Rightarrow x^2=3$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{3}$$

આપેલ બે વર્તુળનાં છેદબિંદુઓ $A(\sqrt{3}, 1)$ અને $B(-\sqrt{3}, 1)$ થાય.

$$\text{હવે, } x^2 + y^2 = 4. \text{ આથી } y^2 = 4 - x^2$$

$$\therefore y = \sqrt{4 - x^2}. \text{ આથી } y_1 = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{વળી, } x^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(y-2)^2 = 4 - x^2$$

$$\therefore y - 2 = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

વળી, આકૃતિ પરથી $y < 2$. આથી $(y-2) < 0$ (અહીં $y \neq 2 \because x^2 + y^2 = 4$)

$$\therefore y = 2 - \sqrt{4 - x^2}. \text{ આથી } y_2 = 2 - \sqrt{4 - x^2}$$

$$\therefore y_1 > y_2$$

$$\text{મોંઘેલ ક્ષેત્રફળ } A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - x^2} - 2 + \sqrt{4 - x^2} \right) dx$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(2\sqrt{4 - x^2} - 2 \right) dx$$

$$= 4 \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - x^2} - 1 \right) dx \quad (\text{યુગ્મ વિધેય})$$

$$= 4 \left[\frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 2 \sin^{-1} \frac{x}{2} - x \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 4 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (1) + 2 \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - 0 \right]$$

$$= 4 \left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$$

જવાબ : (A)

(18) રેખાઓ $x=0$, $x=2$ તથા વક્રો $y=2^x$ અને $y=2x-x^2$ વડે સિમિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $\frac{4}{3} - \frac{1}{\log 2}$

(B) $\frac{3}{\log 2} - \frac{4}{3}$

(C) $\frac{3}{\log 2} + \frac{4}{3}$

(D) $\frac{4}{\log 2} - 1$

ઉકેલ : વક્ર $y=2x-x^2$

$$\therefore -y = x^2 - 2x$$

$$-(y-1) = (x-1)^2$$

અ (1, 1) શીર્ષવાળો પરવલય છે.

$$y=0 \text{ લેતાં } 2x-x^2=0$$

$$\therefore x(2-x)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ અથવા } x=2$$

આમ તે X -અક્ષને $O(0, 0)$ અને $B(2, 0)$ માં છેદશે.

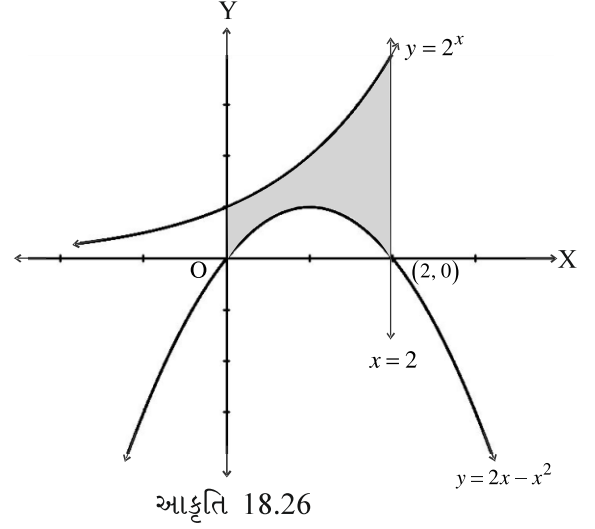
$$\text{માંગેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ } A = \int_0^2 [2^x - (2x - x^2)] dx$$

$$= \left[\frac{2^x}{\log 2} - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{\log 2} - 4 + \frac{8}{3} - \frac{1}{\log 2}$$

$$A = \frac{3}{\log 2} - \frac{4}{3}$$

જવાબ : (B)



(19) પરવલય $y=4x-x^2$ અને $y=x^2-x$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળનું X -અક્ષ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે.

(A) $\frac{128}{5}$

(B) $\frac{125}{4}$

(C) $\frac{52}{3}$

(D) $\frac{15}{4}$ (IIT : 1994)

ઉકેલ : અહીં, $y=4x-x^2$

$$\therefore (x-2)^2 = -(y-4)$$

તેથી પરવલય $y=4x-x^2$ નું શીર્ષ $P(2, 4)$ છે.

$$y=0 \text{ લેતાં, } 4x-x^2=0 \Rightarrow x(4-x)=0 \Rightarrow x=0 \text{ અથવા } x=4.$$

$$\text{તેથી } x=0 \Rightarrow y=0 \text{ અને } x=4 \Rightarrow y=0$$

તેથી પરવલય $y=4x-x^2$ અને X -અક્ષ સાથેનાં છેદબિંદુઓ $O(0, 0)$ અને $B(4, 0)$.

વળી, $y = x^2 - x$

$$\left(y + \frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

તેથી પરવલય $y = x^2 - x$ નું શીર્ષ $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ છે.

$$y = 0 \text{ લેતાં } x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ અથવા } x = 1$$

તેથી પરવલય $y = x^2 - x$ અને X -અક્ષ સાથેનાં છેદબિંદુઓ $O(0, 0)$ અને $C(1, 0)$ છે.

બે વક્રોનાં છેદબિંદુ શોધીએ.

$$y = 4x - x^2 = x^2 - x$$

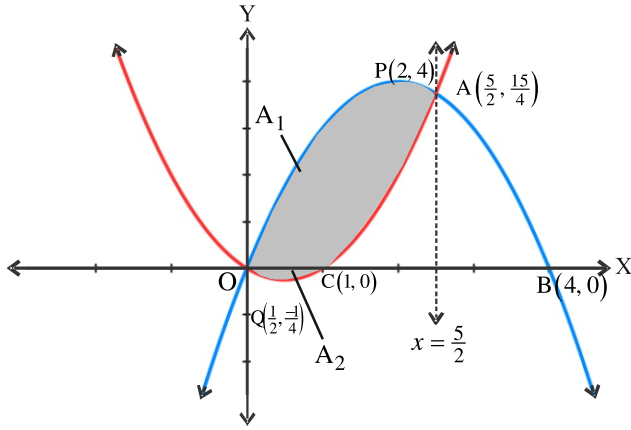
$$\therefore 2x^2 - 5x = 0$$

$$\therefore x(2x-5) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ અને } x = \frac{5}{2}$$

$O(0, 0)$ અને $A\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$ વક્રોનાં છેદબિંદુ છે.

બે વક્રો વચ્ચેનાં ક્ષેત્રફળનું X -અક્ષ બે ભાગ A_1 અને A_2 માં વિભાજન કરે છે. A_1 એ X -અક્ષની ઉપરનું ક્ષેત્રફળ અને A_2 એ X -અક્ષની નીચેનું ક્ષેત્રફળ છે.



આકૃતિ 18.27

$$A_1 = \int_0^{\frac{5}{2}} (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_0^{\frac{5}{2}} [(4x - x^2) - (x^2 - x)] dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left[\frac{5}{2} \cdot x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{25}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{125}{8} = \frac{125}{8} \left[1 - \frac{2}{3} \right] = \frac{125}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{125}{24}$$

$$A_2 = \left| \int_0^1 (x^2 - x) dx \right|$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \text{ માંગેલ ગુણોત્તર } = \frac{A_1}{A_2} = \frac{125}{4}$$

જવાબ : (B)

(20) વક્ર $f(x) = x^2 + bx - b$ ની $(1, 1)$ બિંદુ પર દોરેલ સ્પર્શક પ્રથમ ચરણમાં અક્ષો સાથે 2 એકમના ક્ષેત્રફળવાળો ત્રિકોણ બનાવે છે, તો b નું મૂલ્ય છે. (IIT : 2001)

(A) -3

(B) -1

(C) 1

(D) 3

ઉકેલ : અહીં, આપેલ વક્ર

$$f(x) = x^2 + bx - b \text{ છે.}$$

$$f'(x) = 2x + b$$

$$\therefore [f'(x)]_{(1,1)} = 2 + b$$

તેથી $(1, 1)$ બિંદુમાંથી પસાર થતા અને $m = 2 + b$ ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સમીકરણ

$$(y - 1) = (2 + b)(x - 1)$$

$$\therefore y = (2 + b)x - (b + 1)$$

(i)

સમીકરણ (i)માં $y = 0$ લેતાં,

$x = \frac{b+1}{b+2}$. તેથી સ્પર્શક X -અક્ષને $P\left(\frac{b+1}{b+2}, 0\right)$ માં છેદે છે.

સમીકરણ (i)માં $x = 0$ લેતાં, $y = -b - 1$ મળશે.

અને સ્પર્શક Y -અક્ષને $Q(0, -b-1)$ માં છેદશે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = \Delta OPQ$ નું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2} \times OP \times OQ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{b+1}{b+2} \times (-b-1)$$

હવે $A = 2$ આપેલ છે.

$$\therefore \frac{-1}{2} \frac{(b+1)^2}{b+2} = 2$$

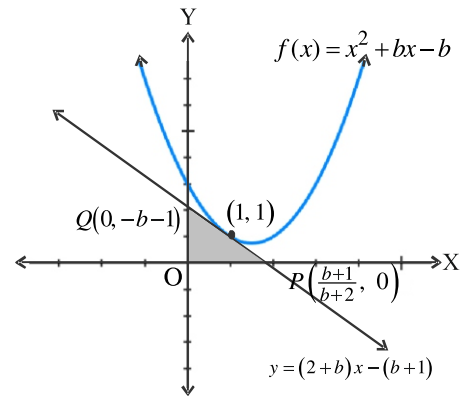
$$\therefore b^2 + 2b + 1 = -4b - 8$$

$$\therefore b^2 + 6b + 9 = 0$$

$$\therefore (b+3)^2 = 0$$

$$\therefore b = -3$$

જવાબ : (A)



આકૃતિ 18.28

(21) વક્ર $y = f(x)$ ની $(x, f(x))$ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $(2x+1)$ હોય અને વક્ર $(1, 2)$ બિંદુમાંથી પસાર થતો હોય, તો તે વક્ર, X -અક્ષ અને રેખા $x=1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ થશે.

(A) $\frac{5}{6}$

(B) $\frac{6}{5}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) 6

(IIT:1995)

ઉકેલ : વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = (2x+1)$

$$\therefore \int dy = \int (2x+1) dx$$

$$\therefore y = x^2 + x + c$$

હવે, તે વક્રબિંદુ $B(1, 2)$ માંથી પસાર થાય છે.

$$\therefore 2 = 1 + 1 + c$$

$$\therefore c = 0$$

$\therefore$ આપેલ વક્રનું સમીકરણ $y = x^2 + x$

$\therefore \left(y + \frac{1}{4}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$. તે $P\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$ શીર્ષવાળો પરવલય દર્શાવશે.

તે સમીકરણમાં $y = 0$ લેતાં, $x^2 + x = 0$.

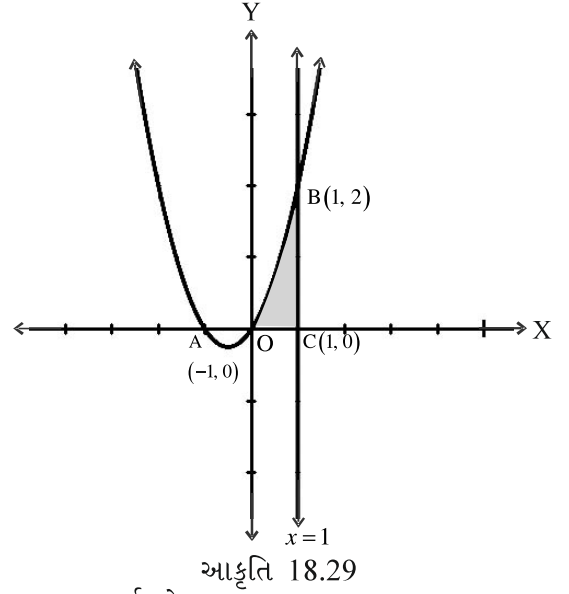
$\therefore x(x+1) = 0$. આથી, $x = 0$ અથવા $x = -1$.

$\therefore$ વક્ર અને X -અક્ષનાં છેદબિંદુ $O(0, 0)$ અને $A(-1, 0)$ છે.

વળી, વક્રમાં $x=1$ લેતાં $y=2$ મળશે. તેથી રેખા $x=1$ વક્રને $B(1, 2)$ માં છેદશે.

$$\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ } \Delta = \int_0^1 y dx = \int_0^1 (x^2 + x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

જવાબ : (A)



(22) વક્ર $x^2 + y^2 = 9$ અને રેખા $x=1$ વડે આવૃત્ત નાના ભાગનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $(9 \sec^{-1} 3 - \sqrt{8})$

(B) $\frac{1}{2} (9 \sec^{-1} 3 - \sqrt{8})$

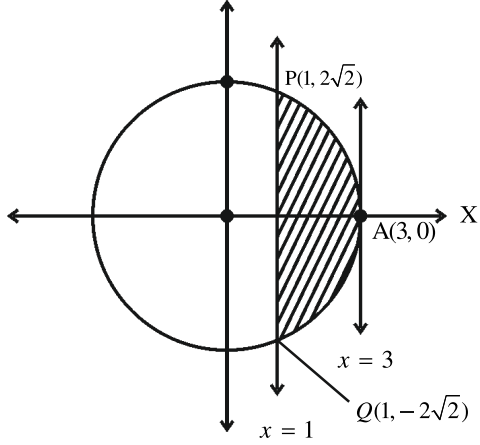
(C) $(\sqrt{8} - 9 \sec^{-1} 3)$

(D) આ પૈકી એક પણ નહિ

ઉકેલ : અહીં વક્ર $x^2 + y^2 = 9$ એ $C(0, 0)$ કેન્દ્રવાળું અને 3 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.

તેમાં $x=1$ લેતાં, $1 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8}$

$\therefore$ રેખા $x=1$ આપેલ વર્તુળ $x^2 + y^2 = 9$ ને $P(1, 2\sqrt{2})$ અને $Q(1, -2\sqrt{2})$ માં છેદશે.



આકૃતિ 18.30

$$\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ } \Delta = 2 \int_1^3 y \, dx$$

$$= 2 \int_1^3 \sqrt{9-x^2} \, dx$$

$$= 2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) \right]_1^3$$

$$= 2 \left[\frac{9\pi}{4} - \left(\frac{\sqrt{8}}{2} + \frac{9}{2} \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right) \right]$$

$$= 9 \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right] - \sqrt{8}$$

$$= 9 \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) - \sqrt{8}$$

$$= 9 \sec^{-1} 3 - \sqrt{8} \quad \text{જવાબ : (A)}$$

(23) વક્ર $y = a\sqrt{x} + bx$ એ બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થાય છે તથા વક્ર અને રેખા $x=4$ તથા X -અક્ષ વડે સિમિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 8 ચોરસ એકમ હોય તો,

(A) $a=3, b=-1$ (B) $a=3, b=1$ (C) $a=-3, b=1$ (D) $a=-3, b=-1$

ઉકેલ : વક્ર $y = a\sqrt{x} + bx$ એ બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થાય છે.

$$\therefore 2 = a + b \quad (1)$$

હવે, વક્ર $y = a\sqrt{x} + bx$, X -અક્ષ તથા રેખા $x=4$ થી સીમિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 8 છે.

$$\therefore \text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ } A = \int_0^4 (a\sqrt{x} + bx) \, dx$$

$$\therefore 8 = \left[a \cdot \frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{bx^2}{2} \right]_0^4$$

$$\therefore a \times \frac{2}{3} \times 8 + 8b = 8. \text{ આથી, } 2a + 3b = 3 \quad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ઉકેલતાં, $a=3$ તથા $b=-1$ મળશે. જવાબ : (A)

(24) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ હોય તો, $f(|x|)$ અને X -અક્ષની ઉપરનાં પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ થાય.

(A) $\frac{5}{3}$

(B) $\frac{2}{5}$

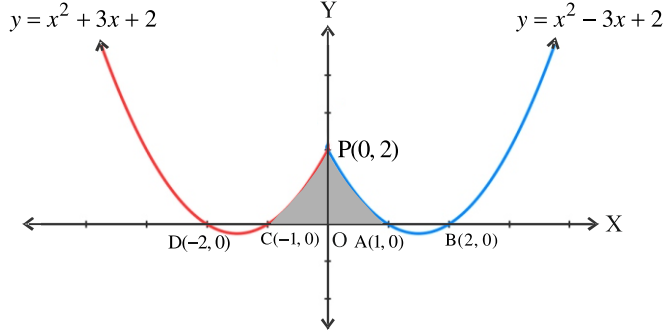
(C) $\frac{5}{2}$

(D) $\frac{3}{5}$

ઉકેલ : $f(|x|) = f(x) = x^2 - 3x + 2, x \geq 0$

$$\therefore y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} \quad (1)$$

$\therefore y + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ જે $\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$ શીર્ષવાળા પરવલયનો ભાગ છે. ($x > 0$)



આકૃતિ 18.31

વળી, $f(|x|) = f(-x), x \leq 0$ અર્થાત્ $f(x) = x^2 + 3x + 2$

$$\therefore y = x^2 + 3x + 2 \quad (2)$$

$\therefore y + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ જે $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$ શીર્ષવાળા પરવલયનો ભાગ છે.

સમીકરણ (1) અને (2) ઉકેલતાં, $x^2 - 3x + 2 = x^2 + 3x + 2$

$$\therefore x = 0 \text{ તથા } x = 0 \Rightarrow y = 2$$

તેથી બે વકોનું છેદબિંદુ $P(0, 2)$ મળશે.

વક $y = x^2 - 3x + 2$ માં $y = 0$ લેતાં,

$$(x - 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1$$

$\therefore$ વક $A(1, 0)$ અને $B(2, 0)$ માં X -અક્ષને છેદશે.

વક $y = x^2 + 3x + 2$ માં $y = 0$ લેતાં,

$$(x + 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = -1$$

$\therefore$ વક $C(-1, 0)$ અને $D(-2, 0)$ માં X -અક્ષને છેદશે.

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $\Delta = APCOA$ નું ક્ષેત્રફળ

$$= 2 \times APOA \text{ નું ક્ષેત્રફળ}$$

$$= 2 \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right] = 2 \left(\frac{5}{6} \right) = \frac{5}{3}$$

જવાબ : (A)

- (25) વિધેય $f(x)$ એ કોઈક અનુસૂચિ, સતત વિધેય છે તથા વક્ર $y = f(x)$, X -અક્ષ અને રેખાઓ $x = \frac{\pi}{4}$ અને $x = \beta > \frac{\pi}{4}$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $(\beta \sin \beta + \frac{\pi}{4} \cos \beta + \sqrt{2} \beta)$ તો $f(\frac{\pi}{2}) = \dots\dots$

(AIEEE : 2005)

- (A) $(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2} + 1)$ (B) $(\frac{\pi}{4} + \sqrt{2} - 1)$ (C) $1 - \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}$ (D) $(1 - \frac{\pi}{4} - \sqrt{2})$

ઉકેલ : માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = (\beta \sin \beta + \frac{\pi}{4} \cos \beta + \sqrt{2} \beta)$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\beta} f(x) dx = \beta \sin \beta + \frac{\pi}{4} \cos \beta + \sqrt{2} \beta$$

$$\therefore f(\beta) = \beta \cos \beta + \sin \beta - \frac{\pi}{4} \sin \beta + \sqrt{2}$$

$$(\therefore \beta \text{ ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં તથા જો } \int_{\alpha}^t f(x) dx = F(t) \text{ તો } f(t) = F'(t))$$

$$\therefore f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}$$

જવાબ : (C)

- (26) પરવલય $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$, રેખાઓ $x = 4$, $y = 4$ અને બંને અક્ષોથી રચાતા ચોરસનું ત્રણ ભાગ S_1, S_2 અને S_3 માં વિભાજન કરે છે તો $S_1 : S_2 : S_3 = \dots\dots$

- (A) 1:2:3 (B) 1:2:1 (C) 1:1:1 (D) 2:1:2

(AIEEE : 2005)

ઉકેલ : પરવલયો $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$ ઊગમબિંદુ શીર્ષવાળા અને અનુક્રમે ધન X -અક્ષ અને ધન Y -અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.

$$y^2 = 4x \text{ અને } y = \frac{x^2}{4} \text{ ના છેદબિંદુ માટે,}$$

$$\therefore \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = 4x$$

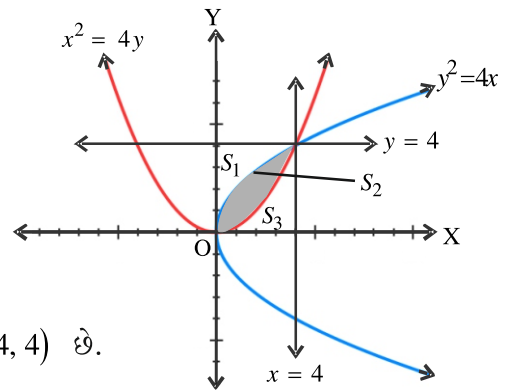
$$\therefore x(x^3 - 64) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ અથવા } x = 4$$

તેથી બંને પરવલયોનાં છેદબિંદુ $O(0, 0)$ અને $A(4, 4)$ છે.

$$S_1 = \int_0^4 x dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \frac{1}{4} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{12} \times 4^3 = \frac{16}{3}$$

$$S_2 = \int_0^4 (y_1 - y_2) dx = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx$$



આકૃતિ 18.32

$$= \left[2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

$$S_3 = \int_0^4 y \, dx = \int_0^4 \frac{x^2}{4} \, dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

$$S_1 : S_2 : S_3 = \frac{16}{3} : \frac{16}{3} : \frac{16}{3}$$

$$S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 1 : 1$$

જવાબ : (C)

(27) પરવલય $y = -x^2 + 2$ અને રેખા $x + y = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $\frac{9}{2}$

(B) 9

(C) $\frac{19}{2}$

(D) $\frac{17}{6}$

ઉકેલ : વક્રો પરવલય $y = -x^2 + 2$ અને રેખા $x + y = 0$

પરવલય $x^2 = -(y-2)$ નું શીર્ષ $P(0, 2)$ છે.

સમીકરણમાં $y = 0$ મૂકતાં $2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$\therefore$ આપેલ પરવલયનું શીર્ષ $P(0, 2)$ છે અને તે X -અક્ષને $C(\sqrt{2}, 0)$ અને $D(-\sqrt{2}, 0)$ માં છેદશે.

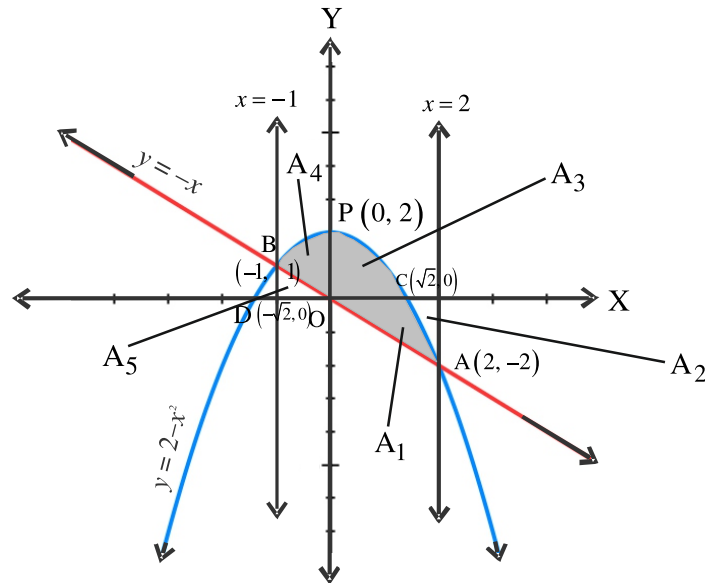
બંને વક્રો જે બિંદુમાં છેદે ત્યાં $2 - x^2 = -x$ થાય.

$$\therefore x^2 - x - 2 = 0$$

$$\therefore (x-2)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ અથવા } -1$$

આમ, આપેલા બંને વક્રો $A(2, -2)$ અને $B(-1, 1)$ માં છેદશે.



આકૃતિ 18.33

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $\Delta =$ ક્ષેત્રફળ I + ક્ષેત્રફળ II + ક્ષેત્રફળ III

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^0 (y_1 - y_2) dx + \int_0^{\sqrt{2}} y_1 dx + \left| \int_0^2 y_2 dx - \int_{\sqrt{2}}^2 y_1 dx \right| \\
 &= \int_{-1}^0 \left\{ (2 - x^2) - (-x) \right\} dx + \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx + \left| \int_0^2 (-x) dx - \int_{\sqrt{2}}^2 (2 - x^2) dx \right| \\
 &= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} + \left| \left[-\frac{x^2}{2} \right]_0^2 - \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_{\sqrt{2}}^2 \right| \\
 &= \left[0 - \left\{ -2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right\} \right] + \left[2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right] + \left| (-2) - \left\{ \left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \right\} \right| \\
 &= \frac{7}{6} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \left| \frac{-10}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right| = \frac{7}{6} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

અથવા

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 (y_1 - y_2) dx = \int_{-1}^2 \left[(2 - x^2) - (-x) \right] dx \\
 &= \int_{-1}^2 (2 - x^2 + x) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \left(4 - \frac{8}{3} + 2 \right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= 6 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

જવાબ : (A)

(28) વક્ર $y = \sqrt{x}$ અને રેખા $2y + 3 = x$ દ્વારા પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $\frac{27}{4}$

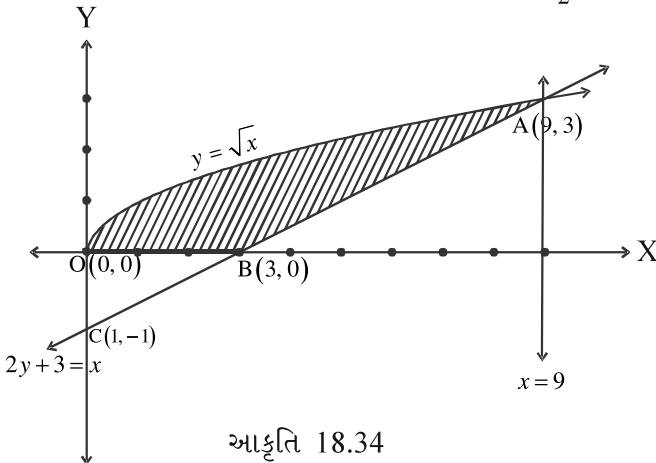
(B) 9

(C) 18

(D) 36 (IIT : 2003)

ઉકેલ : વક્ર $y = \sqrt{x}$ એટલે $y^2 = x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

વક્ર $y^2 = x$ અને રેખા $y = \frac{x-3}{2}$ જે બિંદુમાં છેટે ત્યાં



આકૃતિ 18.34

$$\left(\frac{x-3}{2} \right)^2 = x \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\therefore (x-1)(x-9) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ અથવા } x = 9$$

આપેલ વક્ર $y^2 = x$ અને રેખા $2y + 3 = x$ A(9, 3)

અને C(1, -1) માં છેદશે.

રેખાના સમીકરણ $2y + 3 = x$ માં $y = 0$ લેતાં $x = 3$

મળશે.

∴ રેખા $2y+3=x$, X -અક્ષને $B(3, 0)$ માં છેદશે.

$$\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ } \Delta = \int_0^9 \sqrt{x} dx - \int_3^9 \left(\frac{x-3}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^9 - \left[\frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x \right]_3^9$$

$$= 18 - \left[\left(\frac{81}{4} - \frac{27}{2} \right) - \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} \right) \right] = 9$$

જવાબ : (B)

(29) વક્રો $y^2 = x$ અને $y = |x|$ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) 1

(AIEEE : 2007)

ઉકેલ : $y^2 = x$ એ શીર્ષ $O(0, 0)$ વાળો ધન X -અક્ષને સંમિત પરવલય છે.

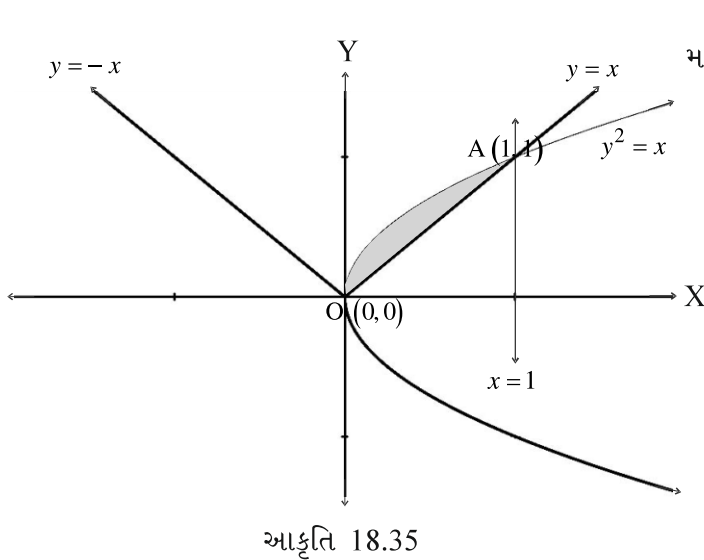
$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

$x \geq 0$ માટે વક્રો $y^2 = x$ અને $y = x$ ને ઉકેલતાં

$$x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ અથવા } x = 1$$

∴ વક્રો $O(0, 0)$ અને $A(1, 1)$ માં છેદશે.

$y^2 = x$ માટે $x < 0$ શક્ય નથી.



$$\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ } \Delta = \int_0^1 (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

જવાબ : (A)

(30) વક્રો $x+2y^2=0$ અને $x+3y^2=1$ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $\frac{4}{3}$

(B) $\frac{5}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{1}{3}$ (AIEEE : 2008)

ઉકેલ : વક્ર $x + 2y^2 = 0 \Rightarrow 2y^2 = -x \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{2}x$ (1)

અને $x + 3y^2 = 1 \Rightarrow 3y^2 = 1 - x \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ (2)

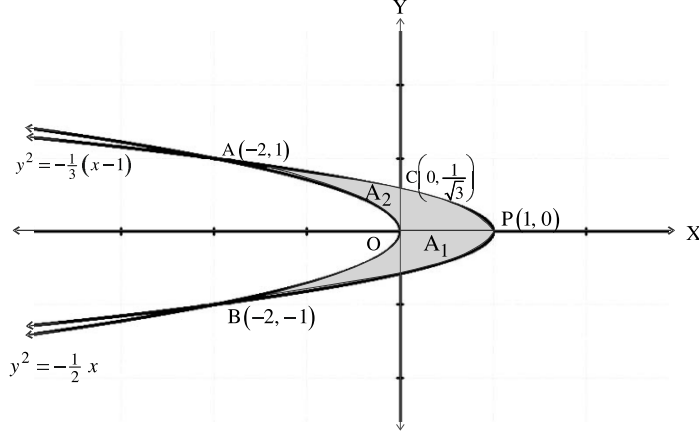
અહીં $P(1, 0)$ શીર્ષવાળો પરવલય છે.

સમીકરણ (1) અને (2)ને સરખાવતાં,

$$-\frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow 3x = 2x - 2 \Rightarrow x = -2$$

$$x = -2 \text{ લેતાં } y = \pm 1.$$

$\therefore$ બંને વક્રોના છેદબિંદુ $A(-2, 1)$ અને $B(-2, -1)$ મળે.



આકૃતિ 18.36

$$\begin{aligned} \text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ } \Delta &= APBOP \text{ નું ક્ષેત્રફળ} \\ &= 2(APOA) \text{ નું ક્ષેત્રફળ} \\ &= 2 \int_0^1 (x_1 - x_2) dy \\ &= 2 \int_0^1 \left((1 - 3y^2) - (-2y^2) \right) dy \\ &= 2 \int_0^1 (1 - 3y^2 + 2y^2) dy \\ &= 2 \int_0^1 (1 - y^2) dy \\ &= 2 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left[1 - \frac{1}{3} \right] = 2 \left(\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ માંગેલ ક્ષેત્રફળ } \Delta = \frac{4}{3}$$

જવાબ : (A)

$$\text{નોંધ : } A_1 = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1 - 3y^2) dy$$

$$A_2 = -2 \left(\int_0^1 -2y^2 dy - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 (1 - 3y^2) dy \right) = -2 \int_0^1 -2y^2 dy + 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 (1 - 3y^2) dy$$

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = -2 \int_0^1 -2y^2 dy + 2 \int_0^1 (1 - 3y^2) dy \\ &= 2 \int_0^1 (1 - y^2) dy \end{aligned}$$

(31) વકો $x^2 + y^2 = 9$ અને $y^2 = 8x$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે, જ્યાં $(0 \leq x \leq 3)$.

(A) 16π

(B) $\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{9\pi}{2} - 9\sin^{-1}\frac{1}{3}$

(C) $\frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2} - 6\sin^{-1}\left(\frac{1}{12}\right)$

(D) $\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{9\sqrt{3}\pi}{2} - 12\sin^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$

ઉકેલ : $x^2 + y^2 = 9$ એ $(0, 0)$ કેન્દ્ર અને 3 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે. (1)

$y^2 = 8x$ એ $(0, 0)$ શીર્ષ અને ધન X -અક્ષને સંમિત પરવલય છે. (2)

(1) અને (2)ને ઉકેલતાં $x^2 + 8x = 9$

$$\therefore x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\therefore (x+9)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -9 \text{ અથવા } x = 1.$$

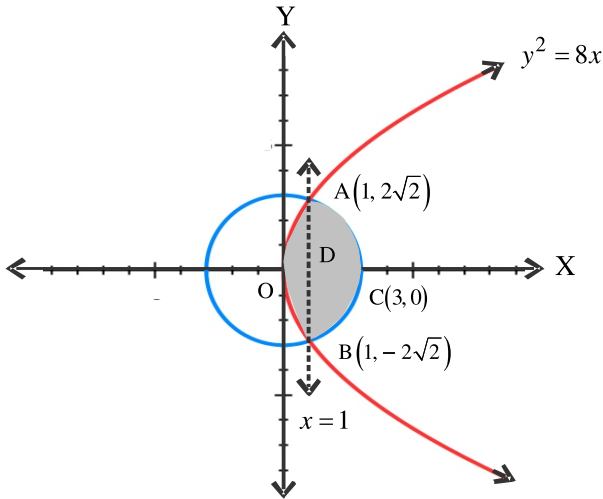
$$0 \leq x \leq 3. \text{ તેથી } x = 1 \text{ લેતાં } y = \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore$ વકો $A(1, 2\sqrt{2})$ અને $B(1, -2\sqrt{2})$ માં છેદશે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ = પ્રદેશ $OACBO$ નું ક્ષેત્રફળ

બંને વકો X -અક્ષ પરત્વે સંમિત હોવાથી,

ક્ષેત્રફળ = 2 (પ્રદેશ $OACDO$ નું ક્ષેત્રફળ)



આકૃતિ 18.37

= 2 (પ્રદેશ $OADO$ નું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ $DACD$ નું ક્ષેત્રફળ)

$$= 2 \left[\int_0^1 \sqrt{8x} \, dx + \int_1^3 \sqrt{9-x^2} \, dx \right]$$

$$= 2 \left\{ \left[\sqrt{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \left[\frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x}{3} \right]_1^3 \right\}$$

$$= 2 \left\{ \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} \right] + \left[\frac{9\pi}{4} - \left(\sqrt{2} + \frac{9}{2} \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right) \right] \right\}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{9\pi}{2} - 9\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

જવાબ : (B)

(32) વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$, રેખા $x - \sqrt{3}y = 0$ અને X -અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ થશે.

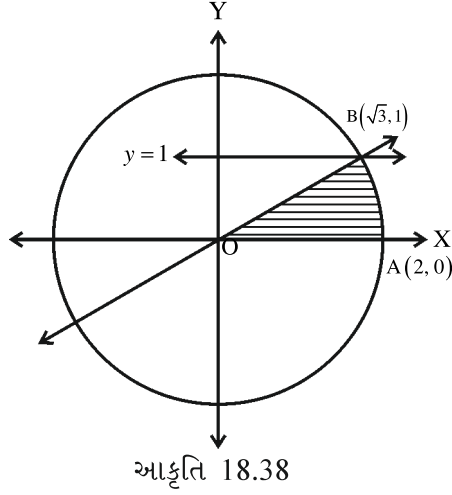
(A) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

(B) $\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

ઉકેલ :



આપેલ વક્રો વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$ અને રેખા $x - \sqrt{3}y = 0$ છે.

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ માં } y = \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ મૂકતાં, } x^2 + \frac{x^2}{3} = 4$$

$$\therefore x^2 = 3. \text{ આથી, } x = \pm\sqrt{3}.$$

પ્રથમ ચરણમાં $x = \sqrt{3}$ અને તેથી $y = \frac{x}{\sqrt{3}} = 1$.

$\therefore$ વર્તુળ અને રેખા પ્રથમ ચરણમાં $B(\sqrt{3}, 1)$ માં છેદશે.

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^1 (x_1 - x_2) dy \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{4 - y^2} - \sqrt{3}y \right) dy \\ &= \left[\frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \sin^{-1} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ક્ષેત્રફળ} = \frac{\pi}{3}.$$

જવાબ : (D)

નોંધ : $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ રેખા માટે $m = \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. આથી, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\text{વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{બીજી રીત : } \Delta &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{3}} dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4 - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} + \left[\frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 2 \sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_{\sqrt{3}}^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

- (33) વક્ર $y = x - x^2$ અને $y = mx$ રેખા વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{9}{2}$ હોય, તો $m = \dots\dots$.
 (A) 2, -4 (B) -2, 4 (C) 2, 4 (D) -2, -4

(IIT : 1999)

ઉકેલ : અહીં, આપેલ વક્રો $y = x - x^2$ અને $y = mx$ છે.
 છેદબિંદુ શોધવા માટે સમીકરણો ઉકેલતાં,

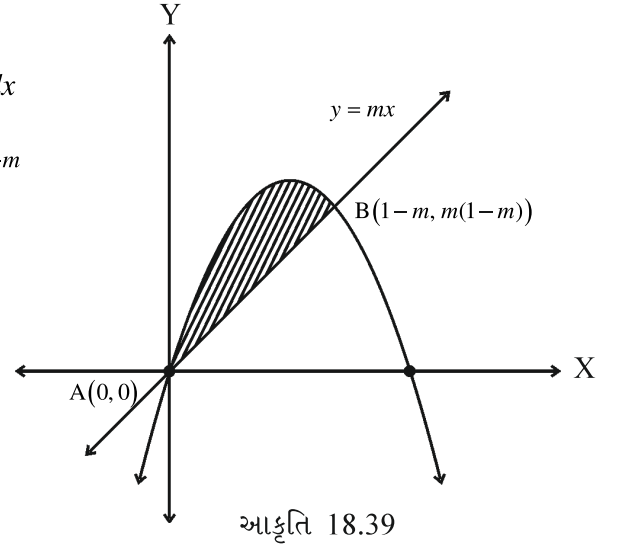
$$\begin{aligned} x - x^2 &= mx \\ \therefore x^2 + (m-1)x &= 0 \\ \therefore x[x + (m-1)] &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ અથવા } x = 1-m \end{aligned}$$

જો $x = 0$ તો $y = 0$ અને $x = 1-m$ તો $y = m(1-m)$.

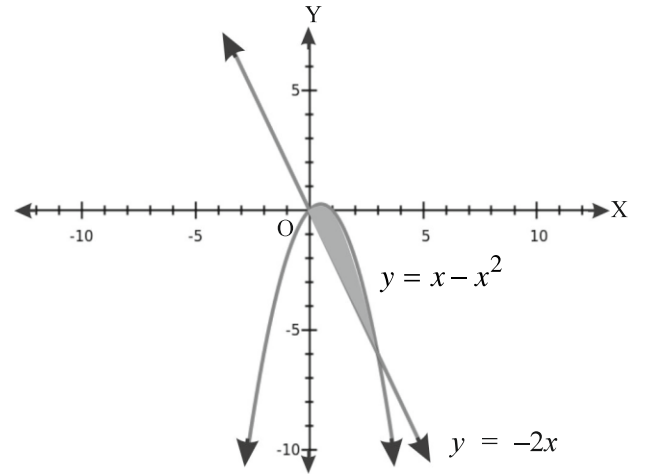
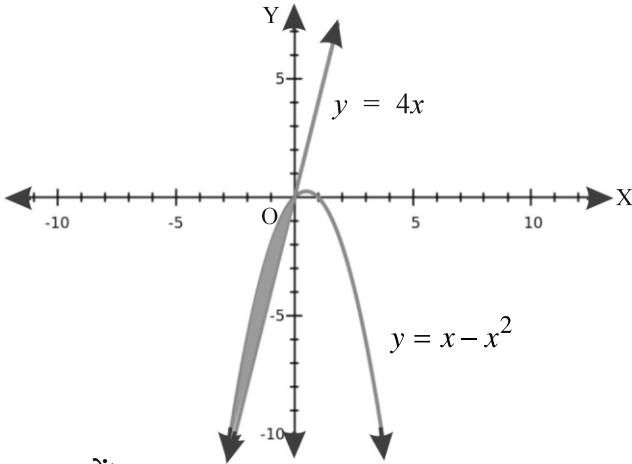
$\therefore$ આપેલ વક્રોની છેદબિંદુઓ $A(0, 0)$ અને $B(1-m, m(1-m))$ છે.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1-m} (y_1 - y_2) dx \\ &= \int_0^{1-m} (x - x^2 - mx) dx \\ &= \left[(1-m) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{1-m} \\ &= \frac{(1-m)^3}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ક્ષેત્રફળ } A &= |I| \\ \therefore \frac{9}{2} &= \frac{|(1-m)^3|}{6} \\ \therefore |(1-m)^3| &= 27 \\ \therefore (1-m) &= \pm 3 \\ \therefore 1-m &= 3 \text{ અથવા } 1-m = -3 \\ \therefore m &= -2 \text{ અથવા } m = 4. \end{aligned}$$



ખરેખર તો વિકલ્પ પ્રમાણે બે આકૃતિ થાય.



નોંધ :

$$(1) \quad A = \int_{-3}^0 [(x - x^2) - 4x] dx = \int_{-3}^0 (-3x - x^2) dx = \left[\frac{-3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^0 = -\left(\frac{-27}{2} + 9 \right) = \frac{9}{2}$$

$$(2) \quad I_1 = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^3 -2x dx - \int_1^3 (x - x^2) dx = \left[-x^2 \right]_0^3 - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^3 \\ &= -9 - \left[\left(\frac{9}{2} - 9 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right] \\ &= -9 - \left(-\frac{9}{2} - \frac{1}{6} \right) \\ &= -\frac{9}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{26}{6} \end{aligned}$$

$$A = |I_1| + |I_2| = \frac{1}{6} + \frac{26}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

જવાબ : (B)

(34) વક્રો $y = (x+1)^2$ અને $y = (x-1)^2$ અને રેખા $y = \frac{1}{4}$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{3}$

(IIT : 2005)

ઉકેલ : વક્ર $y = (x+1)^2$ એ $A(-1, 0)$ શીર્ષવાળો પરવલય છે અને $y = (x-1)^2$ એ $B(1, 0)$ શીર્ષવાળો પરવલય છે. બંને વક્રો જે બિંદુમાં છેદે ત્યાં

$$(x+1)^2 = (x-1)^2 \text{ થાય.}$$

$$\therefore (x+1)^2 - (x-1)^2 = 0$$

$$\therefore 4x = 0$$

$$\therefore x = 0$$

$$x = 0 \text{ લેતાં } y = 1 \text{ મળે.}$$

$$\therefore \text{બંને પરવલયો } P(0, 1) \text{ માં છેદશે.}$$

$$\text{હવે, } y = \frac{1}{4}, y = (x+1)^2 \text{ માં મૂકતાં}$$

$$\text{છેદબિંદુ } C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ અને } D\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{મળે. તેવી જ રીતે } y = \frac{1}{4},$$

$$y = (x-1)^2 \text{ માં મૂકતાં છેદબિંદુ } E\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ અને } F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ મળે.}$$

$$\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ} = \text{CPF નું ક્ષેત્રફળ}$$

$$= 2 (\text{PMF નું ક્ષેત્રફળ})$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(x-1)^2 - \frac{1}{4} \right] dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - 2x + \frac{3}{4} \right) dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{3}{4}x \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \right] = \frac{1}{3}$$

જવાબ : (D)

(35) વક્રો $y = |x-1|$ અને $y = 3-|x|$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) 3

(B) 4

(C) 2

(D) 6

(AIEEE : 2003)

$$\text{ઉકેલ : વક્ર } y = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

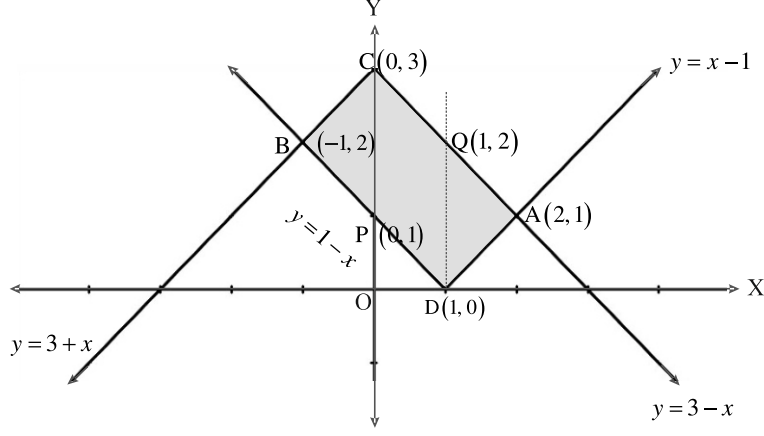
$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

$$y = 3 - |x| = \begin{cases} 3 - x, & x \geq 0 \\ 3 + x, & x < 0 \end{cases}$$

x	0	1	2	-1	-2
y	3	2	1	2	1

વક્રો $y = x - 1$ અને $y = 3 - x$ ઊંકેલતાં $A(2, 1)$ છેદબિંદુ મળશે.

વક્રો $y = 1 - x$ અને $y = 3 + x$ ઊંકેલતાં $B(-1, 2)$ છેદબિંદુ મળશે.



આકૃતિ 18.41

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A =$ લંબચોરસ $ACBD$ નું ક્ષેત્રફળ

$$= BCPB \text{ નું ક્ષેત્રફળ} + CQDPC \text{ નું ક્ષેત્રફળ} + QADQ \text{ નું ક્ષેત્રફળ}$$

$$= \int_{-1}^0 \{(3+x) - (1-x)\} dx + \int_0^1 \{(3-x) - (1-x)\} dx$$

$$+ \int_1^2 \{(3-x) - (x-1)\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (2x+2) dx + \int_0^1 2 dx + \int_1^2 (4-2x) dx$$

$$= [x^2 + 2x]_{-1}^0 + [2x]_0^1 + [4x - x^2]_1^2$$

$$= [(0 - (1 - 2))] + [2 - 0] + [(8 - 4) - (4 - 1)]$$

$$= 1 + 2 + 1$$

$$= 4$$

નોંધ : ક્ષેત્રફળ $= BC \times BD = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$

જવાબ : (B)

(36) વક્રો $y = |x| - 1$ અને $y = -|x| + 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) 1

(B) 2

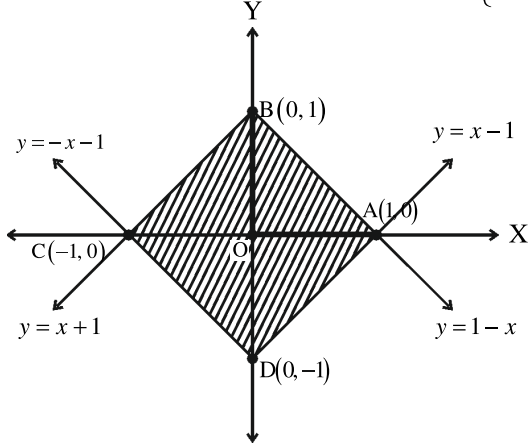
(C) 3

(D) 4

(IIT : 2002)

ઉકેલ : વક્ર $y = |x| - 1 = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ -x-1, & x < 0 \end{cases}$ અને

$$y = -|x| + 1 = \begin{cases} -x+1, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$$



આકૃતિ 18.42

બીજી રીત :

$$\Delta = 4 \int_0^1 (1-x) dx = 4 \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 4 \left[1 - \frac{1}{2} \right] = 2$$

(37) વક્ર $y = 2x - x^2$ અને રેખા $y = -x$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $\frac{35}{6}$

(B) $\frac{46}{6}$

(C) $\frac{9}{2}$

(D) $\frac{45}{2}$

(AIEEE : 2002)

ઉકેલ : વક્ર $y = 2x - x^2 \Rightarrow y = -(x^2 - 2x + 1) + 1 \Rightarrow y - 1 = -(x - 1)^2$

તે $P(1, 1)$ શીર્ષવાળો પરવલય દર્શાવશે.

$$y = 2x - x^2 \text{ માં } y = 0 \text{ લેતાં } 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ અથવા } x = 2$$

$\therefore$ વક્ર $O(0, 0)$ અને $B(2, 0)$ માં X -અક્ષને છેદે.

હવે $y = 2x - x^2$ અને $y = -x$ ને છેદાંબિંદુ શોધતાં,

$$-x = 2x - x^2$$

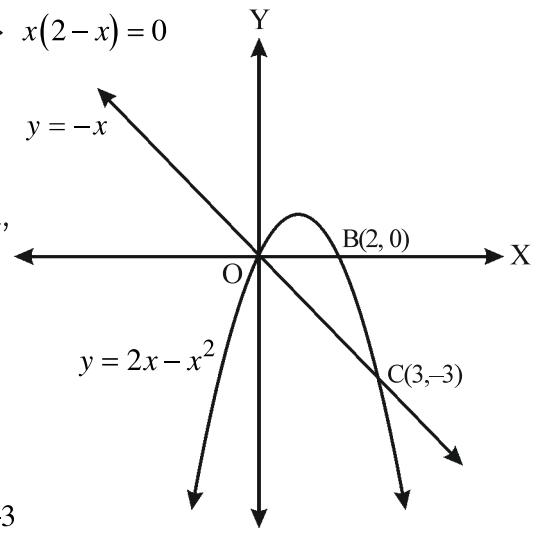
$$\therefore x^2 - 3x = 0$$

$$\therefore x(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ અથવા } x = 3$$

$$\therefore x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ અને } x = 3 \Rightarrow y = -3$$

તેથી વક્ર અને રેખા $O(0, 0)$ અને $C(3, -3)$ માં છેદશે.



આકૃતિ 18.43

$$\begin{aligned}
\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ } A &= \int_0^3 (y_1 - y_2) dx \\
&= \int_0^3 (2x - x^2 + x) dx \\
&= \int_0^3 (3x - x^2) dx \\
&= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \quad \text{જવાબ : (C)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{નોંધ : } A &= \int_0^2 (2x - x^2) dx - \left[\int_0^3 -x dx - \int_2^3 (2x - x^2) dx \right] \\
&= \int_0^2 (2x - x^2) dx + \int_2^3 (2x - x^2) dx - \int_0^3 -x dx \\
&= \int_0^3 (2x - x^2 + x) dx
\end{aligned}$$

(38) પરવલય $(y-2)^2 = x-1$, X -અક્ષ અને પરવલય પર જેનો y -ચામ 3 હોય તે બિંદુએ દોરેલા સ્પર્શક દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) એક પણ નહિ.

(AIEEE : 2009)

ઉકેલ : પરવલય $(y-2)^2 = (x-1)$ નું શીર્ષ $(1, 2)$ છે.

પરવલય પરનાં બિંદુનો y -ચામ 3 હોય, તો $(3-2)^2 = x-1 \Rightarrow x=2$.

$\therefore (2, 3)$ બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ જોઈએ છે.

$$\text{હવે } (y-2)^2 = x-1$$

$$\therefore 2(y-2) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y-2)}$$

$$\text{તેથી } \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(2,3)} = \frac{1}{2(3-2)} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{1}{2}$ અને સ્પર્શક $(2, 3)$ માંથી પસાર થાય છે.

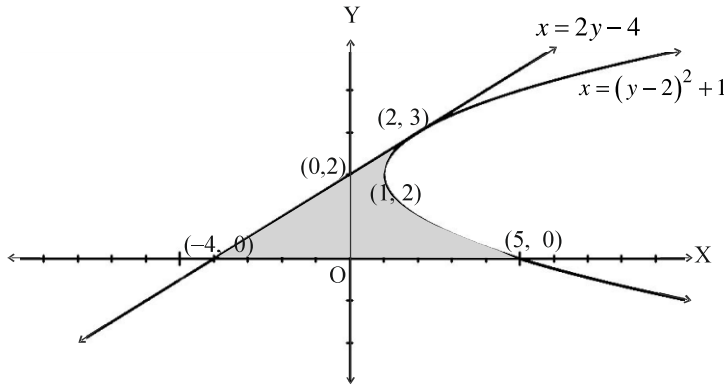
$$\therefore \text{સ્પર્શકનું સમીકરણ : } (y-3) = \frac{1}{2}(x-2)$$

$$\therefore 2y-6 = x-2$$

$$\therefore x = 2y-4$$

પરવલયના સમીકરણ $(y-2)^2 = x-1$ માં $y=0$ લેતાં $x=5$ મળે.

તેથી પરવલય X -અક્ષને $(5, 0)$ માં છેદશે.



આકૃતિ 18.44

$$\begin{aligned}
 \text{મંરેલ ક્ષેત્રફળ } A &= \int_0^3 (x_1 - x_2) dy \\
 &= \int_0^3 \left[\left((y-2)^2 + 1 \right) - (2y-4) \right] dy \\
 &= \left[\frac{(y-2)^3}{3} + y \right]_0^3 - \left[y^2 - 4y \right]_0^3 \\
 &= \left(\frac{1}{3} + 3 \right) - \left(\frac{-8}{3} - 0 \right) - (9 - 12) = 3 + 3 + 3 = 9 \quad \text{જવાબ : (C)}
 \end{aligned}$$

(39) વક્રો $x = -4y^2$ અને $x - 1 = -5y^2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{4}{3}$ (IIT : 2006)

ઉકેલ : વક્ર $x = -4y^2 \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{4}x$ એ $O(0, 0)$ શીર્ષવાળો પરવલય છે.

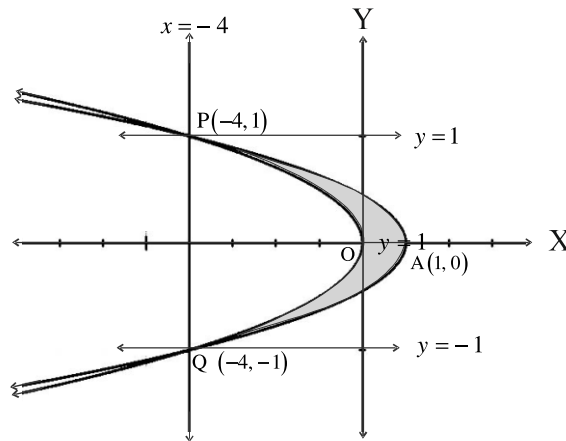
અને વક્ર $x - 1 = -5y^2 \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{5}(x-1)$ એ $A(1, 0)$ શીર્ષવાળો પરવલય છે.

$y^2 = -\frac{1}{4}x$ અને $y^2 = -\frac{1}{5}(x-1)$ ને ઉકેલતાં

$$-\frac{1}{4}x = -\frac{1}{5}(x-1)$$

$$\Rightarrow -5x = -4x + 4 \Rightarrow x = -4$$

$x = -4$ લેતાં $y = \pm 1$ મળે.



આકૃતિ 18.45

મોટે આપેલ વકો $P(-4, 1)$ અને $Q(-4, -1)$ માં છેદશે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ = $OPAQO$ નું ક્ષેત્રફળ = $2 OAPO$ નું ક્ષેત્રફળ

$$= 2 \int_0^1 (x_1 - x_2) dy$$

$$= 2 \int_0^1 \left[(1 - 5y^2) - (-4y^2) \right] dy$$

$$= 2 \int_0^1 (1 - y^2) dy$$

$$= 2 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 2 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

જવાબ : (D)

(40) વકો $y = x - bx^2$ અને $y = \frac{1}{b}x^2$ વડે આપેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $b = \dots\dots$ મોટે મહત્તમ થાય, જ્યાં $b > 0$.

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) 2

(D) એક પણ નહિ.

(IIT : 1997)

ઉકેલ : આપેલ વકો $y = x - bx^2$ અને $y = \frac{1}{b}x^2$

$$\therefore \text{ ઉકેલતાં, } \frac{1}{b}x^2 = x - bx^2 \Rightarrow (1 + b^2)x^2 - bx = 0$$

$$\Rightarrow x \left[(1 + b^2)x - b \right] = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ અથવા } x = \frac{b}{1 + b^2}$$

$$\therefore \text{ માંગેલ ક્ષેત્રફળ } = \left| \int_0^{\frac{b}{1+b^2}} (y_1 - y_2) dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{\frac{b}{1+b^2}} \left(x - bx^2 - \frac{x^2}{b} \right) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^2}{2} - \frac{bx^3}{3} - \frac{x^3}{3b} \right]_0^{\frac{b}{1+b^2}} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^2}{2} - \left(\frac{b^2+1}{b} \right) \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{b}{1+b^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{6} \left(\frac{b}{b^2+1} \right)^2 \right| = \frac{1}{6} \frac{b^2}{(b^2+1)^2}$$

$$\text{ધારો કે } f(b) = \frac{1}{6} \left(\frac{b}{b^2+1} \right)^2$$

$$\log f(b) = 2\log b - 2\log(b^2+1) - \log 6$$

$$\frac{f'(b)}{f(b)} = \frac{2}{b} - 2 \frac{2b}{b^2+1} \quad (b \text{ ને સાપેક્ષ વિકલન કરતી})$$

$$\frac{dA}{db} = - \frac{2(b-1)(b+1)}{b(b^2+1)} \cdot A$$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ A માટે $\frac{dA}{db} = 0$ લેતી,

$$\frac{dA}{db} = 0 \Rightarrow b=1 \quad (b > 0)$$

વળી, $\frac{dA}{db} > 0$ જ્યાં $0 < b < 1$ અને $\frac{dA}{db} < 0$ જ્યાં $b > 1$.

$\therefore b=1$ માટે A મહત્તમ થશે.

જવાબ : (B)

(41) વક્રો $y^2 = 9x$ અને $x^2 = 9y$ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) 9 (B) 27 (C) 54 (D) 18

ઉકેલ : બંને વક્રો $y^2 = 9x$ અને $x^2 = 9y$ ઊગમબિંદુ શીર્ષવાળા પરવલય છે.

તેથી સ્પષ્ટ છે કે એક છેદબિંદુ $O(0,0)$ છે તથા $x \neq 0$ અને $y \neq 0$,

તો બંને સમીકરણ ઉકેલતી

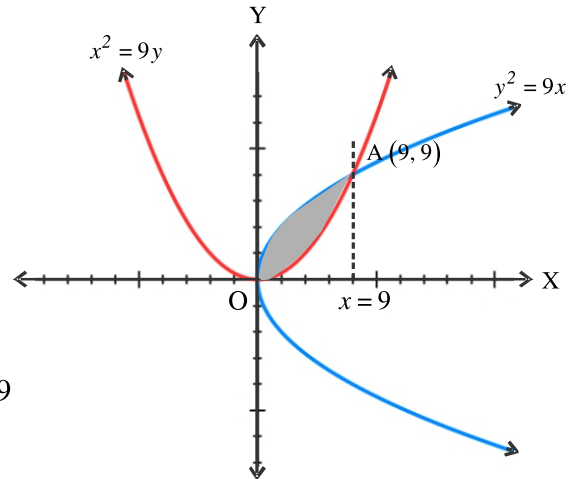
$$x^2 = 9y \Rightarrow x^4 = 81y^2$$

$$\Rightarrow x^4 = 81(9x)$$

$$\Rightarrow x^3 = 9^3$$

$$\Rightarrow x = 9 \text{ તથા } y = 9$$

તેથી બીજું છેદબિંદુ $A(9,9)$ છે.



આકૃતિ 18.46

∴ છેલ્લેથી $O(0, 0)$ તથા $A(9, 9)$ મળે.

$$\text{વક્ર } y_1 = 3\sqrt{x} \text{ તથા } y_2 = \frac{x^2}{9}$$

$$\therefore \text{ માંગેલ ક્ષેત્રફળ } = \int_0^9 (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_0^9 \left(3\sqrt{x} - \frac{x^2}{9} \right) dx$$

$$= \left[3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{27} \right]_0^9$$

$$= \left[2x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{27} \right]_0^9 = (54 - 27) = 27$$

જવાબ : (B)

(42) વક્રે $4y = 3x^2$ અને રેખા $3x - 2y + 12 = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) 27

(B) 108

(C) 54

(D) 13

ઉકેલ : અહીં પરવલય $4y = 3x^2$ અને રેખા $3x - 2y + 12 = 0$ નો છેદગણ મેળવતાં,

$$3x^2 = 4y \text{ તથા } 3x + 12 = 2y$$

$$\therefore 3x^2 = 2(3x + 12)$$

$$\therefore x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\therefore (x - 4)(x + 2) = 0$$

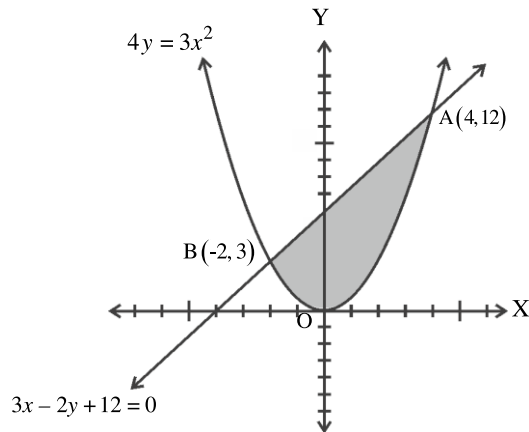
$$x = 4 \text{ અથવા } x = -2$$

$$x = 4 \text{ તો } y = 12$$

$$\text{અને } x = -2 \text{ તો } y = 3$$

આમ, છેલ્લેથી $A(4, 12)$ અને $B(-2, 3)$ મળે છે.

$$\text{હવે, } y_1 = \frac{3x^2}{4} \text{ તથા } y_2 = \frac{3x+12}{2}$$



અકૃતિ 18.47

$$\text{મનગેલ ક્ષેત્રફળ} = \int_{-2}^4 \left(\frac{3x+12}{2} - \frac{3x^2}{4} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-2}^4 (6x + 24 - 3x^2) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[3x^2 + 24x - x^3 \right]_{-2}^4$$

$$= \frac{1}{4} [(48 + 96 - 64) - (12 - 48 + 8)]$$

$$= \frac{1}{4} [80 + 28] = \frac{1}{4} (108) = 27$$

જવાબ : (A)

(43) વક્રો $y = \cos x$ અને $y = \sin x$ જ્યાં $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ. (AIEEE : 2010)

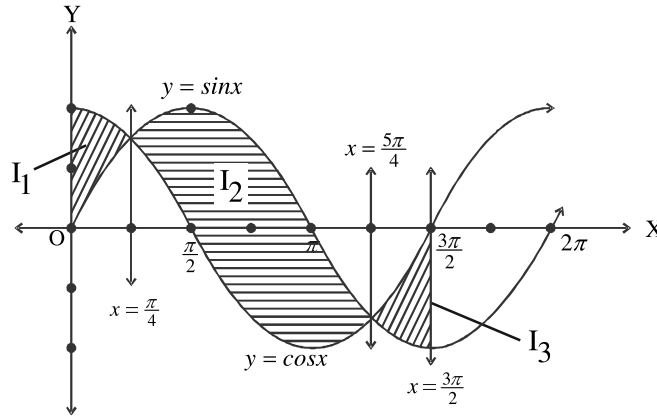
(A) $4\sqrt{2} - 2$

(B) $4\sqrt{2} + 2$

(C) $4\sqrt{2} - 1$

(D) $4\sqrt{2} + 1$

ઉકેલ :



અનુક્રમ 18.48

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (1)$$

$$= \sqrt{2} - 1.$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$$|I_3| = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= (0-1) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$$\text{મોટેલ ક્ષેત્રફળ} = |I_1| + |I_2| + |I_3|$$

$$= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1$$

$$= (4\sqrt{2} - 2)$$

જવાબ : (A)

$$\text{નોંધ : ધારો કે } I_2' = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx, I_2'' = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$\therefore I_2' - I_2'' = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = I_2$$

(44) વકો $y = x$, $x = e$, $y = \frac{1}{x}$ અને X -અક્ષની ધન દિશા દ્વારા ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $\frac{1}{2}$

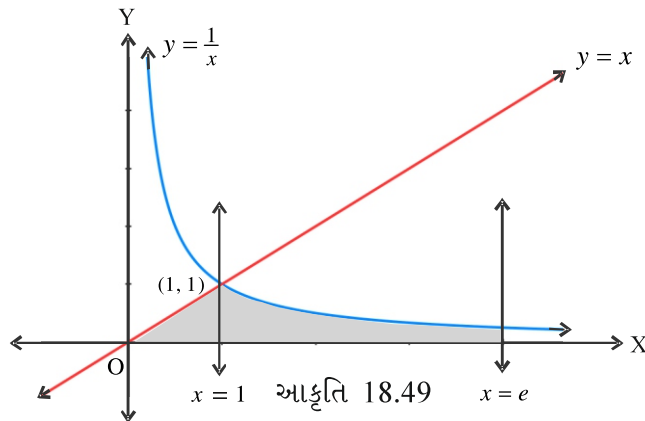
(B) 1

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{5}{2}$

(AIEEE : 2011)

ઉકેલ :



$$y = \frac{1}{x} \text{ તથા } y = x \text{ ના છેદબિંદુ માટે } \frac{1}{x} = x \text{ એટલે કે}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$\therefore$ પ્રથમ ચરણમાં છેદબિંદુ (1, 1) છે.

$$\begin{aligned}
\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ} &= \int_0^1 x \, dx + \int_1^e \left(\frac{1}{x}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [\log |x|]_1^e \\
&= \frac{1}{2} + \log_e e - \log 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

જવાબ : (C)

(45) પરવલય $x^2 = \frac{y}{4}$ અને $x^2 = 9y$ તથા રેખા $y = 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

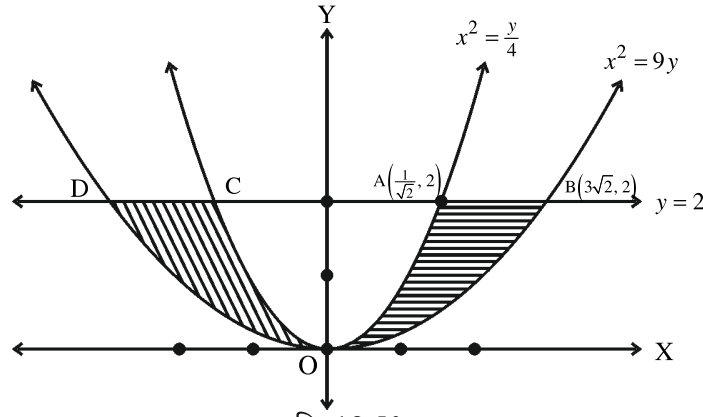
- (A) $20\sqrt{2}$ (B) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ (D) $10\sqrt{2}$ (JEE : 2012)

ઉકેલ : પરવલયના સમીકરણ $x^2 = \frac{y}{4}$ માં $y = 2$ લેતાં $x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ પરવલય $x^2 = \frac{y}{4}$ રેખા $y = 2$ ને $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$ અને $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$ માં છેદશે.

પરવલયના સમીકરણ $x^2 = 9y$ માં $y = 2$ લેતાં $x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$

$\therefore$ પરવલય $x^2 = 9y$ રેખા $y = 2$ ને $(3\sqrt{2}, 2)$ અને $(-3\sqrt{2}, 2)$ માં છેદશે.



આકૃતિ 18.50

માંગેલ ક્ષેત્રફળ = (AOBA નું ક્ષેત્રફળ) + (CODC નું ક્ષેત્રફળ)

$$= 2(\text{AOBA નું ક્ષેત્રફળ})$$

$$= 2 \int_0^2 (x_1 - x_2) \, dy$$

$$= 2 \int_0^2 \left(3\sqrt{y} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right) dy$$

$$= 2 \int_0^2 \frac{5}{2} \sqrt{y} \, dy$$

$$= 5 \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_0^2 = \frac{10}{3} \left[2^{3/2} \right] = \frac{10 \times 2 \times \sqrt{2}}{3} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

જવાબ : (C)

(46) વક્ર $y = \sqrt{x}$, $2y - x + 3 = 0$ અને X -અક્ષ દ્વારા પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

- (A) 36 (B) 18 (C) $\frac{27}{4}$ (D) 9 (JEE : 2013)

ઉકેલ : આપેલ વક્ર $y = \sqrt{x}$ એ $y^2 = x$ નો ઉપગણ છે અને રેખા $x = 2y + 3$ છે.

સમીકરણો ઉકેલતાં $y^2 = 2y + 3$

$$\therefore y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\therefore (y-3)(y+1) = 0$$

$$\therefore y = 3 \text{ અથવા } y = -1$$

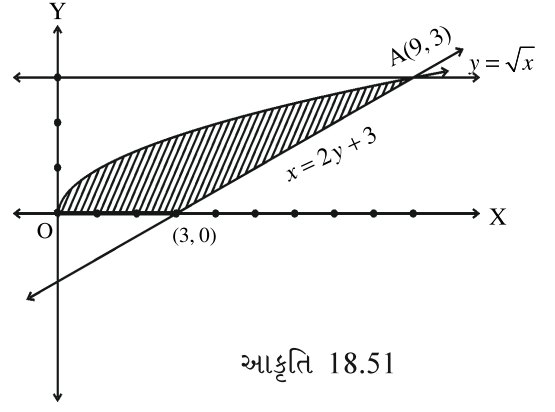
$$y = 3 \text{ ને } x = 9 \text{ અને } y = -1 \text{ ને } x = 1$$

$$\therefore \text{વક્ર } y^2 = x \text{ અને રેખા } A(9, 3) \text{ અને}$$

$$B(1, -1) \text{ માં છેદશે.}$$

$$\therefore \text{ માંગેલ ક્ષેત્રફળ } = \int_0^3 (x_2 - x_1) dy$$

$$= \int_0^3 (2y + 3 - y^2) dy = \left[y^2 + 3y - \frac{y^3}{3} \right]_0^3 = 9 + 9 - 9 = 9 \quad \text{જવાબ : (D)}$$



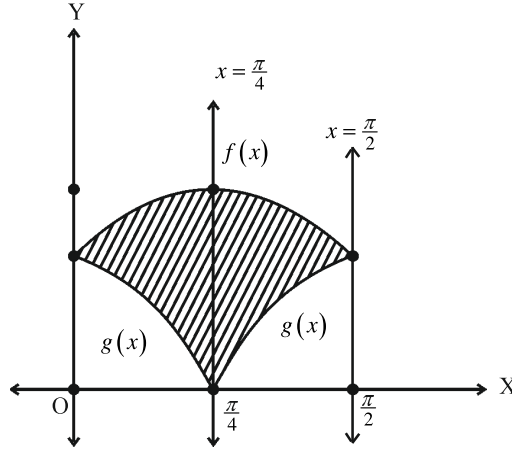
(47) વક્રો $y = \sin x + \cos x$ અને $y = |\cos x - \sin x|$ દ્વારા $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે.

(A) $4(\sqrt{2}-1)$ (B) $2(\sqrt{2}+1)$ (C) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$ (D) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

(JEE : 2014 Adv)

ઉકેલ : અહીં વક્ર $f(x) = y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ અને

$$g(x) = y = |\cos x - \sin x| = \begin{cases} \cos x - \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x - \cos x, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ } A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)\} dx \\ &+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \{(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)\} dx \end{aligned}$$

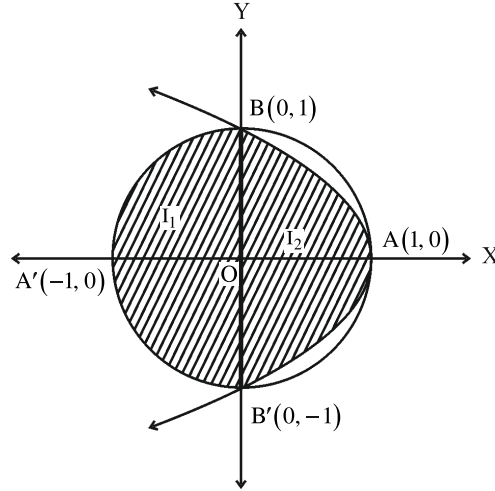
$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \, dx \\
&= -2[\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + 2[\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right] + 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\
&= -\sqrt{2} + 2 + 2 - \sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

જવાબ : (C)

(48) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ અને } y^2 \leq 1 - x\}$ થી રચાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (JEE : 2014 Main)

- (A) $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$

ઉકેલ : અહીં વક્ર $x^2 + y^2 = 1$ એ $O(0, 0)$ કેન્દ્ર અને 1 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ છે જ્યારે $y^2 = 1 - x$ એ $(1, 0)$ શીર્ષવાળો પરવલય છે.



આકૃતિ 18.53

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = I_1 + I_2$

$$= \frac{1}{2}\pi r^2 + 2 \text{ (OABO નું ક્ષેત્રફળ)}$$

$$= \frac{1}{2}\pi(1)^2 + 2 \int_0^1 x \, dy$$

$$= \frac{1}{2}\pi(1)^2 + 2 \int_0^1 (1 - y^2) \, dy$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \quad \text{જવાબ : (A)}$$

- (49) જો વર્તુળ $x^2 + y^2 = 2$ અને પરવલય $y^2 = 8x$ ના સામાન્ય સ્પર્શક વર્તુળને P, Q અને પરવલયને R, S બિંદુએ સ્પર્શે તો તેથી બનતા ચતુષ્કોણ $PQRS$ નું ક્ષેત્રફળ થાય.
- (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 15

(JEE : 2014 Adv)

ઉકેલ : ધારો કે પરવલયનો સ્પર્શક $y = mx + \frac{2}{m}$ એ વર્તુળ $x^2 + y^2 = 2$ ને સ્પર્શે તો સ્પર્શકનું કેન્દ્રથી લંબઅંતર ત્રિજ્યા જેટલું થાય.

$$\therefore \left| \frac{\frac{2}{m}}{\sqrt{1+m^2}} \right| = \sqrt{2}$$

$$\therefore m^4 + m^2 = 2$$

$$\therefore m^4 + m^2 - 2 = 0$$

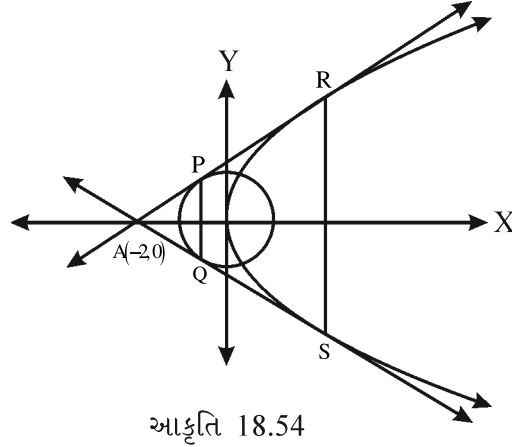
$$\therefore (m^2 - 1)(m^2 + 2) = 0$$

$$\therefore m = \pm 1 \text{ અથવા } m^2 = -2 \text{ જે શક્ય નથી.}$$

$$\therefore m = \pm 1$$

તેથી, સ્પર્શકનાં સમીકરણ $y = x + 2$ અને $y = -x - 2$ થશે.

સ્પર્શકો $A(-2, 0)$ માં છેદશે.



$$y = \pm(x + 2) \text{ તથા } x^2 + y^2 = 2 \text{ પરથી,}$$

$$x^2 + (x + 2)^2 = 2. \text{ તેથી, } 2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$x = -1 \text{ તથા } y = \pm 1$$

$$\therefore P(-1, 1) \text{ તથા } Q(-1, -1)$$

$$\therefore y = \pm(x + 2) \text{ તથા } y^2 = 8x, \text{ પરથી,}$$

$$(x + 2)^2 = 8x$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{તથા} \quad y = \pm 4$$

$\therefore P, Q, R, S$ ની યામ

$$P(-1, 1), Q(-1, -1), R(2, 4), S(2, -4)$$

$$\begin{aligned} PQRS \text{ નું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{1}{2} ((\text{સમાંતર બાજુઓની લંબાઈનો સરવાળો}) \\ &\quad \times (\text{તેમની વચ્ચેનું લંબઅંતર})) \\ &= \frac{(2+8)(3)}{2} = \frac{30}{2} = 15 \end{aligned}$$

જવાબ : (D)

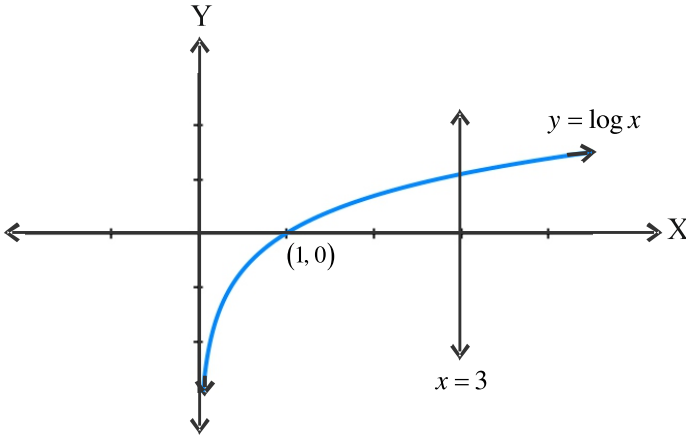
એક કરતાં વધુ સાચા વિકલ્પો

(50) વક્ર $y = \log x$, $y = 0$ અને $x = 3$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

- (A) $(\log 9 - 2)$ (B) $(\log 27 - 2)$ (C) $\log \frac{27}{e^2}$ (D) ત્રણ કરતાં નાનું

ઉકેલ :

$$\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ } A = \int_1^3 y \, dx$$



આકૃતિ 18.55

$$= \int_1^3 \log x \, dx$$

$$= [x \log x - x]_1^3$$

$$= 3 \log 3 - 2$$

$$A = \log 27 - 2 \quad (B)$$

$$= \log 27 - \log_e e^2$$

$$= \log \left(\frac{27}{e^2} \right) \quad (C)$$

$$= \log \left(\frac{27}{e^2} \right) < 3 \quad (D)$$

જવાબ : (B), (C), (D)

નિષ્કર્ષ અને કારક (Assertion and Reason) પ્રકારના પ્રશ્નો

સમજૂતી : આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાન હોય છે. વિધાન 1 (નિષ્કર્ષ) અને વિધાન 2 (કારક). આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો હોય છે. વિકલ્પ (A), (B), (C) અને (D) જે નીચે મુજબ હોય છે.

- (A) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.
 (B) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.
 (C) વિધાન 1 સત્ય છે અને વિધાન 2 અસત્ય છે.
 (D) વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

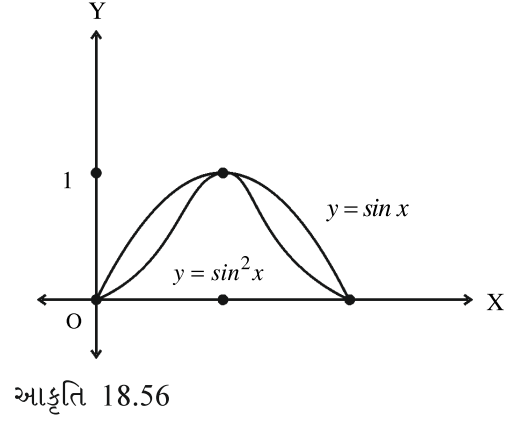
(51) વિધાન 1 વક $y = \sin^2 x$ નું $[0, \pi]$ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ એ વક $y = \sin x$ ની $[0, \pi]$ વચ્ચેના ક્ષેત્રફળ કરતાં વધુ છે.

વિધાન 2 જો $0 < t < 1$ તો $t^2 < t$.

ઉકેલ : જો $0 < t < 1$ તો $t^2 < t$

$$\therefore \sin^2 x < \sin x$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx < \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$



વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

જવાબ : (D)

(52) વિધાન 1 જો $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, તો $|f(x)|$ રેખાઓ $x = 2.2$, $x = 2.8$ અને X -અક્ષ દ્વારા

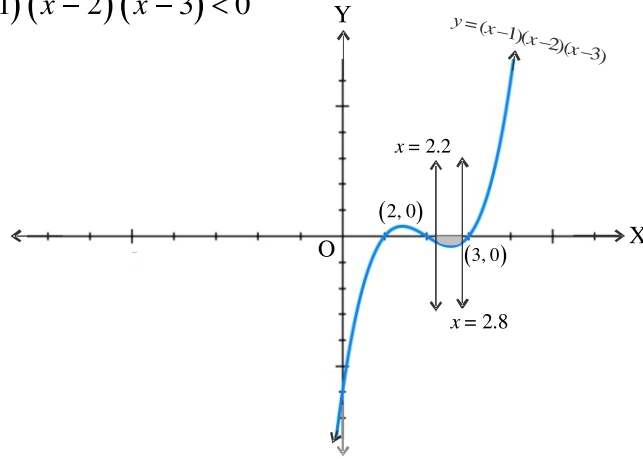
આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $\int_{2.2}^{2.8} (x-1)(x-2)(x-3) \, dx$ થશે.

વિધાન 2 $(x-1)(x-2)(x-3) \leq 0$, જ્યાં $x \in [2.2, 2.8]$

ઉકેલ : આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે જો $x \in [2.2, 2.8]$ તો $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$.

જો $2.2 < x < 2.8$ તો $(x-1) > 0, (x-2) > 0, (x-3) < 0$

$$\therefore (x-1)(x-2)(x-3) < 0$$



$$\therefore \text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ} = \left| \int_{2.2}^{2.8} f(x) \, dx \right|$$

$$= - \int_{2.2}^{2.8} (x-1)(x-2)(x-3) \, dx$$

આમ વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

જવાબ : (D)

(53) વિધાન 1 વક્ર $2x^2 + 3y^2 = 6$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ એ $2|x| + 3|y| \leq 6$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશના ક્ષેત્રફળ કરતાં ઓછું છે.

વિધાન 2 ઉપવલય $2x^2 + 3y^2 = 6$ ના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ એ $2|x| + 3|y| \leq 6$ ના X -અક્ષ પર આવેલાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનાં અંતર કરતાં વધુ છે.

ઉકેલ : વક્ર $2x^2 + 3y^2 = 6$. આથી $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ઉપવલય દર્શાવે છે.

$$a = \sqrt{3} \text{ અને } b = \sqrt{2}.$$

$$2|x| + 3|y| \leq 6 \text{ એ } 2x + 3y \leq 6, -2x + 3y \leq 6,$$

$$2x - 3y \leq 6 \text{ અને } -2x - 3y \leq 6 \text{ ચાર રેખાના ઉપગણો દર્શાવે છે.}$$

$$2x + 3y = 6 \text{ અને } 2x^2 + 3y^2 = 6 \text{ ઉકેલતાં,}$$

$$2x^2 + 3 \frac{(6-2x)^2}{9} = 6$$

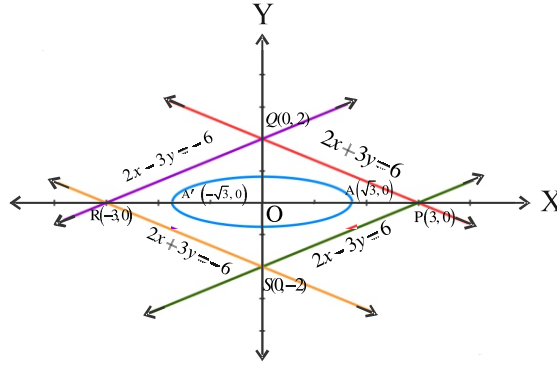
$$6x^2 + 36 - 24x + 4x^2 = 18$$

$$\therefore 10x^2 - 24x + 18 = 0$$

$$\therefore 5x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\therefore \Delta = 144 - 180 = 0$$

$\therefore$ આ જ રીતે અન્ય રેખાઓ પણ ઉપવલયને છેદતી નથી.



આકૃતિ 18.58

$$\text{ઉપવલયનું ક્ષેત્રફળ} = \pi ab = \sqrt{6} \pi$$

$$\text{તથા } 2|x| + 3|y| \leq 6 \text{ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ} = 4 \left(\frac{1}{2} \times b \times h \right)$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 12$$

$$\sqrt{6} \pi < 12 \Leftrightarrow 6\pi^2 < 144 \Leftrightarrow \pi^2 < 24 \text{ હોવાથી વિધાન 1 સત્ય છે.}$$

ઉપવલયના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ = $AA' = 2\sqrt{3}$

$2|x| + 3|y| \leq 6$ ના અક્ષ પર આવેલાં બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર = 6

$2\sqrt{3} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 3$ હોવાથી વિધાન 2 અસત્ય છે.

જવાબ : (C)

(54) વિધાન 1 $|x| + |y| \leq 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 8 છે.

વિધાન 2 $|x| + |y| = 2$ એ $\sqrt{8}$ લંબાઈની બાજુવાળો ચોરસ દર્શાવે છે.

ઉકેલ : $|x| + |y| \leq 2$ એટલે $x + y \leq 2, -x + y \leq 2, x - y \leq 2$ અને $-x - y \leq 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશ.

$x + y = 2, x + y = -2$ પરસ્પર સમાંતર છે. $x - y = \pm 2$ પરસ્પર સમાંતર છે.

$x + y = 2, x - y = 2$ ના ઢાળનો ગુણોત્તર -1 છે. વિકર્ણ $AC = BD = 4$

$\therefore ABCD$ ચોરસ છે.

ΔOAB કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore OA^2 + OB^2 = AB^2$

$\therefore AB^2 = 4 + 4$

$\therefore AB = \sqrt{8}$

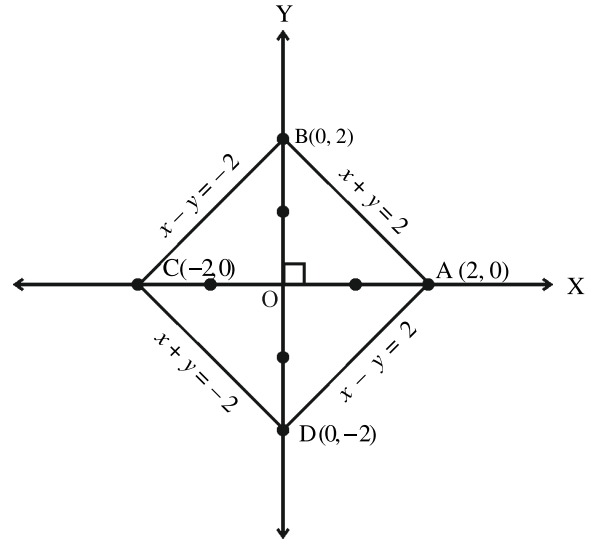
$ABCD$ એ $\sqrt{8}$ બાજુવાળો ચોરસ છે.

તેનું ક્ષેત્રફળ = $l \times b = \sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$

વિધાન 1 સત્ય છે

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે અને તે વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી આપે છે.

જવાબ : (A)



આકૃતિ 18.59

બીજી રીત : ક્ષેત્રફળ = $4 \int_0^2 (2-x) dx = 4 \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 4(4-2) = 8$

