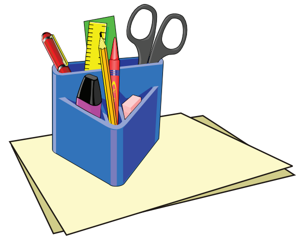
क्रियाकलाप 75



उद्देश्य

विभिन्न प्रकार के प्रिज़्म और पिरामिड बनाना तथा ऑयलर के सूत्र का सत्यापन करना।

आवश्यक सामग्री

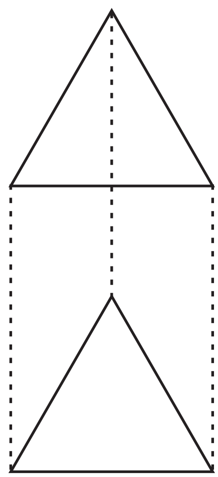
मोटी ड्रॉइंग शीट, पेंसिल, रंग, गोंद, कैंची, सफ़ेद शीट और सेलोटेप।

© NCERT not to be republished

रचना की विधि

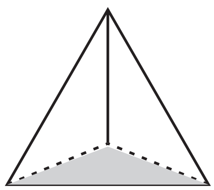
प्रिज़्म

1. एक मोटी शीट पर भुजा a (मान लीजिए 5 cm) का एक समबाहु त्रिभुज खींचिए।
2. इसे काटकर निकाल लीजिए तथा मोटी शीट पर ही इसकी प्रतिलिपि बना लीजिए।
3. मोटी शीट का ही प्रयोग करते हुए, ऐसे तीन सर्वांगसम आयत बनाइए, जिनकी चौड़ाई समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई के बराबर हों तथा लंबाई b (मान लीजिए 8 cm) हो।
4. इन त्रिभुजों और आयतों को सेलोटेप की सहायता से व्यवस्थित और जोड़कर आकृति 1 में दर्शाए अनुसार एक ठोस प्राप्त कीजिए।



आकृति 1

5. मोटी शीट का प्रयोग करते हुए, भुजा a वाले समबाहु त्रिभुज के चार कट आउट बनाइए।
6. इन त्रिभुजों को व्यवस्थित करके आकृति 2 में दर्शाए अनुसार एक ठोस प्राप्त कीजिए।



आकृति 2

प्रदर्शन

1. आकृति 1 में प्राप्त ठोस त्रिभुज के आधार का एक प्रिज़्म है। यह त्रिभुजाकार प्रिज़्म है।
2. आकृति 2 में प्राप्त ठोस त्रिभुज के आधार का एक पिरामिड है। यह त्रिभुजाकार पिरामिड है।
3. इसी प्रकार, आप एक वर्गाकार, पंचभुजाकार या समषड्भुजाकार प्रिज़्म क्रमशः आधार और ऊपरी सिरा समपंचभुज या समषड्भुज लेकर बना सकते हैं।
4. इसी प्रकार, आप वर्ग, पंचभुज और षड्भुज आधार वाले पिरामिड बना सकते हैं।
5. प्रिज़्म (आकृति 1) में,

   फलकों की संख्या (F) = 5, शीर्षों की संख्या (V) = 6, किनारों की संख्या (E) = 9

   इस प्रकार, $F + V - E = 5 + 6 + - 9 = 2$ है।
6. पिरामिड (आकृति 2) में,

   फलकों की संख्या (F) = 4, शीर्षों की संख्या (V) = 4, किनारों की संख्या (E) = 6

   इस प्रकार, $F + V - E = 4 + 4 + - 6 = 2$ है।

   अतः, प्रिज़्म और पिरामिड दोनों के लिए, ऑयलर का सूत्र सत्यापित हुआ।

प्रेक्षण

प्रिज़्म

आधार	फलकों की संख्या (F)	किनारों की संख्या (E)	शीर्षों संख्या (V)	F + V – E =
त्रिभुज	5	___	___	2
वर्ग	___	___	___	___
समपंचभुज	___	___	___	___
समषड्भुज	___	___	___	___

© NCERT not to be republished

पिरॅमिड

आधार	फलकों की संख्या (F)	किनारों की संख्या (E)	शीर्षों की संख्या (V)	F + V – E =
त्रिभुज	4	___	___	2
वर्ग	___	___	___	___
समपंचभुज	___	___	___	___
समषड्भुज	___	___	___	___

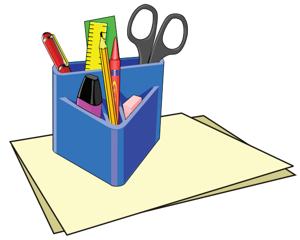
अत:, प्रत्येक स्थिति में F + V – E = ______है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप प्रिज़्म और पिरामिडों की रचनाओं को स्पष्ट करने तथा उनके फलक, किनारे और शीर्षों की पहचान करने में उपयोग किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 76



उद्देश्य

बीजीय सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ को सत्यापित करना।

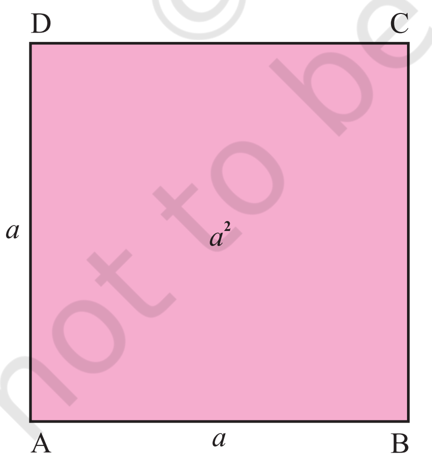
आवश्यक सामग्री

ड्रॉइंग शीट, कार्डबोर्ड, गोंद, रंगीन कागज़, कटर और रूलर।

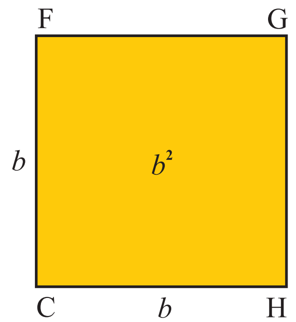
रचना की विधि

1. एक ड्रॉइंग शीट/कार्डबोर्ड में से एक वर्ग a इकाई लंबाई का काट लीजिए तथा इसे वर्ग ABCD से नामांकित कीजिए (देखिए आकृति 1)।

2. ड्रॉइंग शीट/कार्डबोर्ड में से एक अन्य वर्ग लंबाई b इकाई को काट लीजिए तथा इसे वर्ग CHGF से नामांकित कीजिए (देखिए आकृति 2)।



आकृति 1

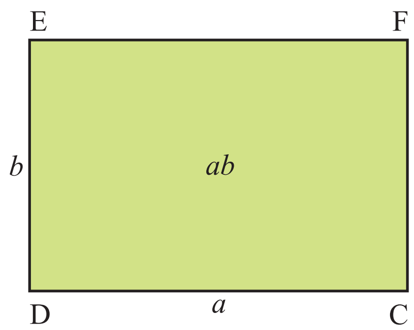


आकृति 2

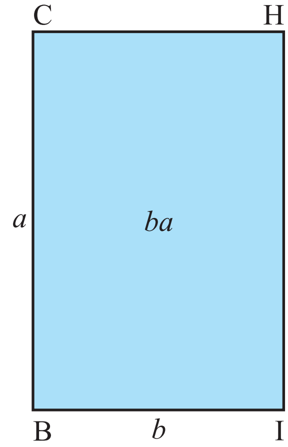
3. ड्रॉइंग शीट/कार्डबोर्ड में से लंबाई a इकाई और चौड़ाई b इकाई का एक आयत काट लीजिए तथा इसे आयत DCFE से नामांकित कीजिए (देखिए आकृति 3)।

© NCERT not to be republished

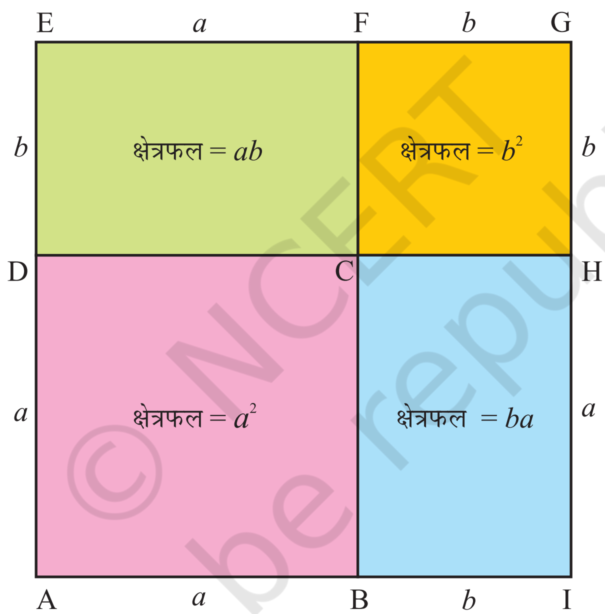
4. ड्रॉइंग शीट/कार्डबोर्ड में से लंबाई b इकाई और चौड़ाई a इकाई का एक अन्य आयत बनाइए तथा इसे आयत BIHC से नामांकित कीजिए (देखिए आकृति 4)।



आकृति 3



आकृति 4



आकृति 5

© NCERT not to be republished

प्रदर्शन

1. आकृति 5 में दर्शाए अनुसार चारों चतुर्भुजों को व्यवस्थित कीजिए।
2. इन चारों कट आउट आकृतियों का कुल क्षेत्रफल = वर्ग ABCD का क्षेत्रफल + वर्ग CHGF का क्षेत्रफल + आयत DCFE का क्षेत्रफल + आयत BIHC का क्षेत्रफल

$= a^2 + b^2 + ab + ba = a^2 + b^2 + 2ab$

3. स्पष्ट है कि AIGE भुजा $(a + b)$ का एक वर्ग है। अत:, इसका क्षेत्रफल $(a + b)^2$ है।

अत:, बीजीय सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

यहाँ क्षेत्रफल वर्ग इकाइयों में हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

a = ...cm, b = ...cm

अत:, $(a + b)$ = ...cm,

a^2 = ... b^2= ...., ab = ...

$(a + b)^2$ = ..., $2ab$ = ...

अत:, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

a और b के विभिन्न मानों को लेकर, सर्वसमिका का सत्यापन किया जा सकता है।

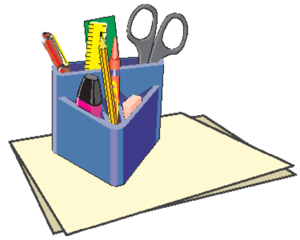
अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का निम्नलिखित में प्रयोग किया जा सकता है–

1. किसी संख्या का वर्ग ज्ञात करना, जो दो सुविधाजनक संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त हो।
2. कुछ बीजीय व्यंजकों के सरलीकरण और गुणनखंडन।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 77



उद्देश्य

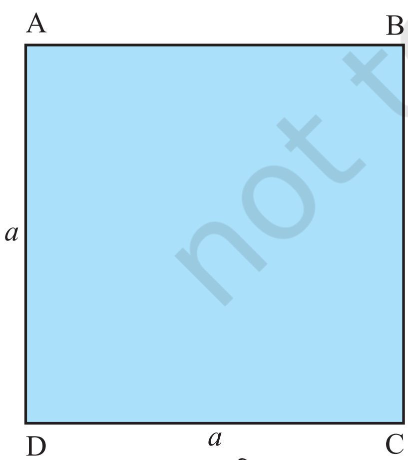
बीजीय सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

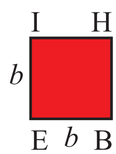
ड्रॉइंग शीट, कार्डबोर्ड, रंगीन कागज़, कटर, रूलर और गोंद।

रचना की विधि

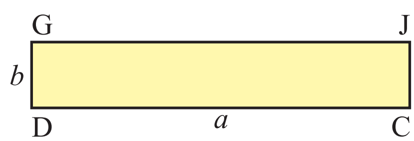
1. एक ड्रॉइंग शीट/कार्डबोर्ड में से भुजा a इकाई का एक वर्ग ABCD काट लीजिए (आकृति 1)।
2. ड्रॉइंग शीट/कार्डबोर्ड में से भुजा b इकाई $(b < a)$ का एक वर्ग EBHI काट लीजिए (आकृति 2)।
3. ड्रॉइंग शीट/कार्डबोर्ड में से लंबाई a इकाई और चौड़ाई b इकाई का एक आयत GDCJ काट लीजिए (आकृति 3)।
4. ड्रॉइंग शीट/कार्डबोर्ड में से लंबाई a इकाई और चौड़ाई b इकाई का एक आयत IFJH काट लीजिए (आकृति 4)।



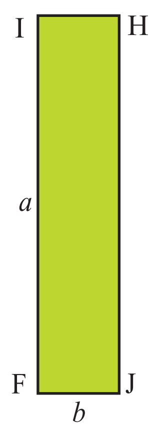
आकृति 1



आकृति 2



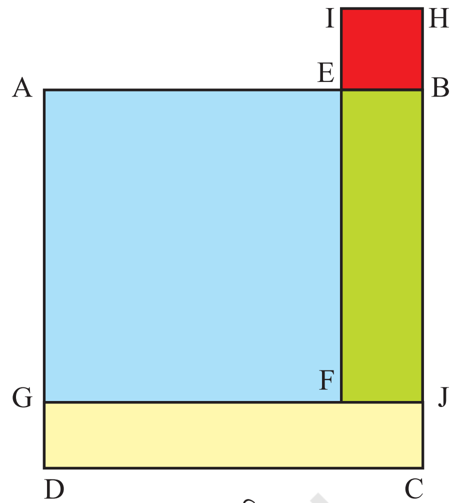
आकृति 3



आकृति 4

© NCERT not to be republished

प्रदर्शन



आकृति 5

1. उपरोक्त कट आउटों को आकृति 5 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।
2. आकृति 1, 2, 3 और 4 के अनुसार, वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = a^2, वर्ग EBHI का क्षेत्रफल = b^2, आयत GDCJ का क्षेत्रफल = ab, और आयत IFJH का क्षेत्रफल = ab है।
3. आकृति 5 से, वर्ग AGFE का क्षेत्रफल = AG × GF = $(a - b)(a - b) = (a - b)^2$
4. अब, वर्ग AGFE का क्षेत्रफल = वर्ग ABCD का क्षेत्रफल + वर्ग EBHI का क्षेत्रफल – आयत IFJH का क्षेत्रफल – आयत GDCJ का क्षेत्रफल

   = $a^2 + b^2 - ab - ab = a^2 - 2ab + b^2$

   अत:, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

a = ..., b = ...,

अत:, $(a - b)$ = ...,

a^2 = ..., b^2 = ..., $(a - b)^2$ = ...,

ab = ..., $2ab$ = ...

अत:, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

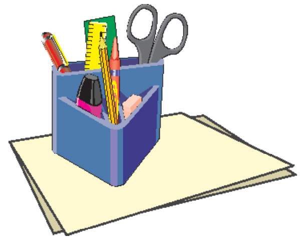
अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का उपयोग निम्न में किया जा सकता है–

1. उस संख्या का वर्ग परिकलित करने में जिसे दो सुविधाजनक संख्याओं के अंतर के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो।
2. कुछ बीजीय व्यंजकों के सरलीकरण और गुणनखंडन में।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 78



उद्देश्य

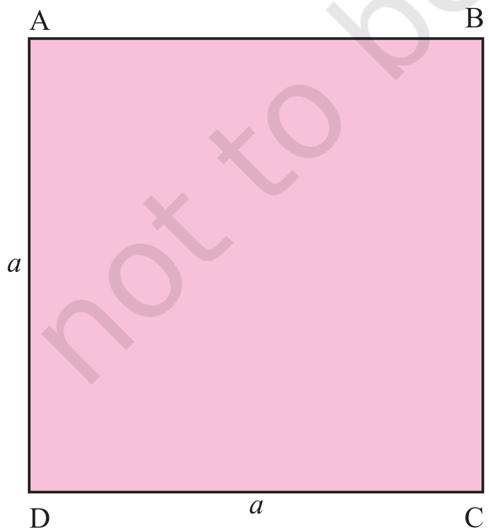
बीजीय सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$ को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

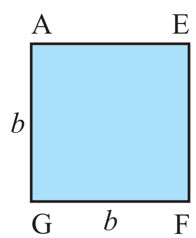
ड्रॉइंग शीट, कार्डबोर्ड, रंगीन कागज़, कैंची, स्केच पेन, रूलर और पारदर्शक शीट।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर एक रंगीन कागज़ चिपकाइए।
2. एक ड्रॉइंग शीट में से भुजा a इकाई का एक वर्ग ABCD काट लीजिए (आकृति 1)।
3. एक अन्य ड्रॉइंग शीट में से भुजा b इकाई $(b < a)$ का एक वर्ग AEFG काट लीजिए (आकृति 2)।



आकृति 1

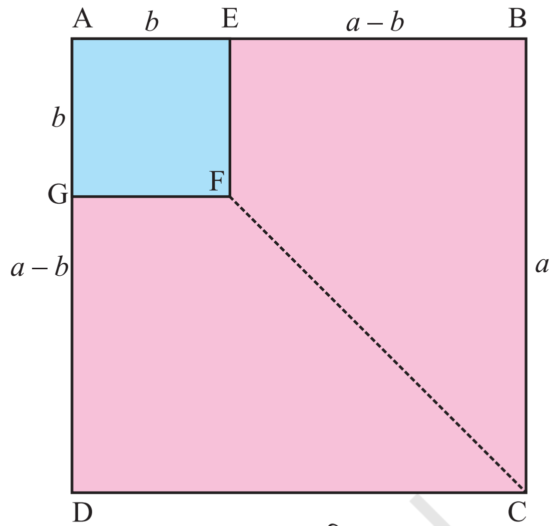


आकृति 2

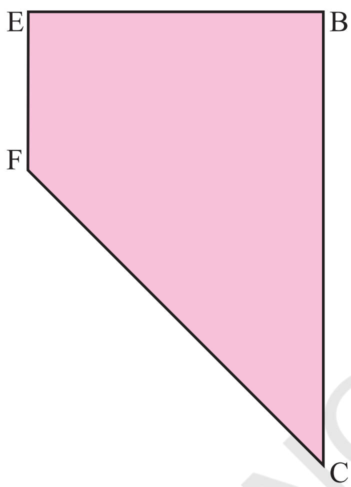
© NCERT not to be republished

4. इन वर्गों को आकृति 3 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

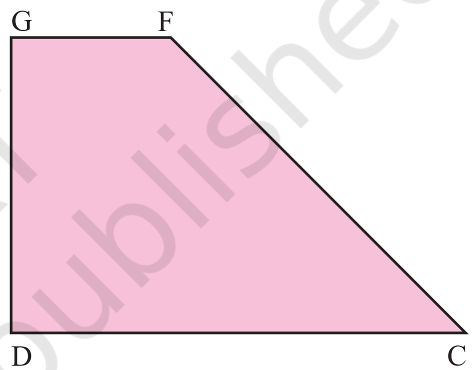
5. स्केच पेन द्वारा F और C को मिलाइए। एक पारदर्शक शीट का प्रयोग करते हुए, EBCF और GFCD के सर्वांगसम दो समलंब काटिए तथा उन्हें क्रमशः EBCF और GFCD नाम दीजिए (आकृति 4 और आकृति 5)।



आकृति 3



आकृति 4



आकृति 5

© NCERT not to be republished

प्रदर्शन

1. आकृति 4 और आकृति 5 के समलंबों को आकृति 6 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए

2. वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = a^2

   वर्ग AEFG का क्षेत्रफल = b^2

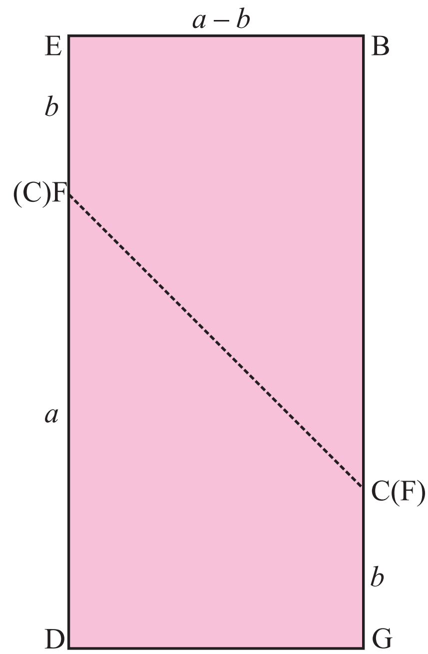
3. आकृति 3 में,

   वर्ग ABCD का क्षेत्रफल – वर्ग AEFG का क्षेत्रफल

   = समलंब EBCF का क्षेत्रफल + समलंब GFCD का क्षेत्रफल

   = आयत EBGD (आकृति 6) का क्षेत्रफल

   = ED × DG



आकृति 6

इस प्रकार, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

यहाँ क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

a = ..., b = ...,

अतः, $(a + b)$ = ...,

a^2 = ..., b^2 = ..., $(a - b)$ = ...,

$a^2 - b^2$ = ..., $(a + b)(a - b)$ = ...,

अतः, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

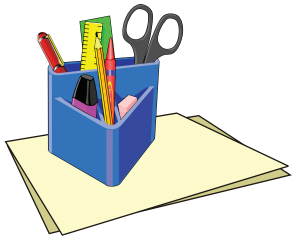
अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का उपयोग निम्न के मान ज्ञात करने में किया जा सकता है—

1. दो वर्गों का अंतर।
2. दो संख्याओं से संबद्ध कुछ गुणनफल।
3. इस सर्वसमिका का उपयोग बीजीय व्यंजकों को सरल करने तथा उनका गुणनखंडन करने में किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 79



उद्देश्य

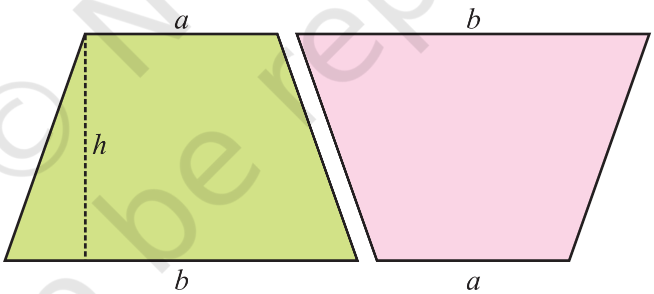
समलंब के क्षेत्रफल के लिए सूत्र प्राप्त करना।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, रंगीन चमकीले कागज़, गोंद और कैंची।

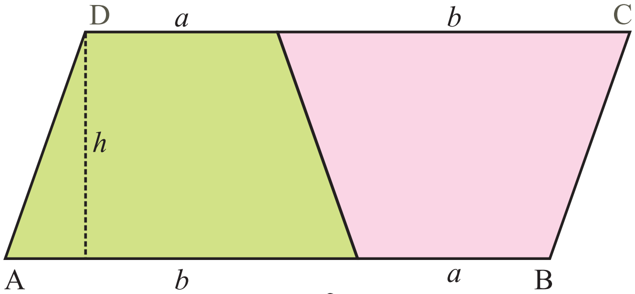
रचना की विधि

1. एक कार्ड का टुकड़ा लीजिए, जो इस क्रियाकलाप का आधार होगा।
2. एक रंगीन कागज़ पर दो समान समलंब बनाइए जिनकी समांतर भुजाएँ 'a' और 'b' इकाई हैं तथा इन्हें काट लीजिए (आकृति 1)।



आकृति 1

3. आकृति 2 में दर्शाए अनुसार इन्हें कार्डबोर्ड पर रखिए।



आकृति 2

© NCERT not to be republished

प्रदर्शन

1. दो समलंबों द्वारा बनी आकृति समांतर चतुर्भुज ABCD है (आकृति 2)।

2. समांतर चतुर्भुज की भुजा AB $= (a + b)$ इकाई तथा उसकी संगत ऊँचाई $= h$ इकाई

3. समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल) $= \frac{1}{2}(a+b) \times h$

   अतः, समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(a+b) \times h$

   $= \frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) × दोनों समांतर भुजाओं के बीच की दूरी

यहाँ क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है।

प्रेक्षण

प्रत्यक्ष मापन द्वारा–

$a =$ _________, $b =$ ____________

समांतर भुजाओं के बीच की दूरी $= h =$ _________

इसीलिए आकृति 2 में, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = _________

अतः, समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (_________ भुजाओं का योग) × ______________

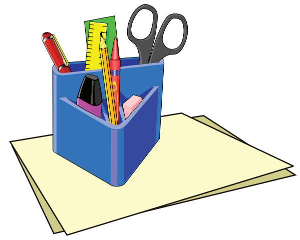
अनुप्रयोग

1. इस क्रियाकलाप का उपयोग ऐसे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालने में उपयोगी है जिसे अलग-अलग समलंबों और समकोण त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है।

2. इस अवधारणा का उपयोग निर्देशांक ज्यामिति में त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है, जो आप उच्च कक्षाओं में पढ़ेंगे।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 80



उद्देश्य

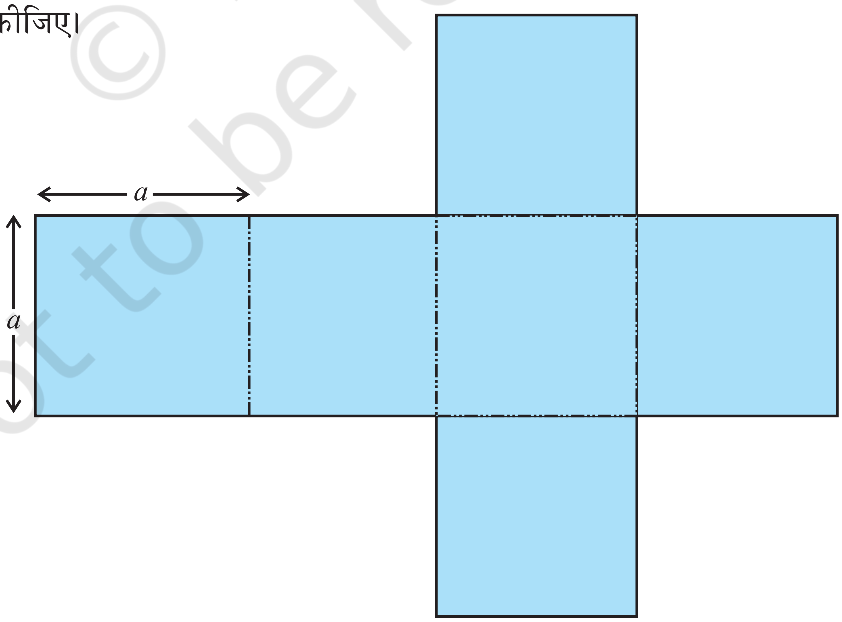
एक घन बनाना तथा उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए सूत्र प्राप्त करना।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, रूलर, कटर, सेलोटेप, स्केच पेन, पेंसिल, सफ़ेद कागज़, चार्ट पेपर और गोंद।

रचना की विधि

1. एक सुविधाजनक माप का कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. एक मोटे चार्ट पेपर का प्रयोग करते हुए, आकृति 1 में दर्शाए अनुसार, 6 सर्वसम वर्गों से संबद्ध एक आकार बनाइए, जिनके प्रत्येक वर्ग की भुजा a इकाई हो।
3. इन वर्गों को बिंदुकित रेखाओं के अनुदिश मोड़कर आकृति 2 में दर्शाए अनुसार एक ठोस प्राप्त कीजिए।

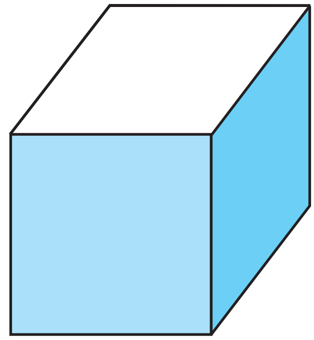


आकृति 1

© NCERT not to be republished

प्रदर्शन

1. आकृति 2 में प्राप्त ठोस एक घन है। इस घन को कार्डबोर्ड पर रखिए।
2. इस प्रकार प्राप्त घन का प्रत्येक फलक भुजा a का एक वर्ग है। अतः, घन के एक वर्ग का क्षेत्रफल a^2 है।
3. इस प्रकार, भुजा a वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$ है।



आकृति 2

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा—

भुजा a की लंबाई = ...

अतः, एक फलक का क्षेत्रफल = a^2 = ...

सभी वर्गों के क्षेत्रफल का योग = ... + ... + ... + ... + ...
+ ....

अतः, घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

अनुप्रयोग

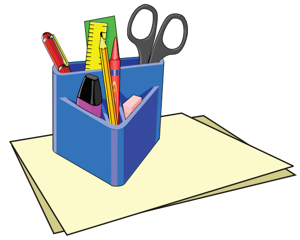
इस परिणाम का उपयोग पैकिंग के लिए आवश्यक घनाकार बॉक्स बनाने में प्रयुक्त वाँछित सामग्री का आकलन करने में किया जा सकता है।

टिप्पणी

1. आकृति 1 में बना आकार घन का एक जाल कहलाता है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 81



उद्देश्य

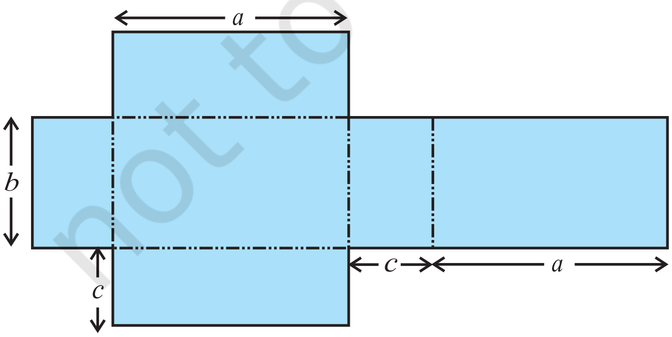
एक घनाभ बनाना तथा उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए सूत्र प्राप्त करना।

आवश्यक सामग्री

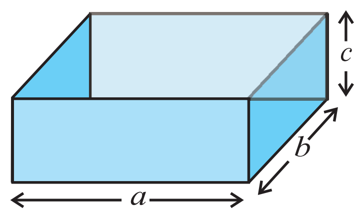
कार्डबोर्ड, रूलर, सेलोटेप, कटर, रूलर, स्केच पेन/पेंसिल, सफ़ेद कागज़, चार्ट पेपर और गोंद।

रचना की विधि

1. एक सुविधाजनक माप का कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. एक मोटे चार्ट पेपर का प्रयोग करते हुए, आकृति 1 में दर्शाए अनुसार एक आकार बनाइए, जिसमें विमाओं a इकाई × b इकाई वाले दो सर्वसमआयत, a इकाई वाले दो सर्वसमआयत संबद्ध हों।
3. इन 6 आयतों को बिंदुकित रेखाओं के अनुदिश मोड़कर आकृति 2 में दर्शाए अनुसार एक ठोस प्राप्त कीजिए।



आकृति 1



आकृति 2

© NCERT not to be republished

प्रदर्शन

1. आकृति 2 में प्राप्त ठोस एक घनाभ है। इसे एक कार्डबोर्ड पर रखिए।

2. विमाओं a इकाई × b इकाई वाले एक आयत का क्षेत्रफल = ab वर्ग इकाई

3. विमाओं b इकाई × c इकाई वाले एक आयत का क्षेत्रफल = bc वर्ग इकाई

4. विमाओं c इकाई × a इकाई वाले एक आयत का क्षेत्रफल = ac वर्ग इकाई

5. इस प्रकार बने पृष्ठीय क्षेत्रफल

   $= (2 \times ab + 2 \times bc + 2 \times ca) = 2\,(ab + bc + ca)$

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

a = ______________, b = ______________, c = ______________,

अतः, ab = ______________, bc = ______________, ca = ______________,

$2ab$ = ______________, $2bc$ = ______________, $2ca$ = ______________

सभी 6 आयतों का क्षेत्रफल = ________

अतः, घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(ab + bc + ca)$

अनुप्रयोग

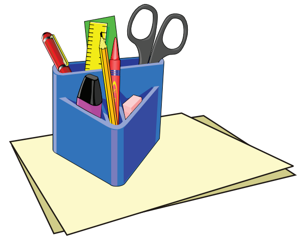
इस परिणाम का उपयोग घनाभाकार बॉक्सों/अलमारियों, इत्यादि बनाने में प्रयुक्त सामग्री का आकलन करने में किया जा सकता है।

टिप्पणी

1. आकृति 1 में दर्शाया गया आकार घनाभ का एक जाल कहलाता है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 82



उद्देश्य

घनाभ के आयतन के लिए एक सूत्र प्राप्त करना।

आवश्यक सामग्री

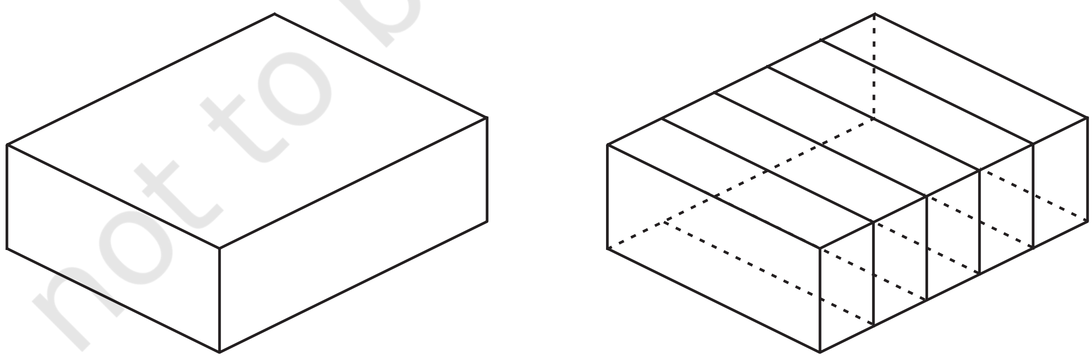
घनाभ का एक जाल, प्लास्टीसीन या मिट्टी, कटर, रूलर और कार्डबोर्ड।

रचना की विधि

1. लंबाई l, चौड़ाई b और ऊँचाई h, (मान लीजिए $l = 5$ इकाई, $b = 4$ और $h = 2$ इकाई) वाले घनाभ का एक जाल लीजिए।

2. इसे मोड़कर एक खुला घनाभ बनाइए। इस घनाभ को मिट्टी/प्लास्टीसीन से भरिए तथा जाल को हटा लीजिए।

3. इस प्रकार बनाए घनाभ को कार्डबोर्ड पर रखिए तथा इसे इसकी लंबाई के अनुदिश, पाँच बराबर टुकड़ों में काट लीजिए, जैसा आकृति 1 में दर्शाया गया है।

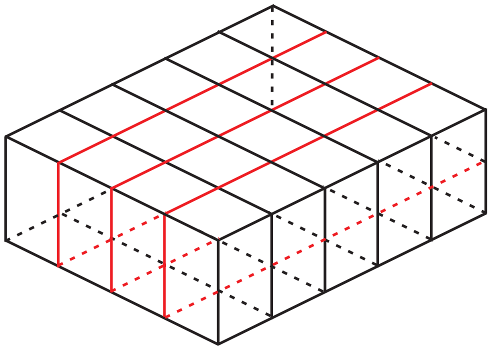


आकृति 1

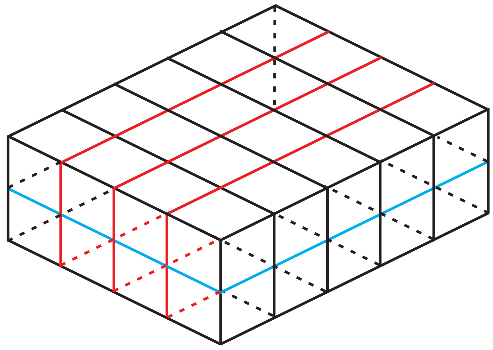
4. अब इस घनाभ को इसकी चौड़ाई के अनुदिश, आकृति 2 में दर्शाए अनुसार, चार बराबर टुकड़ों में काटिए।

© NCERT not to be republished

5. अब, घनाभ को इसकी ऊँचाई के अनुदिश, आकृति 3 में दर्शाए अनुसार, दो बराबर टुकड़ों में काटिए।



आकृति 2



आकृति 3

प्रदर्शन

1. घनाभ इकाई लंबाई के घनों (अर्थात् इकाई घनों) में विभाजित हो गया है।
2. इस प्रकार प्राप्त इकाई घनों की संख्या 40 है, जिसे 5 × 4 × 2 के क्रम में व्यक्त किया जा सकता है।
3. घनाभ का आयतन 5 × 4 × 2, अर्थात् $l \times b \times h$ है।
4. इसी प्रकार, विमाओं 2 × 1 × 2 घन इकाई, 3 × 4 × 2 घन इकाई, 5 × 4 × 2 घन इकाई, 5 × 3 × 2 घन इकाई के घनाभ बनाइए तथा उपरोक्त चरणों को दोहराइए।

प्रेक्षण

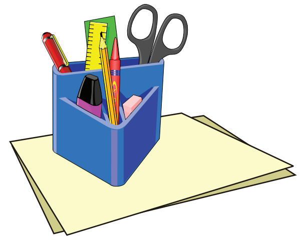
क्रम संख्या	l	b	h	इकाई घनों की संख्या (आयत)	$l \times b \times h$ (आयत)
1.	5	4	2	40	5 × 4 × 2
2.	2	1	2	__	__ × __ × __
3.	3	4	2	__	__ × __ × __
4.	5	3	2	__	__ × __ × __

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग एक घन के आयतन के सूत्र को स्पष्ट करने में किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 83



उद्देश्य

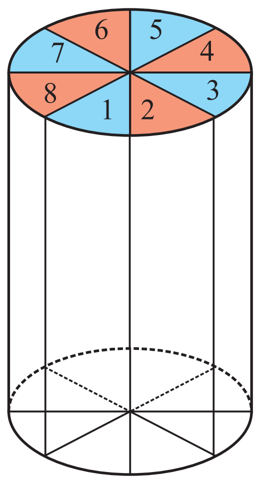
एक लंब वृत्तीय बेलन के आयतन के लिए सूत्र प्राप्त करना।

आवश्यक सामग्री

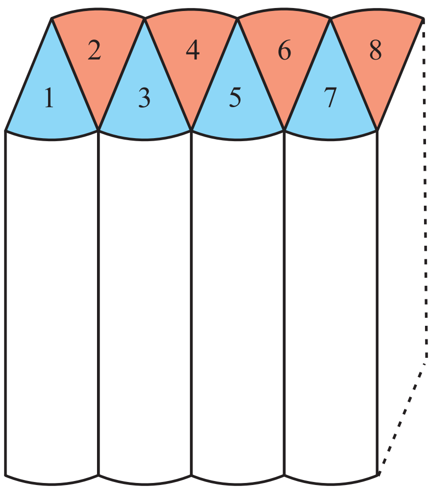
एक बेलनाकार पात्र, कटर, प्लास्टीसीन या मिट्टी, रूलर (पटरी), गत्ते का टुकड़ा और पेन/पेंसिल।

रचना की विधि

1. धातु का एक बेलनाकार पात्र लीजिए, जिसके दोनों सिरे खुले हों। इसकी ऊँचाई मापिए। मान लीजिए यह h है।
2. इसे दृढ़तापूर्वक एक गत्ते पर रखिए तथा इसे प्लास्टीसीन या मिट्टी से भरिए।
3. इस मिट्टी को धीरे से पात्र में से बाहर निकालिए।
4. इस मिट्टी को नीचे आकृति में दर्शाए अनुसार आप जितने भागों में चाहें काट लीजिए तथा इन भागों को संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ... द्वारा अंकित कीजिए (आकृति 1)।
5. इन भागों को आकृति 2 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



आकृति 1



आकृति 2

प्रदर्शन

आकृति 2 में प्राप्त आकार एक घनाभ जैसा दिखाई देता है।

© NCERT not to be republished

घनाभ की लंबाई $= \frac{1}{2}$ बेलन के आधार की परिधि

$= \frac{1}{2} \times (2\pi r) \qquad = \pi r$

घनाभ की चौड़ाई = बेलन की त्रिज्या

$= r$

घनाभ की ऊँचाई = बेलन की त्रिज्या

$= h$

घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$

$= \pi r \times r \times h$

$= \pi r^2 h$

बेलन का आयतन = घनाभ का आयतन $= \pi r^2 h$

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

घनाभ (बेलन) की ऊँचाई = _____ (h)

आधार की त्रिज्या = _____

घनाभ (बेलन) की चौड़ाई = _____ (= r)

घनाभ (बेलन) की लंबाई = _____ = (= $\frac{1}{2} \times 2\pi r$)

घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$ = _____

इस प्रकार, बेलन का आयतन = _____

अतः, बेलन का आयतन = घनाभ का आयतन _____

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r \times h$ = _____

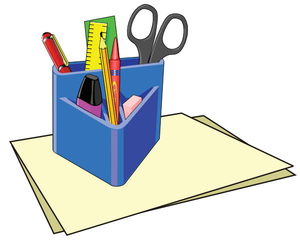
= _____

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप विभिन्न बेलनाकार वस्तुओं/बर्तनों के आयतन और धारिताएँ ज्ञात करने में उपयोगी है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 84



उद्देश्य

एक लंब वृत्तीय बेलन के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए सूत्र प्राप्त करना।

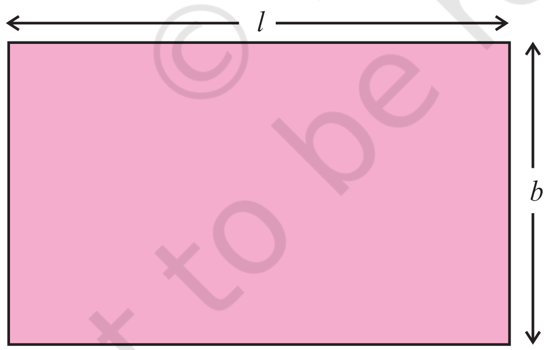
आवश्यक सामग्री

रंगीन चार्ट पेपर, सेलोटेप और रूलर।

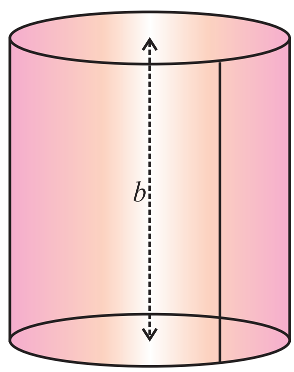
रचना की विधि

1. लंबाई l इकाई और चौड़ाई b इकाई का एक आयताकार चार्ट पेपर लीजिए (आकृति 1)।

2. इस कागज़ को चौड़ाई के अनुदिश मोड़िए तथा दोनों सिरों को सेलोटेप की सहायता से जोड़िए और आकृति 2 में दर्शाए अनुसार एक ठोस प्राप्त कीजिए।



आकृति 1



आकृति 2

प्रदर्शन

1. आकृति 2 में प्राप्त ठोस एक बेलन है।

© NCERT not to be republished

2. आयताकार कागज़ की लंबाई = l = बेलन के आधार की परिधि = $2\pi r$, जहाँ r बेलन के आधार की त्रिज्या है।

3. आयताकार कागज़ की चौड़ाई = l = बेलन की ऊँचाई (h)

4. बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

$= l \times b = 2\pi r \times h = 2\pi rh$ वर्ग इकाई

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

l = ..., b = ...,

अतः, $2\pi r = l$ = ..., $h = b$ = ...,

आयताकार कागज़ का क्षेत्रफल = $l \times b$ = ...

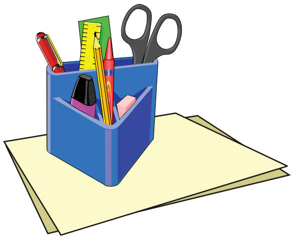
अतः, बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$

अनुप्रयोग

इस परिणाम का उपयोग बेलनाकार पात्रों या बर्तनों, जैसे पाउडरों के टिन, ड्रम, औद्योगिक संस्थानों में तेल की टंकियाँ, छत के ऊपर पानी की टंकियाँ, इत्यादि बनाने में प्रयुक्त सामग्री का आकलन करने में किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 85



उद्देश्य

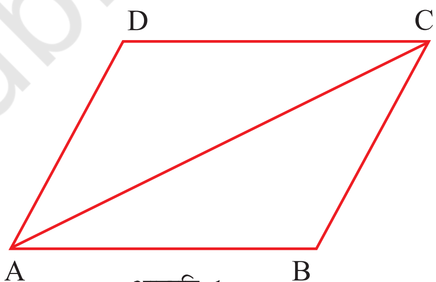
यह सत्यापित करना कि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, कागज़ की सफ़ेद शीट, गोंद, कैंची और लाल स्केच पेन।

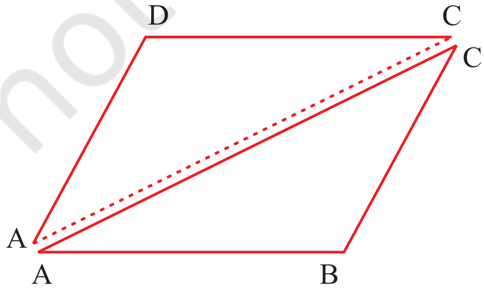
रचना की विधि

1. एक सुविधाजनक माप का कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. कागज़ की एक रंगीन शीट पर, दो सर्वसम समांतर चतुर्भुज बनाइए तथा इनमें से प्रत्येक को ABCD से नामांकित कीजिए। दोनों समांतर चतुर्भुजों में AC को मिलाइए। दोनों समांतर चतुर्भुजों को काटकर निकाल लीजिए।

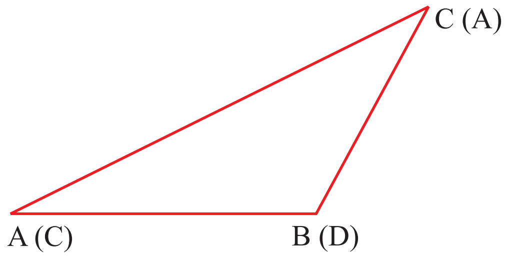


आकृति 1

3. इनमें से एक समांतर चतुर्भुज को कार्डबोर्ड पर चिपकाइए (आकृति 1)।
4. दूसरे समांतर चतुर्भुज ABCD को आकृति 2 में दर्शाए अनुसार विकर्ण AC के अनुदिश काटिए, जिससे दो त्रिभुज ABC और ACD प्राप्त होते हैं।
5. आकृति 3 में दर्शाए अनुसार, त्रिभुज CDA को त्रिभुज ABC पर चिपकाइए।



आकृति 2



आकृति 3

© NCERT not to be republished

प्रदर्शन

त्रिभुज CDA त्रिभुज ABC को ठीक-ठीक ढँक लेता है।

Δ CDA का शीर्ष A, Δ ABC के शीर्ष C पर गिरता है।

Δ CDA का शीर्ष C, Δ ABC के शीर्ष A पर गिरता है।

Δ CDA का शीर्ष D, Δ ABC के शीर्ष B पर गिरता है।

यह दर्शाता है कि Δ ABC की भुजा AB, Δ CDA के भुजा DC के बराबर है तथा Δ ABC की भुजा BC, Δ CDA के भुजा AD के बराबर है।

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

आकृति 1 में, समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा AB की लंबाई = _____

भुजा BC की लंबाई = _____ cm

भुजा CD की लंबाई = _____ cm

भुजा AD की लंबाई = _____ cm

आकृति 3 में, भुजा CD भुजा _____ को ढँक लेती है।

भुजा DA भुजा _____ को ढँक लेती है।

इस प्रकार,

AB = _________

और BC = _________

अर्थात् समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ _________ हैं।

अनुप्रयोग

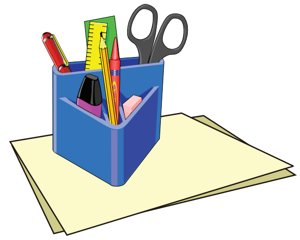
यह परिणाम अनेक ज्यामितीय समस्याओं को हल करने तथा साथ ही समांतर चतुर्भुजों की रचनाओं में भी उपयोगी है।

टिप्पणी

1. समांतर चतुर्भुज ABCD को विकर्ण BD के अनुदिश भी काटा जा सकता है।
2. इस क्रियाकलाप का प्रयोग यह सत्यापित करने के लिए भी किया जा सकता है कि समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 86



उद्देश्य

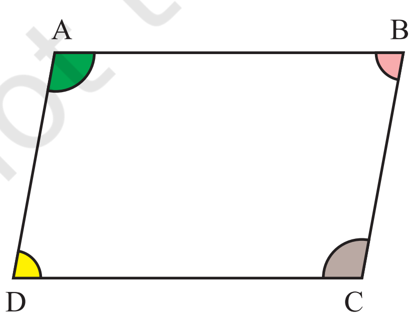
यह सत्यापित करना कि एक समांतर चतुर्भुज के आसन्न कोण संपूरक होते हैं।

आवश्यक सामग्री

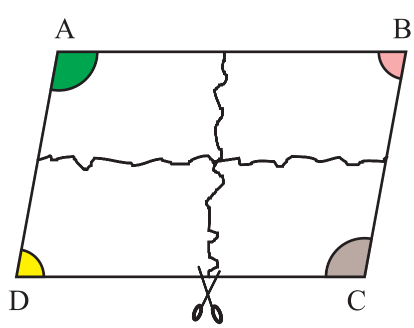
कार्डबोर्ड, रंगीन चिकना कागज़, ज्यामिति बॉक्स, पेंसिल, रंग, कैंची, गोंद और रबड़।

रचना विधि

1. एक सुविधाजनक माप का कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर एक हल्के रंग का चिकना कागज़ चिपकाइए।
2. एक समांतर चतुर्भुज ABCD बनाइए और उसे कार्डबोर्ड पर चिपकाइए।
3. इस समांतर चतुर्भुज की एक ट्रेस प्रतिलिपि बनाइए।
4. समांतर चतुर्भुज ABCD के कोणों को इस प्रकार रंगिए कि कोण A और C एक ही रंग में हों तथा कोण B और D एक ही रंग में हों (आकृति 1)।
5. ट्रेस प्रतिलिपि में से कोणों को आकृति 2 में दर्शाए अनुसार काट लीजिए।



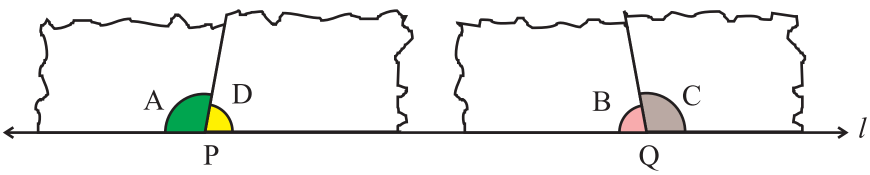
आकृति 1



आकृति 2

© NCERT not to be republished

6. एक सरल रेखा l और उसके ऊपर दो बिंदु P और Q पर्याप्त दूरी पर लीजिए।
7. ∠A और ∠Q के कट आउटों को बिंदु P पर इस प्रकार रखिए कि इनके बीच में कोई रिक्तता न रहे (आकृति 3)।
8. ∠B और ∠C के कट आउटों को बिंदु Q पर इस प्रकार रखिए कि इनके बीच कोई रिक्तता न रहे (आकृति 3)।



आकृति 3

9. इसी प्रकार की व्यवस्था ∠A और ∠B तथा ∠C और ∠D को लेकर कीजिए।

प्रदर्शन

1. ∠A और ∠D एक ऋजु कोण बनाते हैं।
2. ∠B और ∠C एक ऋजु कोण बनाते हैं।
3. $\angle A + \angle D = 180°$

   $\angle B + \angle C = 180°$
4. ∠A और ∠B भी एक ऋजु कोण बनाते हैं तथा ∠C और ∠D भी एक ऋजु कोण बनाते हैं।
5. $\angle A + \angle B = 180°$

   $\angle C + \angle D = 180°$

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

∠A = ___________

∠B = ___________

∠C = ___________

∠D = ___________

© NCERT not to be republished

अतः, $\angle A + \angle D =$ __________, $\angle B + \angle C =$ ___________

$\angle A + \angle B =$ __________, $\angle C + \angle D =$ ___________

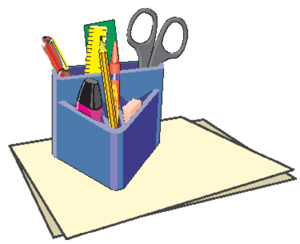
अनुप्रयोग

1. इस क्रियाकलाप का प्रयोग यह सत्यापित करने में किया जा सकता है कि एक वर्ग, आयत तथा समुचतुर्भुज के आसन्न कोण संपूरक होते हैं।

2. इस क्रियाकलाप का प्रयोग यह सत्यापित करने में भी किया जा सकता है कि जब दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेदन करती है, तो तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण संपूरक होते हैं।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 87



उद्देश्य

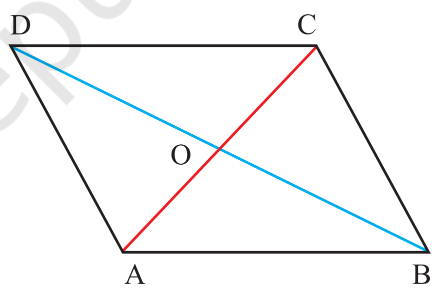
यह सत्यापित करना कि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, कागज़ की सफ़ेद शीट, गोंद, कैंची, ज्यामिति बॉक्स, रंगीन स्केच पेन, थम्ब पिन और मोटा ट्रेसिंग पेपर।

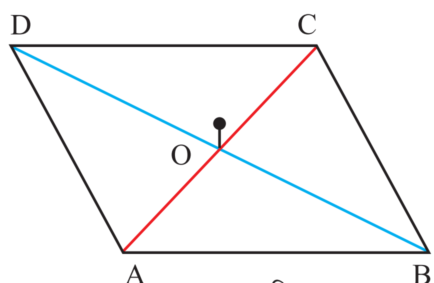
रचना की विधि

1. एक सुविधाजनक माप का कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. एक सफ़ेद कागज़ और एक मोटे ट्रेंसिग पेपर की सहायता से दो सर्वसम समांतर चुतुर्भुज बनाइए। इन्हें ABCD से नामांकित कीजिए। इनके विकर्णों AC और BC को अलग-अलग रंगों का प्रयोग करते हुए मिलाइए। मान लीजिए इनका प्रतिच्छेद बिंदु O है।



आकृति 1

3. (सफ़ेद कागज़ पर बनाए गए) समांतर चतुर्भुज ABCD को कार्डबोर्ड पर चिपकाइए (आकृति 1)।
4. दूसरे समांतर चतुर्भुज ABCD (मोटे ट्रेसिंग पेपर पर बनाए गए) को पहले समांतर चुतुर्भुज के ऊपर O पर एक थम्ब पिन की सहायता से आकृति 2 में दर्शाए अनुसार लगा दीजिए।



आकृति 2

प्रदर्शन

1. ऊपरी समांतर चतुर्भुज को दक्षिणावर्त (या वामावर्त) दिशा में तब तक घुमाइए, जब तक कि वह पुनः दूसरे समांतर चतुर्भुज को ठीक-ठीक न ढँक ले, जैसा आकृति 3 में दर्शाया गया है।

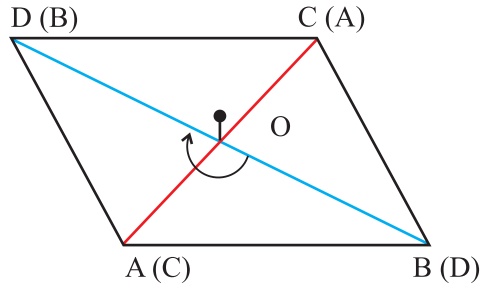
© NCERT not to be republished

2. आकृति 3 से,

AO = OC

OB = OD

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



आकृति 3

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

आकृति 2 से,

OA = ____________ OC = ____________

OB = ____________ OD = ____________

AC = ____________ AD = ____________

$OA = \frac{1}{2} AC$

$OB = \frac{1}{2}$ ________

आकृति 3 में, ऊपरी समांतर चतुर्भुज का OA निचले समांतर चतुर्भुज के ______ पर ठीक-ठीक गिरता है।

ऊपरी समांतर चतुर्भुज का OB निचले समांतर चतुर्भुज के _______ पर ठीक-ठीक गिरता है।

ऊपरी समांतर चतुर्भुज के OC और OD क्रमशः निचले समांतर चतुर्भुज के _______ और _______ ठीक-ठीक गिरते हैं।

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर _______ करते हैं।

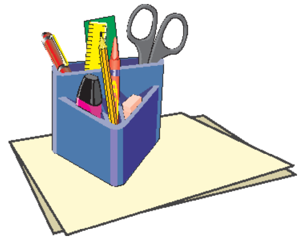
अनुप्रयोग

1. यह परिणाम समांतर चतुर्भुज से संबंधित अनेक ज्यामितीय समस्याओं को हल करने में उपयोगी है।

2. इसी क्रियाकलाप का प्रयोग समांतर चतुर्भुज के अन्य गुणों, जैसे इसके सम्मुख कोण बराबर होते हैं, इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं, को सत्यापित करने के लिए किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 88



उद्देश्य

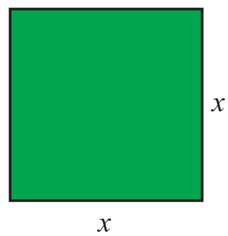
कार्डबोर्ड की विभिन्न पट्टियों का प्रयोग करते हुए, दो रैखिक बीजीय व्यंजकों (बहुपदों) को गुणा करना।

आवश्यक सामग्री

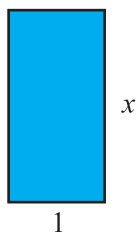
कार्डबोर्ड, रंगीन कागज़ (हरा, नीला और लाल), ज्यामिति बॉक्स, कटर, गोंद और स्केच पेन।

रचना की विधि

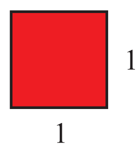
1. कार्डबोर्ड के तीन टुकड़े लीजिए तथा उन पर रंगीन कागज़ चिपकाइए– एक पर हरा, दूसरे पर नीला तथा तीसरे पर लाल।
2. हरे कागज़ पर भुजा x इकाई वाले बहुत बड़ी संख्या में वर्ग बनाइए तथा उन्हें काट लीजिए (आकृति 1)।
3. इसी प्रकार, नीले कागज़ पर विमाओं x इकाई × 1 इकाई वाले अनेक आयत बनाइए तथा लाल कागज़ पर विमाओं 1 इकाई × 1 इकाई वाले अनेक वर्ग बनाइए (आकृति 2 और आकृति 3)।



आकृति 1



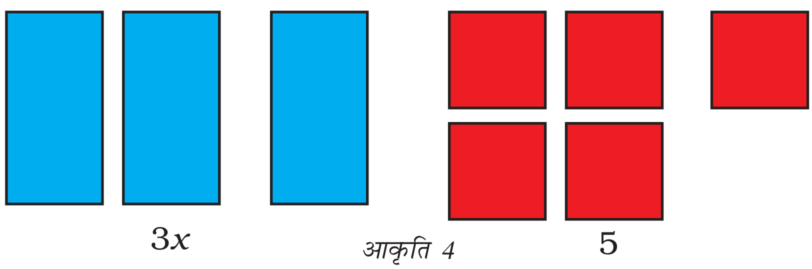
आकृति 2



आकृति 3

प्रदर्शन

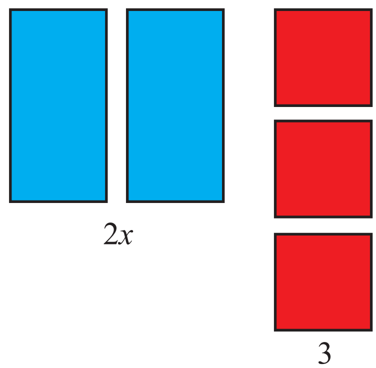
1. बीजीय व्यंजक $3x + 5$, को निरूपित करने के लिए, पट्टियों को आकृति 4 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



आकृति 4

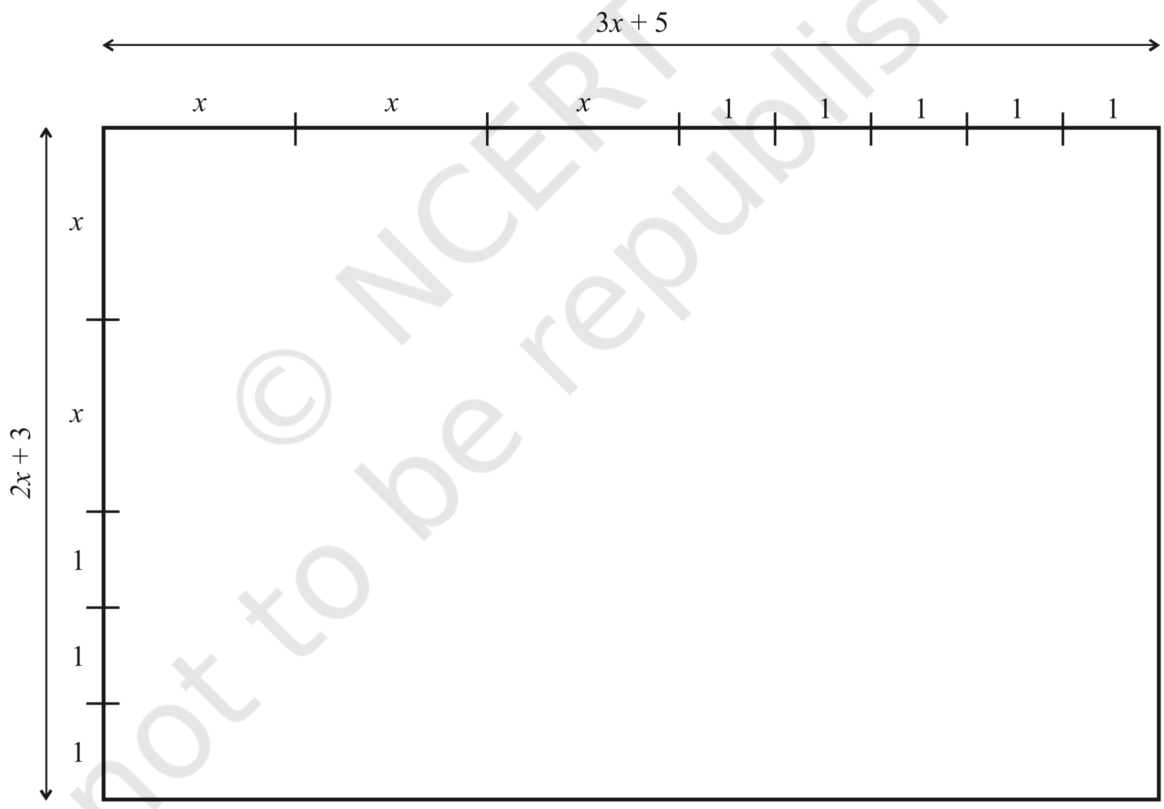
© NCERT not to be republished

2. चरण 1 की ही तरह, बीजीय व्यंजक $2x + 3$, को आकृति 5 में दर्शाए अनुसार निरूपित कीजिए।



आकृति 5

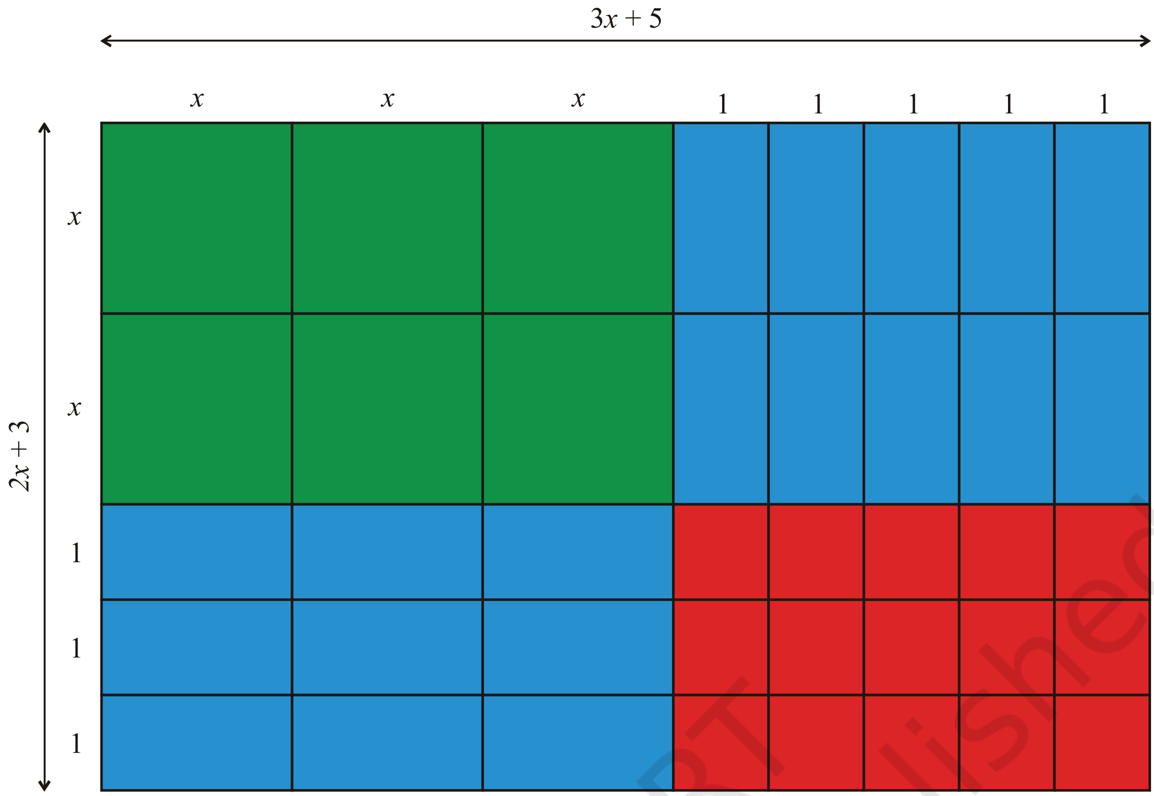
3. एक आयत बनाइए जिसकी लंबाई $3x + 5$ हो तथा चौड़ाई $2x + 3$ हो (आकृति 6)।



आकृति 6

4. चरण 1 और 2 में प्राप्त पट्टियों को आकृति 6 के आयत में आकृति 7 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

© NCERT not to be republished



आकृति 7

आकृति 6 में, आयत का क्षेत्रफल = $l \times b = (3x + 5)\ (2x + 3)$

आकृति 7 में, पट्टियों का क्षेत्रफल = $6x^2 + 19x + 15$

अतः, $(3x + 5)\ (2x + 3) \quad = 6x^2 + 19x + 15$

इसी प्रकार, कुछ अन्य बीजीय व्यंजकों के युग्मों के गुणनफल ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

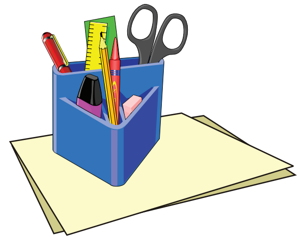
प्रेक्षण

1. आकृति 6 में, आयत का क्षेत्रफल = $(3x + 5) \times$ (____ + ____)
2. आकृति 7 में,
   (a) हरी पट्टियों की संख्या = __________
   (b) नीली पट्टियों की संख्या = __________
   (c) लाल पट्टियों की संख्या = __________
   (d) निरूपित बीजीय व्यंजक = __________
3. इस प्रकार, $(3x + 5)\ (2x + 3)$ =
   = ____ x^2 + _____ x + _____

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप दो रैखिक बीजीय व्यंजकों के गुणन की अवधारणा को स्पष्ट करने के लिए उपयोगी है।

क्रियाकलाप 89



उद्देश्य

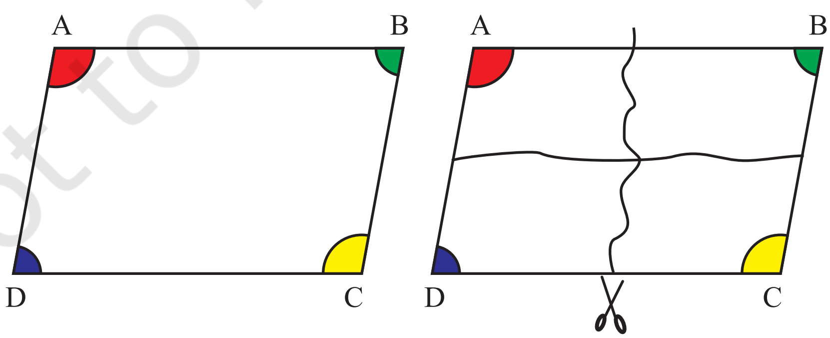
यह सत्यापित करना कि समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, रंगीन कागज़, ज्यामिति बॉक्स, पेंसिल, कैंची, रंग और कागज़ की सफ़ेद शीट।

रचना की विधि

1. एक सुविधाजनक माप का कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर हल्के रंग का कागज़ चिपकाइए।
2. एक सफ़ेद रंग की शीट लीजिए और उस पर एक समांतर चतुर्भुज खींचिए। इसे ABCD से नामांकित कीजिए।
3. इन समांतर चतुर्भुजों के कोणों को समान रंगों से रंगिए।
4. एक समांतर चतुर्भुज को आकृति 1 में दर्शाए अनुसार काट लीजिए।



आकृति 1

इस प्रकार बने चारों कोणों के कट आउटों को एक दूसरे पर रखें तथा देखें कि कौन-सा कट आउट दूसरे को ठीक-ठीक ढँक लेता है।

© NCERT not to be republished

प्रदर्शन

1. इस प्रकार बने चारों कोणों के कट आउटों को एक दूसरे के ऊपर रखकर देखिए कि कौन-सा कट आउट किस कोण को ठीक-ठीक ढँक रहा है।

2. $\angle A$ का कट आउट $\angle C$ के कट आउट को ठीक-ठीक ढँक लेता है।

   अत:, $\angle A = \angle C$ है।

3. $\angle B$ का कट आउट $\angle D$ के कट आउट को ठीक-ठीक ढँक लेता है।

   अत:, $\angle B = \angle D$ है।

   इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$\angle A$ की माप = __________

$\angle C$ की माप = __________

$\angle B$ की माप = __________

$\angle D$ की माप = __________

अत:, $\angle A$ = ______ , _______ = $\angle D$

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग यह सत्यापित करने में किया जा सकता है कि निम्नलिखित आकृतियों के सम्मुख कोण बराबर होते हैं—

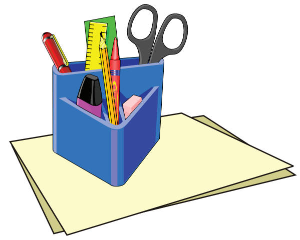
(i) वर्ग

(ii) आयत

(iii) समचतुर्भुज

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 90



उद्देश्य

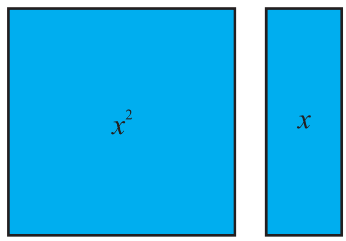
बहुपद, मान लीजिए $(2x^2 + 4x)$ का गुणनखंडन करना।

आवश्यक सामग्री

नीले और लाल चार्ट पेपर, कैंची, ज्यामिति बॉक्स, रबड़ और पेन/पेंसिल।

रचना की विधि

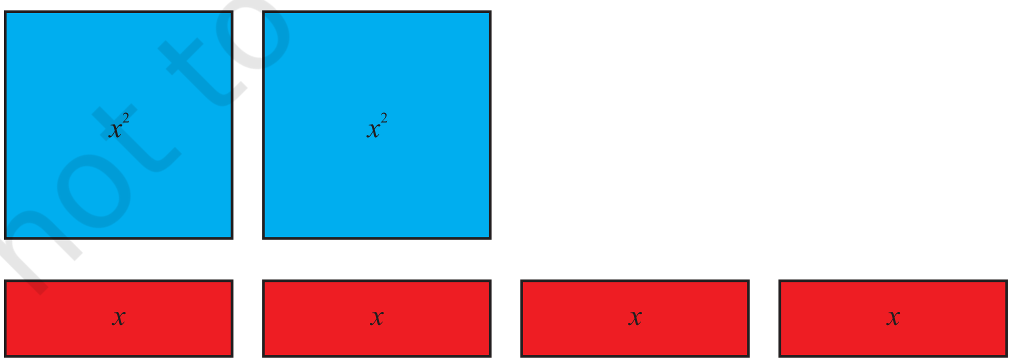
1. x^2 को दर्शाने के लिए नीले चार्ट पेपर से 3 cm × 3 cm विमाओं के पर्याप्त मात्रा में टुकड़े काटें तथा x को दर्शाने के लिए लाल चार्ट पेपर से 3 cm × 1 cm के टुकड़े काटें।



आकृति 1

प्रदर्शन

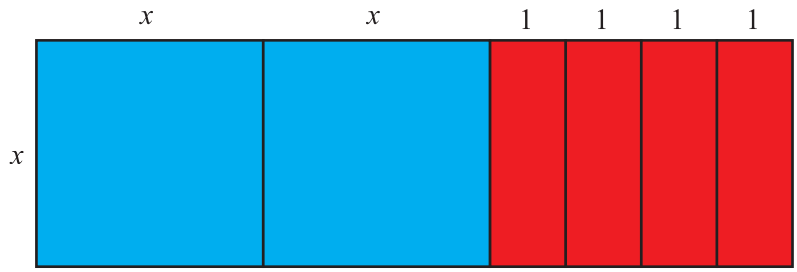
1. उपरोक्त कट आउटों से $2x^2$ तथा $4x$ बनाएं (आकृति 2)।



आकृति 2

© NCERT not to be republished

2. आकृति 2 के सभी कट आउटों से विभिन्न प्रकार के आयत बनाएं (आकृति 3 और 4)।



आकृति 3

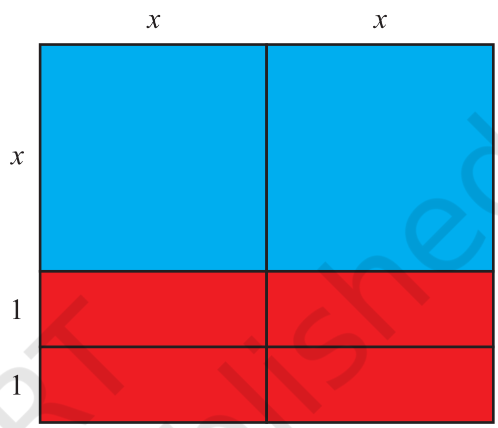
3. आकृति 3 में आयत की विमाएं x और $2x + 4$ है।

अत: आयत का क्षेत्रफल $x(2x + 4)$ है।

इस प्रकार, $2x^2 + 4x = x(2x + 4)$

4. आकृति 4 से ही,

$2x^2 + 4x = 2x(x + 2)$



आकृति 4

प्रेक्षण

आकृति 3 में,

(i) आयत की लंबाई = ________

(ii) आयत की चौड़ाई = _______

(iii) आयत का क्षेत्रफल = _______

अत:, $2x^2 + 4x$ = ____ × ($2x$ + ___)

आकृति 4 में,

(iv) आयत की लंबाई = ________

(v) आयत की चौड़ाई = _______

(vi) आयत की क्षेत्रफल = _________

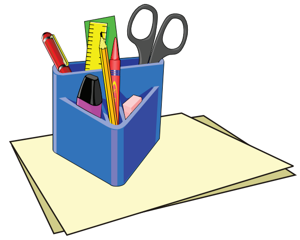
अत:, $2x^2 + 4x = 2x$ × (____ + ____)

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप बहुपद के गुणनखंड की अवधारणा को समझने में उपयोगी है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 91



उद्देश्य

किसी बहुपद, मान लीजिए $(x^2 + 4x + 3)$ का गुणनखंडन करना।

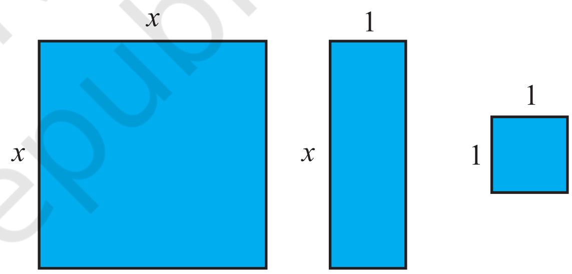
आवश्यक सामग्री

नीला चार्ट पेपर, रबड़ शीट, कैंची, रूलर, रबड़ इत्यादि।

रचना की विधि

1. नीला चार्ट पेपर, रबड़ शीट में से कुछ टुकड़े नीचे दर्शाए अनुसार काट लीजिए।

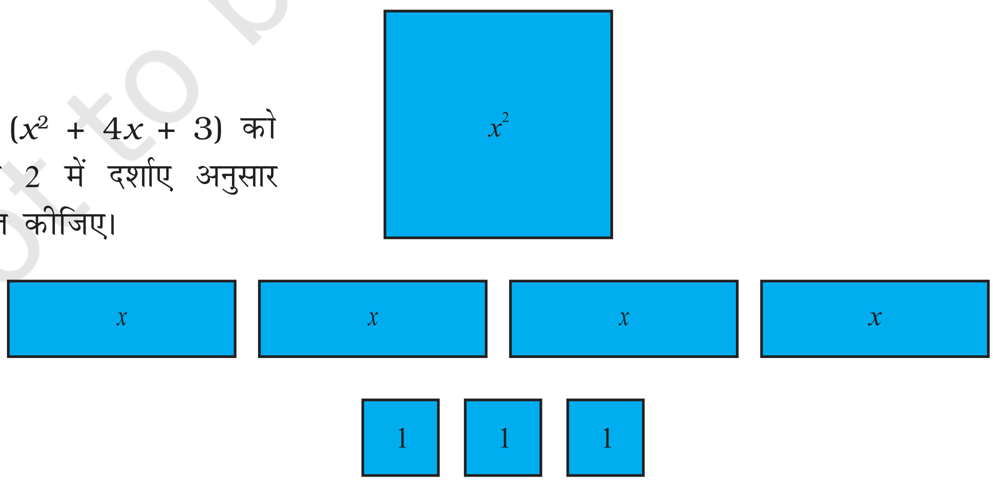
   मान लीजिए कि बड़ा वर्गाकार टुकड़ा x^2, आयताकार टुकड़ा x तथा छोटा वर्गाकार टुकड़ा 1 निरूपित करता है।



आकृति 1

प्रदर्शन

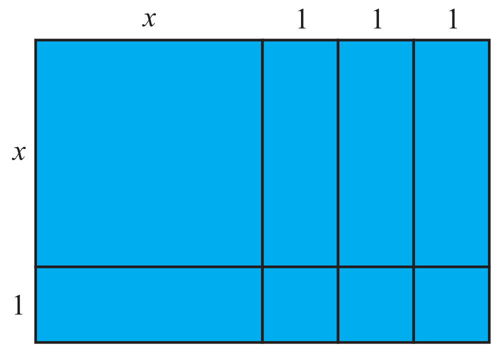
1. बहुपद $(x^2 + 4x + 3)$ को आकृति 2 में दर्शाए अनुसार निरूपित कीजिए।



आकृति 2

© NCERT not to be republished

2. इन टुकड़ों में से प्रत्येक टुकड़ा एक बार लेते हुए, इनसे एक आयत (यदि संभव है, तो वर्ग) बनाने का प्रयास कीजिए, जैसा आकृति 3 में दर्शाया गया है।



आकृति 3

3. उपरोक्त आयत का क्षेत्रफल

= उन सभी आयतों के क्षेत्रफलों का योग जिनसे बड़ा आयत बना है।

$= x^2 + 4x + 3$

4. उपरोक्त आयत की भुजाएँ $(x + 3)$ और $(x + 1)$ हैं।

अत:, $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)\ (x + 1)$

कुछ अन्य बहुपदों के गुणनखंड करने के लिए, इस क्रियाकलाप को दोहराइए।

प्रेक्षण

सारणी को पूरा कीजिए–

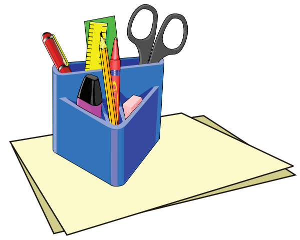
बहुपद	गुणनखंड
$x^2 + 4x + 3$	$(x + 3)\ (x + 1)$
$x^2 + 8x + 7$	____________
x^2 + 8x + 16	____________
$2x^2 + 3x + 1$	____________

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप किसी बहुपद के गुणनखंडों के अर्थ को स्पष्ट करने के लिए उपयोगी है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 92



उद्देश्य

एक रैखिक समीकरण, मान लीजिए $2x + 3 = 5$ को हल करना।

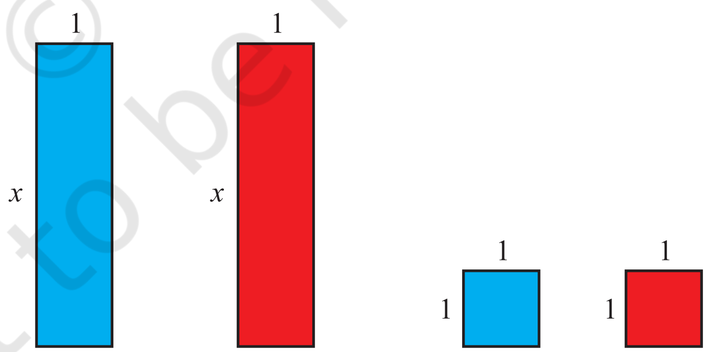
आवश्यक सामग्री

नीले और लाल चार्ट पेपर/रबड़ शीट, कैंची, रूलर, पेंसिल, रबड़, कार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़ और गोंद।

रचना की विधि

1. एक कार्डबोर्ड लेकर, उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।

2. चार्ट पेपर/रबड़ शीट में से कुछ नीले और लाल आयताकार टुकड़े (माप $x \times 1$) तथा कुछ नीले और लाल वर्गाकार टुकड़े (माप 1×1) काट लीजिए, जैसा आकृति 1 में दर्शाया गया है।



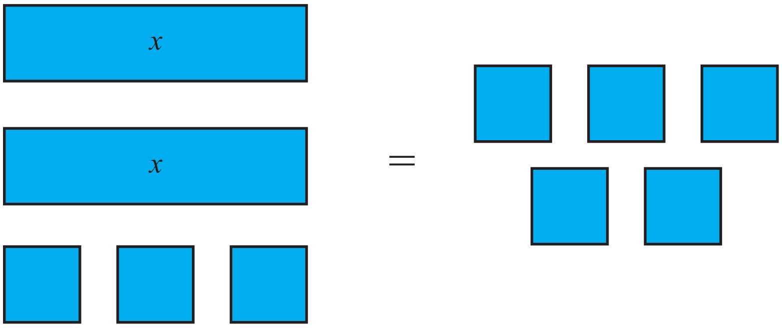
आकृति 1

3. प्रत्येक नीले आयताकार टुकड़े को $(+x)$ और प्रत्येक लाल आयताकार टुकड़े को $(-x)$ मानिए। इसी प्रकार, नीले और लाल वर्गाकार टुकड़ों को क्रमशः $(+1)$ और (-1) मानिए।

© NCERT not to be republished

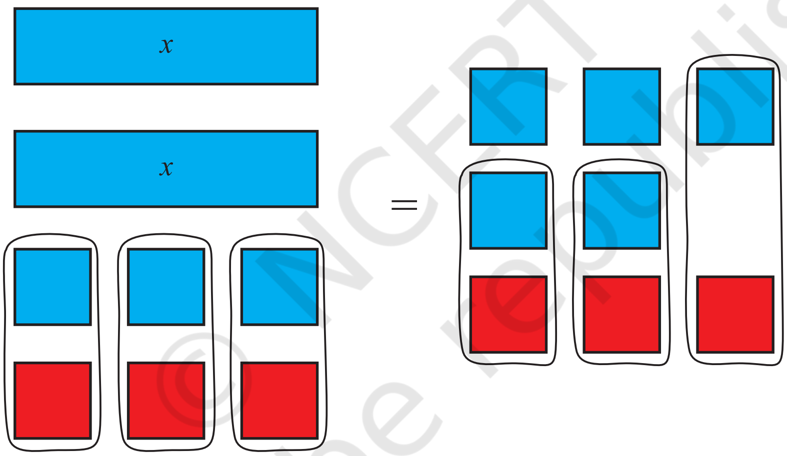
प्रदर्शन

1. समीकरण $2x + 3 = 5$ के लिए 2 आयताकार और 8 वर्गाकार टुकड़ों को कार्डबोर्ड पर नीचे दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए (आकृति 2)–



आकृति 2

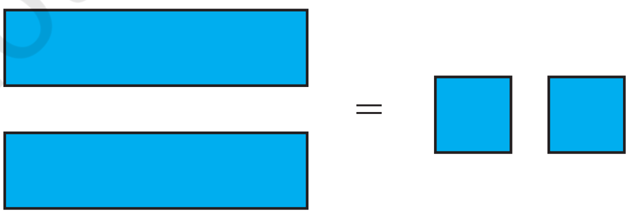
2. दोनों पक्षों में तीन लाल वर्गाकार टुकड़े बढ़ाइए (आकृति 3)।



आकृति 3

3. प्रत्येक लाल वर्ग का एक नीले वर्ग के साथ युग्म बनाकर काट लीजिए। जैसा आकृति 3 में दर्शाया गया है।

4. आकृति 4 प्राप्त करने के लिए, इन युग्मों को हटा लीजिए।



आकृति 4

© NCERT not to be republished

5. दोनों पक्षों को दो बराबर भागों में बाँट लीजिए तथा प्रत्येक पक्ष में से केवल एक भाग लीजिए, जैसा आकृति 5 में दर्शाया गया है।

आकृति 5

इस प्रकार, समीकरण $2x + 3 = 5$ का हल $x = 1$ है।

कुछ और रैखिक समीकरण लेकर, इस क्रियाकलाप को दोहराया जा सकता है।

प्रेक्षण

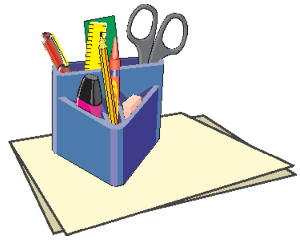
समीकरण	LHS में टुकड़े		RHS में टुकड़े		दोनों पक्षों में जोड़े गए टुकड़े		हल
	आयत	वर्ग	आयत	वर्ग	आयत	वर्ग	
$2x + 3 = 5$	2 नीले	3 नीले	0	5 नीले	0	3 लाल	$x = 1$
$2x - 7 = 3$	2 नीले	7 लाल	____	____	____	7 नीले	$x = 5$
$3x - 2 = x + 4$	____	____	1 नीले	____	1 लाल	____	__ = __
$2x - 7 = 5 - 2x$	____	____	2 लाल	____	2 नीले	____	__ = __

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप एक समीकरण को हल करने की प्रक्रिया को स्पष्ट करने के लिए उपयोगी है।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 93



उद्देश्य

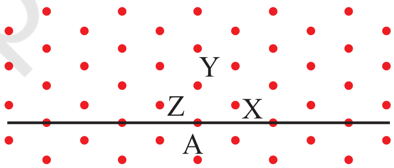
एक समदूरिक बिंदुकित कागज़ पर एक घन का एक स्केच खींचना तथा वर्गांकित कागज़ पर इसका तिर्यक स्केच भी खींचना।

आवश्यक सामग्री

समदूरिक बिंदुकित कागज़, रूलर, स्केच पेन, पेंसिल और एक वर्गाकार बिंदुकित कागज़।

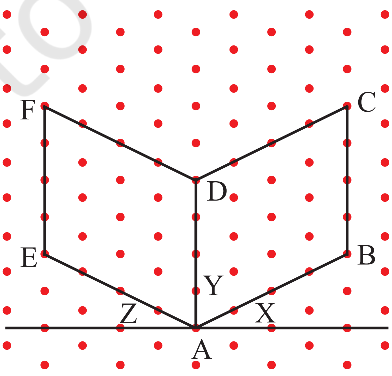
रचना की विधि

1. एक समदूरिक बिंदुकित कागज़ लीजिए और उस पर एक बिंदु A अंकित कीजिए, जैसा आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. A से होकर एक क्षैतिज रेखा खींचिए।
3. बिंदु A के निकटतम 3 बिंदुओं की पहचान कीजिए, जो क्षैतिज रेखा के ऊपर हों तथा इन्हें X, Y, और Z से अंकित कीजिए (देखिए आकृति 2)।

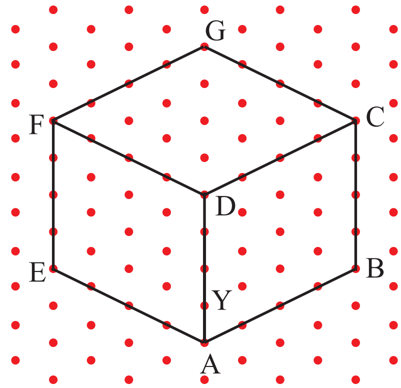


आकृति 2

4. बिंदु A से प्रारंभ करते हुए AX के अनुदिश 4 बिंदियाँ चलिए तथा चौथे बिंदु को B से अंकित कीजिए (आकृति 3)।

5. बिंदु B से प्रारंभ करते हुए, ऊपर की ओर 4 बिंदु चलिए और चौथे बिंदु को C से अंकित कीजिए (आकृति 3)।

6. बिंदु A से प्रारंभ करते हुए AY के अनुदिश 4 बिंदु चलिए और चौथे बिंदु को D से अंकित कीजिए (आकृति 3)।



आकृति 3

7. बिंदु A से प्रारंभ करते हुए, AZ के अनुदिश 4 बिंदु चलिए और चौथे बिंदु को E से अंकित कीजिए (आकृति 3)।

8. बिंदु E से प्रारंभ करते हुए, ऊपर की दिशा में 4 बिंदु चलिए और चौथे बिंदु को F से अंकित कीजिए (आकृति 3)।

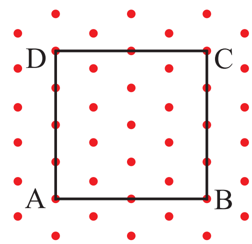
9. FD और CD को मिलाइए।

10. बिंदु C से प्रारंभ करते हुए, DE के समांतर 4 बिंदु चलिए और चौथे बिंदु को G से अंकित कीजिए।

11. FG, CG, BC, AB, AE, EF और AD को मिलाइए (आकृति 3)।

घन का तिर्यक स्केच

1. एक कागज़ लीजिए और उस पर एक बिंदु A अंकित कीजिए (आकृति 4)।

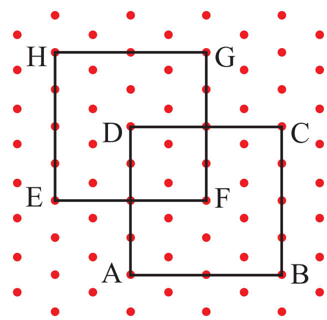


आकृति 4

2. बिंदु A से प्रारंभ करते हुए, दाईं ओर 4 बिंदु चलिए और चौथे बिंदु को B से अंकित कीजिए।

3. पुनः, A से प्रारंभ करते हुए, ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर चार बिंदु चलिए और चौथे बिंदु को D से अंकित कीजिए। इसी प्रकार B से प्रारंभ करते हुए, 4 बिंदु ऊपर की ओर चलिए और चौथे बिंदु को C से अंकित कीजिए (आकृति 4)।

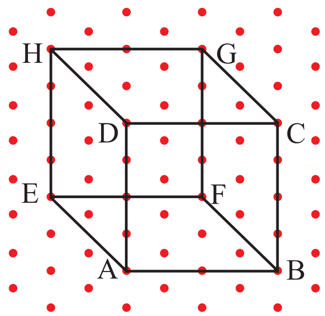
4. AB, BC, CD और AD को मिलाकर वर्ग ABCD प्राप्त कीजिए, जिसकी भुजा 4 इकाई है।



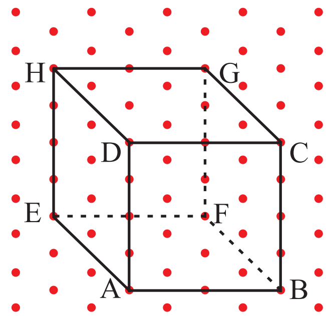
आकृति 5

5. वर्गाकार बिंदुकित कागज़ पर, एक और बिंदु E लीजिए और उपरोक्त चरणों 2 से 4 तक का अनुसरण करते हुए, भुजा 4 इकाई का वर्ग EFGH खींचिए (आकृति 5)।

6. AE, BF, CG और DH को मिलाइए, जैसा आकृति 6 में दर्शाया गया है।



आकृति 6



आकृति 7

प्रदर्शन

1. आकृति 3 में, ABCDEFG भुजा 4 इकाई के एक घन का समदूरिक स्केच है।
2. आकृति 7 में, ABCDEFG भुजा 4 इकाई के एक घन का तिर्यक स्केच है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

1. आकृति 3 में, AB = _____ ; AD = _____ ; AE = _____

   अतः, AB = _____ = _____

   इस प्रकार, आकृति 3 में प्राप्त आकार भुजा _______ इकाई के एक घन का एक समदूरिक _______ है।

2. आकृति 6 में, AB = _____ ; AD = _____ और AE = _____

   अतः, AB = _____

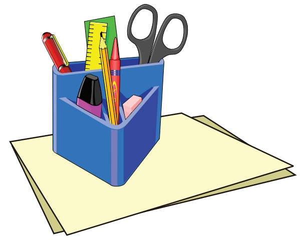
   इकाई के घन का एक ________ स्केच है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप एक 3-D आकार को एक 2-D आकार में खींचने के लिए उपयोगी है। इसी प्रकार का क्रियाकलाप एक घनाभ के लिए भी किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

प्रोजेक्ट 1



आयतों के परिमाप और क्षेत्रफल

पृष्ठभूमि

दैनिक जीवन में, अधिकांशतः समस्याएँ जिनका व्यक्ति सामना करते हैं, वे हैं, अपने खेतों पर बाड़ लगाना तथा एक विशेष प्रकार की उपज का उत्पादन करने के लिए खेत की माप का निर्धारण करना। ये दोनों समस्याएँ गणितीय अवधारणाओं– क्रमशः परिमाप और क्षेत्रफल से निकटतम रूप से संबंधित हैं। यह समझा जाता है कि यदि किसी आकृति के परिमाप में वृद्धि हो जाती है तो उसके क्षेत्रफल में वृद्धि होती है तथा विलोमतः। परंतु यह समझ वास्तव में सही नहीं है। प्रस्तुत प्रोजेक्ट इस दिशा में एक कदम है कि यह धारणा एक मौलिक आकृति आयत को लेकर स्पष्ट की जाए।

उद्देश्य

आयतों के परिमाप और क्षेत्रफल के व्यवहारों में परिवर्तन की एक दूसरे के सापेक्ष खोज करना।

विवरण

(A) समान परिमाप वाले आयत

आइए निम्नलिखित लंबाइयों और चौड़ाइयों के आयतों पर विचार करें।

(i) लंबाई = 10 cm ; चौड़ाई = 6 cm

(ii) लंबाई = 11 cm ; चौड़ाई = 5 cm

(iii) लंबाई = 8 cm ; चौड़ाई = 8 cm

(iv) लंबाई = 9.5 cm ; चौड़ाई = 6.5 cm

(v) लंबाई = 8.5 cm ; चौड़ाई = 7.5 cm

हम यह देख सकते हैं कि उपरोक्त आयतों में से प्रत्येक का परिमाप एक ही है और यह 32 cm है। आइए इन आयतों के क्षेत्रफल परिकलित करें।

(i) लंबाई 10 cm और चौड़ाई 6 cm वाले आयत का क्षेत्रफल

$= 10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^2$

© NCERT not to be republished

(ii) लंबाई 11 cm और चौड़ाई 5 cm वाले आयत का क्षेत्रफल

$= 11 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 55 \text{ cm}^2$

(iii) लंबाई 8 cm और चौड़ाई 8 cm वाले आयत का क्षेत्रफल

$= 8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 64 \text{ cm}^2$ (**अधिकतम**)

(iv) लंबाई 9.5 cm और चौड़ाई 6.5 cm वाले आयत का क्षेत्रफल

$= 9.5 \text{ cm} \times 6.5 \text{ cm} = 61.75 \text{ cm}^2$

(v) लंबाई 8.5 cm और चौड़ाई 7.5 cm वाले आयत का क्षेत्रफल

$= 8.5 \text{ cm} \times 7.5 \text{ cm} = 63.75 \text{ cm}^2$

उपरोक्त से यह देखा जा सकता है कि स्थिति (iii) में, आयत का क्षेत्रफल अधिकतम है। साथ ही, इस स्थिति में यह आयत एक वर्ग है।

(B) समान क्षेत्रफलों वाले आयत

आइए निम्नलिखित लंबाइयों और चौड़ाइयों के आयतों पर विचार करें–

(i) लंबाई = 16 cm ; चौड़ाई = 4 cm

(ii) लंबाई = 8 cm ; चौड़ाई = 8 cm

(iii) लंबाई = 10 cm ; चौड़ाई = 6.4 cm

(iv) लंबाई = 32 cm ; चौड़ाई = 2 cm

(v) लंबाई = 64 cm ; चौड़ाई = 1 cm

हम यह देख सकते हैं कि उपरोक्त आयतों में प्रत्येक का क्षेत्रफल समान, अर्थात् 64 cm^2 है। आइए इनके परिमाप परिकलित करें।

(i) लंबाई 16 cm और चौड़ाई 4 cm वाले आयत का परिमाप

$= 2\ (16 + 4) \text{ cm} = 40 \text{ cm}$

(ii) लंबाई 8 cm और चौड़ाई 8 cm वाले आयत का परिमाप

$= 2\ (8 + 8) \text{ cm} = 32 \text{ cm}$ (**न्यूनतम**)

(iii) लंबाई 10 cm और चौड़ाई 6.4 cm वाले आयत का परिमाप

$= 2\ (10 + 6.4) \text{ cm} = 32.8 \text{ cm}$

© NCERT not to be republished

(iv) लंबाई 32 cm और चौड़ाई 2 cm वाले आयत का परिमाप

= 2 (32 + 2) cm = 68 cm

(v) लंबाई 64 cm और चौड़ाई 1 cm वाले आयत का परिमाप

= 2 (64 + 1) cm = 130 cm

उपरोक्त से हम देख सकते हैं कि स्थिति (ii) में, आयत का परिमाप न्यूनतम है। साथ ही, इस स्थिति में यह आयत एक वर्ग है।

निष्कर्ष

यह समझ कि जब एक आयत के परिमाप में वृद्धि होती है, तो उसके क्षेत्रफल में भी वृद्धि हो जाती है तथा जब इसके क्षेत्रफल में वृद्धि होती है, तो इसके परिमाप में भी वृद्धि हो जाती है सही, नहीं है। वास्तव में,

(i) समान परिमापों वाले सभी आयतों में, वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

(ii) समान क्षेत्रफल वाले, सभी आयतों में, वर्ग का परिमाप न्यूनतम होता है।

अनुप्रयोग

1. यह प्रोजेक्ट एक दी हुई बाढ़ (परिमाप) के अंतर्गत अधिकतम क्षेत्रफल वाले खेत का आकलन करने में उपयोगी है साथ ही, यह इसका आकलन करने में भी उपयोगी है कि दिए हुए क्षेत्रफल को परिबद्ध करने वाली न्यूनतम बाढ़ की लंबाई (परिमाप) क्या है।

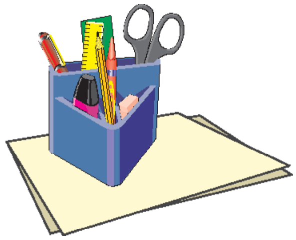
2. वर्ग एक समचतुर्भुज है। एक समबहुभुज की भुजाओं की संख्या को बढ़ाते जाने पर, विवरण (A) में इस परिणाम पर पहुँचा जा सकता है कि **एक दिए हुए परिमाप वाली आकृतियों में वृत्त का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।**

3. यदि लंबाई और चौड़ाई के माप केवल प्राकृत संख्याओं के पदों में ही लिए जाएँ, तो उपरोक्त विवरण (B) में, यह देखा जा सकता है कि एक दिए हुए क्षेत्रफल के लिए, परिमाप अधिकतम होगा, जब भुजाओं में से एक इकाई लंबाई की हो **[B की स्थिति (v)]** परंतु यदि यह प्रतिबंध न हो, तो परिमाप के अधिकतम होने की कोई सीमा नहीं है। अर्थात् एक दिए हुए क्षेत्रफल के लिए, आयत का परिमाप अपरिमित हो सकता है।

क्या यह आश्चर्य की बात नहीं है कि आप दिए हुए क्षेत्रफल वाली अपरिमित लंबाई वाली बेल्ट बना सकते हैं।

© NCERT not to be republished

प्रोजेक्ट 2



π का मान ज्ञात करने की विधियाँ

पृष्ठभूमि

किसी वृत्त में, उसकी परिधि और व्यास का अनुपात एक अचर है और इसे एक यूनानी भाषा के अक्षर π से व्यक्त किया जाता है। परिकलनों के लिए, सामान्यतः π का मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 लिया जाता है। इस प्रोजेक्ट में, सरल विधियों से, π के लिए कुछ सन्निकट मान ज्ञात करने का प्रयास किया गया है।

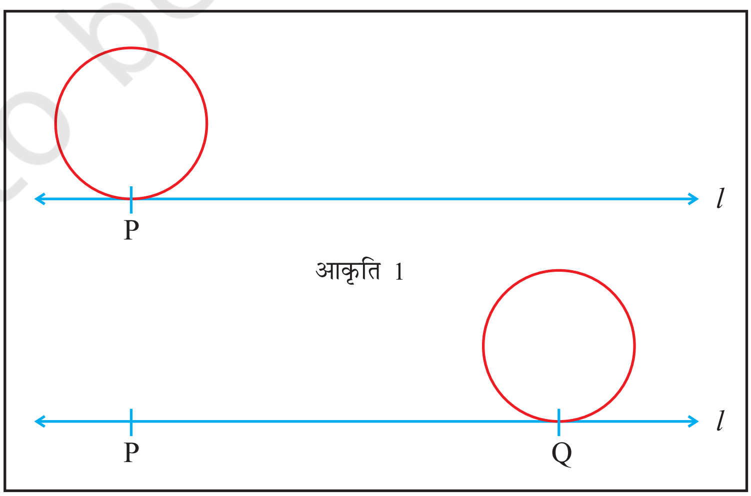
उद्देश्य

विभिन्न विधियों से π का मान ज्ञात करना।

विवरण

विधि 1

एक वृत्ताकार डिस्क (चकती) लीजिए। इस डिस्क के किनारे पर एक बिंदु अंकित कीजिए। एक सुविधाजनक माप का एक कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद कागज़ चिपकाइए। इस कागज़ पर एक रेखा l खींचिए। इस रेखा पर एक बिंदु P अंकित कीजिए। डिस्क को रेखा पर इस प्रकार रखिए कि इस पर अंकित बिंदु रेखा पर अंकित बिंदु P को स्पर्श करे (आकृति 1)। अब डिस्क को रेखा के अनुदिश तब तक घुमाइए, जब तक कि उस पर अंकित बिंदु पुनः रेखा पर स्थित किसी अन्य बिंदु Q को स्पर्श न कर ले (आकृति 2)।



आकृति 1

आकृति 2

© NCERT not to be republished

PQ वृत्त की परिधि है। इसे C से व्यक्त कीजिए। वृत्ताकार डिस्क का व्यास मापिए तथा इसे d से व्यक्त कीजिए। अनुपात $\frac{c}{d}$ ज्ञात कीजिए, जो π के बराबर है।

इस प्रकार, $\pi = \frac{c}{d}$

वास्तविक मापन द्वारा–

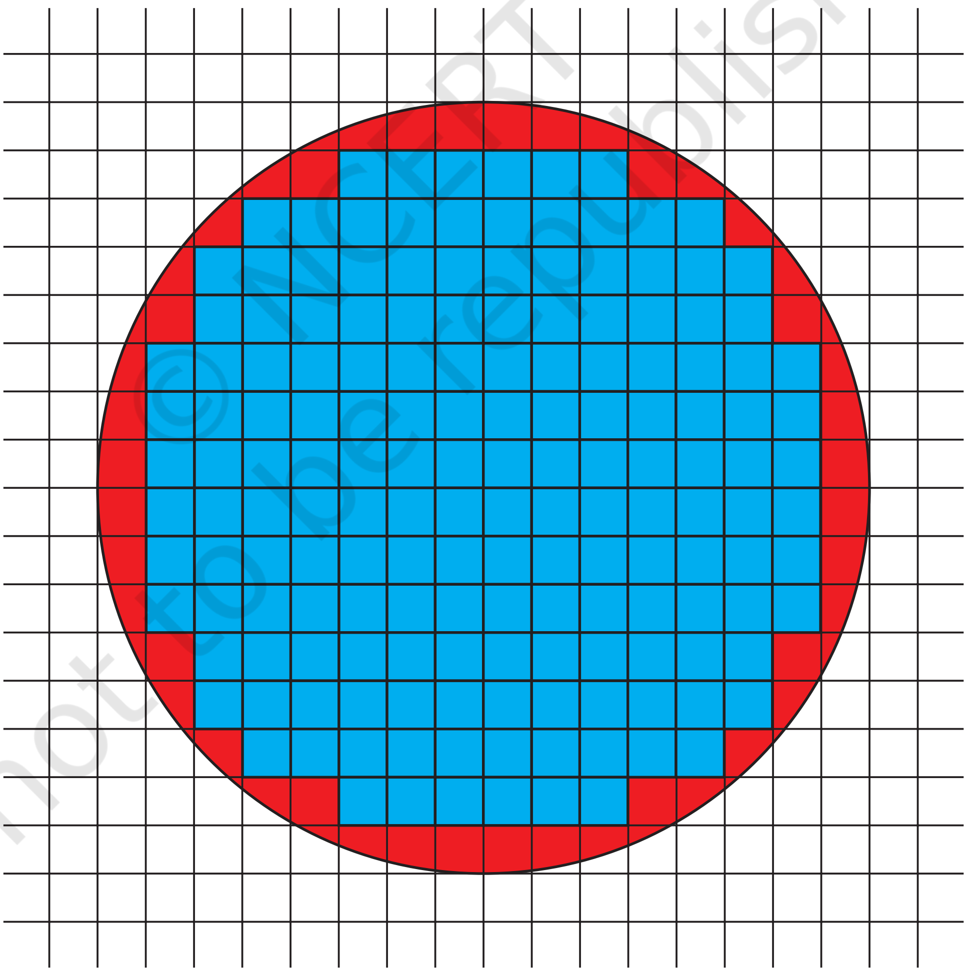
$c = 21.9$ cm

$d = 7.0$ cm

अतः $\pi = \frac{21.9}{7} = 3.13$ (लगभग)

विधि 2

A विमाओं (मान लीजिए) 20 cm × 20 cm का एक वर्गांकित कागज़ लीजिए। इस पर त्रिज्या (मान लीजिए) 8 cm का एक वृत्त खींचिए, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है।



आकृति 3

© NCERT not to be republished

वृत्त के अंदर के पूर्ण वर्गों को गिनिए और इनकी संख्या को a से व्यक्त कीजिए।

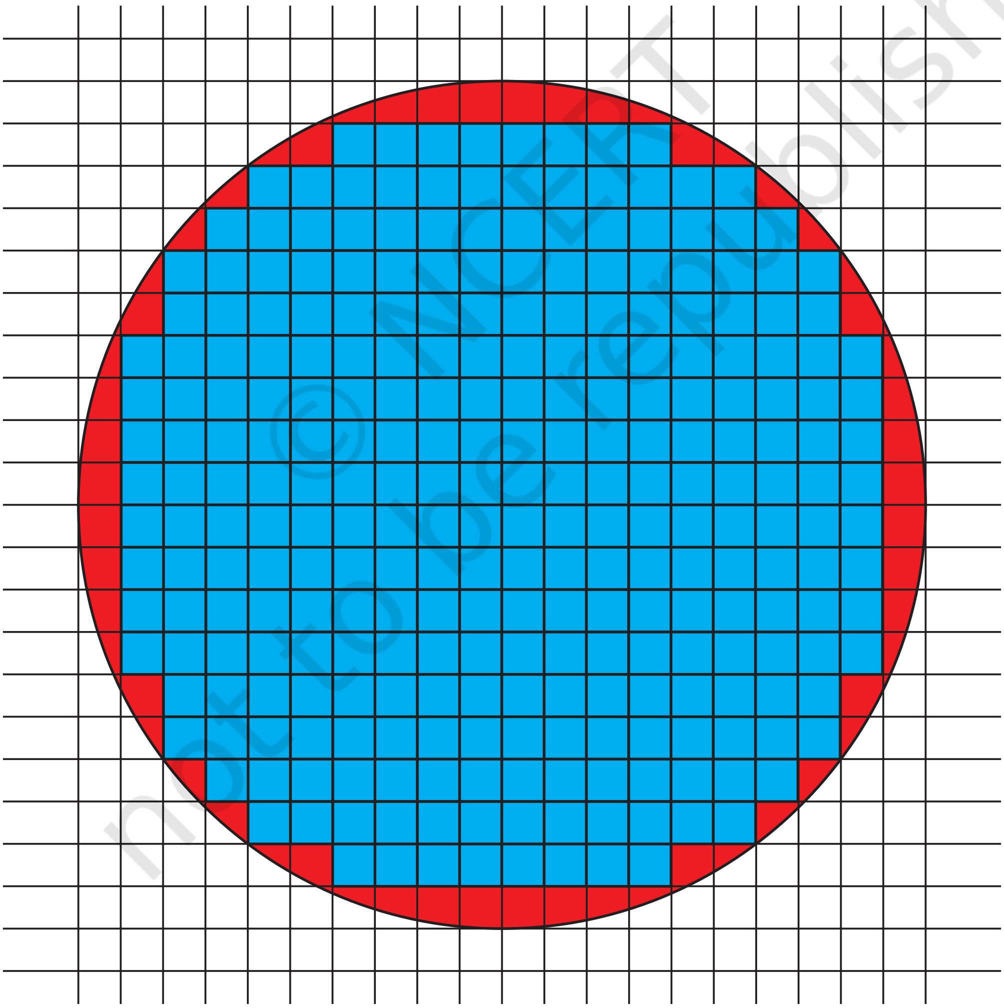
अब इन वर्गों को गिनिए जिनसे होकर वृत्त जाता है। इनकी संख्या को b से व्यक्त कीजिए।

$a+\frac{b}{2}$ ज्ञात कीजिए। इस स्थिति में $a = 14 \times 6 + 12 \times 4 + 10 \times 2 + 6 \times 2 = 164$ तथा $b = 60$ है।

अतः, $a+\frac{b}{2} = 164+\frac{60}{2} = 164 + 30 = 194$

$a+\frac{b}{2}$ को (त्रिज्या)^2 से भाग दीजिए, जिससे π का एक सन्निकट मान प्राप्त होता है।

इस प्रकार, $\pi = \frac{194}{8^2} = \frac{194}{64} = 3.03125$ (लगभग)



आकृति 4

© NCERT not to be republished

A पुनः वर्गांकित कागज़ पर, 10 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए तथा उपरोक्त प्रक्रिया को दोहराइए और π का मान प्राप्त कीजिए (आकृति 5 और आकृति 6)।

इस स्थिति में,

$$a = 18 \times 8 + 16 \times 4 + 14 \times 2 + 12 \times 2 + 8 \times 2 = 276$$

$$b = 68$$

अतः $a + \frac{b}{2} = 276 + \frac{68}{2} = 310$

इस प्रकार, $\pi = \frac{310}{10^2} = \frac{310}{100} = 3.1$ लगभग

जैसे-जैसे त्रिज्या r बढ़ती जाती है π का मान 3.14 के निकटतम आता जाता है।

विधि 3

विमाओं (मान लीजिए) 20 cm × 20 cm का एक वर्गांकित कागज़ लीजिए तथा इस पर त्रिज्या 10 cm (मान लीजिए) का एक वृत्त खींचिए, जैसा कि आकृति 4 में दर्शाया गया है।

इस वृत्त में, वर्गों के शीर्षों की संख्या गिनिए। मान लीजिए यह संख्या a है।

a को r^2 से भाग देकर π का मान प्राप्त कीजिए।

इस स्थिति में, $\pi = \frac{317}{10^2} = \frac{317}{100} = 3.17$

जैसे-जैसे त्रिज्या r बढ़ती जाती है, π का मान 3.14 के निकटतर आता जाता है।

निष्कर्ष

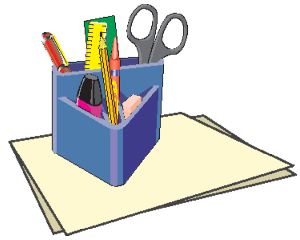
एक वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात सदैव एक अचर है, जिसे π से व्यक्त किया जाता है। इसका सन्निकट मान 3.14 है।

अनुप्रयोग

π का मान अनेक परिकलनों में प्रयोग किया जाता है, जैसे वृत्त का क्षेत्रफल, बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन, इत्यादि।

© NCERT not to be republished

प्रोजेक्ट्स की प्रस्तावित सूची



1. किसी एक भारतीय गणितज्ञ और उसके गणित में योगदान के बारे में।
2. विभिन्न तरीकों से पाइथागोरस प्रमेय की जाँच।
3. जादुई (मैजिक) वर्ग जैसे– 3×3, 4×4, और 5×5
4. सर्वांगसम आकार।
5. पाइथागोरिअन त्रिक ढूँढ़ना।
6. अपने विद्यालय या परिवेश का मानचित्र बनाना।
7. आँकड़ों का संग्रह और उनका विभिन्न तरीकों से चित्रीय निरूपण।
8. दशमलव पद्धति एवं अन्य संख्या पद्धतियाँ जिनका आधार 5, 8 और 2 हो।
9. विभाज्यता परीक्षण विशेषतः 7, 11 और 13 के संदर्भ में।
10. विभिन्न त्रिविमीय (3D) आकारों के लिए आयलर के सूत्र का सत्यापन (बहुफलक)।
11. सीधे एवं प्रतिलोम अनुपात का दैनिक जीवन में अनुप्रयोग।
12. विभिन्न स्थितियों में दोहरे दंड आलेख का उपयोग।
13. हार्डी–रामानुजन संख्याएँ।
14. बीजगणितीय सर्वसमिकाओं का समस्या समाधान में उपयोग।
15. विभिन्न बहुभुजों का क्षेत्रफल।
16. दैनिक जीवन में आलेखों का उपयोग।

© NCERT
not to be republished