

US-2203176-CV-19
B.SC. MATHEMATICS (VI-Semester)
Examination, JUNE-2022
ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2.30 Hours]

[Maximum Marks : 80
[Minimum Pass Marks : 28

नोट : प्रश्नपत्र के तीन खण्ड हैं अ, ब एवं स। प्रत्येक खण्ड के प्रश्नों को निर्देशानुसार हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक निर्दिष्ट हैं।

Note : There are 3 sections in the question paper A, B and C. Solve all question according to instruction given in each section. Mark of each question is mentioned.

खण्ड 'अ'/Section 'A'

किन्हीं 10 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। Solve any 10 questions.

10 x 2=20

1. आंतरिक स्वाकारिता को परिभाषित कीजिए। Define Inner auto-morphism.
2. उच्चिष्ठ गुणजावली को परिभाषित कीजिए। Define Maximal Ideal.
3. विसंघीय उपसमष्टियाँ को परिभाषित कीजिए। Define disjoint subspace.
4. शून्यकारी को परिभाषित कीजिए ? Define Annihilator in vector space.
5. आइगेन समीकरण को परिभाषित कीजिए। Define Eigen equation in vector space.
6. लाम्बिकतः समरूप आव्यूह को परिभाषित कीजिए। Define orthogonally similar matrices.
7. द्विक सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिए। Define "Double Coset".
8. वलय-समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए। Define Kernel of a Ring-Homomorphism.
9. प्रसमान्य लाम्बिक समुच्चय को परिभाषित कीजिए। Define orthonormal set.
10. रैखिक रूपान्तरण की शून्यता को परिभाषित कीजिए। Define Rank of a linear Nullity.
11. लाम्बिक सदिश को परिभाषित कीजिए। Define Orthogonal vector.
12. लाम्बिक आधार को परिभाषित कीजिए। Define Orthogonal basis.

खण्ड 'ब'/Section 'B'

किन्हीं 05 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। Solve any 05 questions.

5x6=30

1. सिद्ध कीजिए कि एक अनन्त चक्रीय समूह के स्वकारिताओं के समूह की कोटि 2 है।
Prove that the group of automorphism of an infinite cyclic group is order 2.
2. माना कि R एकक सहित एक वलय है तब प्रत्येक प्रतिलोमीय अवयव $a \in R$, के लिए सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $f: R \rightarrow R$ जो $f(x) = axa^{-1} \quad \forall x \in R$ से परिभाषित है, R पर एक स्वकारिता है
If R be a ring with identify' then for each inversible element $a \in R$, prove that the mapping $f: R \rightarrow R$ defined by $f(x) = axa^{-1} \quad \forall x \in R$ is an automorphism of R .
3. यदि W_1 और W_2 सदिश समष्टि $V(F)$ की उपसमष्टियाँ हैं तब $W_1 + W_2$ $V(F)$ की एक उपसमष्टि है।
If W_1 and W_2 are subspaces of the vector space $V(F)$ then $W_1 + W_2$ is a subspace of $V(F)$.
4. किसी समाकारिता की अष्टि (कर्नेल) सदिश समष्टि $U(F)$ की एक सदिश उपसमष्टि होती है।
The Kernel of a homo-morphism is a vector subspace of $U(F)$.
5. दर्शाइए कि आव्यूह A विकर्णीय है
Show that the matrix A is diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. माना कि $V(f)$ एक आन्तर गुणन समष्टि है। तब सदिशों $\alpha, \beta \in V$ तथा $a \in F$ के लिए
Let $V(f)$ be an inner product space. Then for vectors $\alpha, \beta \in V$ and $a \in F$ we have
i). $(a\alpha, \beta) = a(\alpha, \beta)$ ii). $(\alpha, a\beta) = \bar{a}(\alpha, \beta)$
7. सिद्ध कीजिए कि आन्तर गुणन समष्टि में सदिश α और β रैखिकतः (एक घाततः) परतंत्र है यदि और केवल यदि $|(\alpha, \beta)| = \|\alpha\| \|\beta\|$
Prove that in an inner product space the vectors α and β are linearly dependent if and only if $|(\alpha, \beta)| = \|\alpha\| \|\beta\|$

खण्ड 'स'/Section 'C'

किन्हीं 02 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। Solve any 02 questions.

2 x 15=30

1. अभाज्य-घातांक कोटि का एक समूह अवश्य ही अतुच्छ केन्द्र रखता है।
A group of prime power order must always have a non-trivial centre.
- 2^o अवशेष वर्ग माड्यूलों 5 के क्षेत्र पर निम्न बहुपदों का महत्तम उभयनिष्ठ भाजक ज्ञात कीजिए।
 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$, $g(x) = x^2 + 4$ और इसे दो एकघाती पदों के रूप में व्यक्त कीजिए।
Find the g.c.d. of the following polynomials under modulo 5.
 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$, $g(x) = x^2 + 4$ and express it as linear combination of two polynomials.
3. यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(f)$ का एक उपसमष्टि है तब $\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$
If W is a subspace of a finite dimensional vector space $V(f)$ then $\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$.
4. कौशी-श्वार्ज असमिका कथन सहित सिद्ध कीजिए।
State and proof Cauchy-Schwarz Inequality.
5. परिमित समूह के लिए कौशी के प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।
State and prove Cauchy's theorem for finite group.