Total Pages : 8

KN-112

B.A. (Part-III) Examination, 2022

MATHEMATICS

(Abstract Algebra)

[Paper : Second]

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Passing Marks : 17

Note : Solve **any two** parts from each question. All questions carry **equal** marks.

प्रत्येक प्रश्न के **किन्हीं दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।

UNIT-I / इकाई-I

1. (a) If G is a group and g is fixed elements in G, then prove that the mapping $T_g : G \to G$ defined as

$T_g(x) = gxg^{-1} \forall x \in G$ is an automorphism in G.

यदि G एक समूह हैं तथा g, G का स्थिर अवयव है, तब सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $T_g : G \rightarrow G$ जो $T_g(x) = gxg^{-1} \forall x \in G$ से परिभाषित है, G में एक स्वाकारिता है।

(b) Prove that, the relation of conjugacy is an equivalence relation on group G.

सिद्ध कीजिए कि समूह G पर संयुग्मित सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है।

(c) If G be a finite group of order p^n, where p is prime number and n is a positive integer, then prove that centre of a group G i.e. $z(G) \neq (e)$.

यदि G एक परिमित समूह है जिसकी कोटि p^n है जहाँ p अभाज्य संख्या और n धन पूर्वांक है तब सिद्ध कीजिए कि G का केन्द्र $z(G) \neq (e)$

UNIT-II / इकाई-II

2. (a) Find the g.c.d. of the polynomials $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ and $g(x) = x^2 - x - 2$.

बहुपदों $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ और $g(x) = x^2 - x - 2$ का महत्त्व समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that any two isomorphic integral domains have isomorphic quotient field.

सिद्ध कीजिए कि कोई दो तुल्याकारी पूर्णांकीय प्रान्त तुल्याकारी विभाग क्षेत्र रखते है।

(c) If $f : M \to N$ is an R-homomorphism of an R-module M to an R-module N, Show that :

यदि M तथा N, R-मॉड्यूल हैं तथा $f : M \to N$ एक R-समाकारिता है तब दर्शाइए कि :

(i) Ker f is a R-submodule of M.

Ker f, M का एक R–उपमॉड्यूल है।

(ii) Im f is a R-submodule of N.

Im f, N का एक R–उपमॉड्यूल है।

UNIT-III / इकाई–III

3. (a) Prove that any set of $(n+1)$ or more vectors of finite dimensional vector space $V(F)$ of dimension n is linearly dependent.

सिद्ध कीजिए कि n विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ के प्रत्येक $(n+1)$ या इसके अधिक सदिशों के समुच्चय रैखिकतः परतन्त्र होंगे।

(b) Show that the set $\{1,2,0), (0,3,1), (-1,0,1)\}$ forms a basis of $V_3(R)$.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1,2,0), (0,3,1), (-1,0,1)\}$ $V_3(R)$ का आधार बनाता है।

(c) If $W= \{(a_1,a_2,a_3) : a_1,a_2,a_3 \in F$ and $a_1+a_2+a_3=0\}$

them prove that W is subspace of $V_3(F)$

यदि $W= \{(a_1,a_2,a_3) : a_1,a_2,a_3 \in F$ एवं $a_1+ a_2+ a_3=0\}$

तब सिद्ध कीजिए कि $W, V_3(F)$ सदिश उपसमष्टि होगी।

UNIT-IV / इकाई–IV

4. (a) State and prove that Rank nullity theorem.

जाति शून्यता प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(b) Find the symmetric matrix B which corresponds to quadratic form $q = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$.

द्विघाती समघात $q = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$ के संगत सममित आब्यूह B को ज्ञात कीजिए।

(c) If T be a linear transformation on the vector space $V_3(F)$ defined by $T(a,b,c) = (2b+c, a-4b, 3a)$ then find the matrix of T relative to the basis :

$B=\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

यदि सदिश समष्टि $V_3(F)$ पर T एक रैखिक रूपान्तरण है जो निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$T(a,b,c) = (2b+c, a-4b, 3a)$ T का आब्यूह, आधार $B=\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।

UNIT-V / इकाई–V

5. (a) State and prove that Cauchy-Schwartz's inequality.

कॉशी–स्वार्ज असमिका को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(b) Prove that in an inner product space the set of orthonormal vectors are linearly independent.

सिद्ध कीजिए एक आन्तर गुणन समष्टि में सदिशों का प्रसामान्य लाम्बिक समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र होता है।

(c) Explain : "Gram-Schmidt orthogonalization process.

विस्तार कीजिए : "ग्राम-श्मिट लांबिकता प्रक्रम"।

----x----