Total Pages : 8

K-69

B.A. (Part-II) Examination, 2022

(Old Course)

148

MATHEMATICS

[Paper : First]

(Advanced Calculus)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Passing Marks : 17

Note : **All** questions are **compulsory**. Attempt **any two** parts from each unit. **All** questions carry equal **marks**.

सभी प्रश्न **अनिवार्य** हैं। प्रत्येक इकाई से **किन्हीं दो** भागों को हल कीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।

UNIT-I / इकाई-I **[5×2=10]**

1. (a) Show that sequence $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$ is convergent sequence.

दर्शाइये कि अनुक्रम $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$ एक अभिसारी अनुक्रम है।

(b) Test the convergence or divergence of the following infinite series :

$$\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\ldots\ldots$$

निम्न अनंत श्रेणी के अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\ldots\ldots$$

(c) Define absolute convergence and test the absolute convergence of the :

$$x-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\ldots\ldots$$

निरपेक्ष अभिसरण को परिभाषित कीजिए तथा निम्न श्रेणी के निरपेक्ष अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$x-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\ldots\ldots$$

UNIT-II / इकाई-II [5×2=10]

2. (a) Examine the continuity of the following function $f(x)$ at $x = 0$:

$$f(x) = \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}} \text{ when } x \neq 0,\ f(0) = 0.$$

निम्न फलन $f(x)$ के सांतत्य का $x = 0$ पर परीक्षण कीजिए :

$$f(x) = \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}} \text{ जब } x \neq 0,\ f(0) = 0.$$

(b) Using mean value theorem, prove the following :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x \text{ where } x > 0.$$

माध्यमान प्रमेय के प्रयोग से निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x \text{ जहाँ } x > 0.$$

(c) By using Taylor theorem, prove that :

$$\sin ax = ax - \frac{a^3x^3}{\lfloor 3} + \frac{a^5x^5}{\lfloor 5} + ... + \frac{a^nx^n}{\lfloor n} \sin\left(a\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

टेलर प्रमेय के उपयोग से, सिद्ध कीजिए :

$$\sin ax = ax - \frac{a^3x^3}{\lfloor 3} + \frac{a^5x^5}{\lfloor 5} + ... + \frac{a^nx^n}{\lfloor n} \sin\left(a\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

UNIT-III / इकाई-III **[5×2=10]**

3. (a) If $V = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$, then prove that :

$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = -V$$

यदि $V = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$ तब सिद्ध कीजिए :

$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = -V$$

(b) Transform the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \cot x\frac{dy}{dx} + 4y\,\text{cosec}^2 x = 0$$

by $z = 2\log\tan x/2$

समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \cot x \frac{dy}{dx} + 4y \operatorname{cosec}^2 x = 0$ का $z = 2 \log \tan x/2$ द्वारा रूपान्तरण कीजिए।

(c) If $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ and $y_3 = \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \cos x_3$ then prove that :

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = -\sin^3 x_1 \cdot \sin^2 x_2 \cdot \sin x_3$$

यदि $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ तथा $y_3 = \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \cos x_3$, तब सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = -\sin^3 x_1 \cdot \sin^2 x_2 \cdot \sin x_3$$

UNIT-IV / इकाई-IV **[5×2=10]**

4. (a) Find the envelope of the family of straight lines $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$,where m is the parameter.

सरल रेखाओं के कुल $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ m एक प्राचल है।

(b) Find the minimum value of a function $x^2 + y^2 + z^2$ when $ax + by + cz = p$ (Given).

फलन $x^2 + y^2 + z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जबकि $ax + by + cz = p$ (दिया है)

(c) If $U = x^2 y^3 z^4$ and $2x + 3y + 4z = a$ then show that the maximum value of U is $\left(\frac{a}{9}\right)^9$.

यदि $U = x^2 y^3 z^4$ तथा $2x + 3y + 4z = a$ तब दर्शाइए कि U का उच्चिष्ठ मान $\left(\frac{a}{9}\right)^9$ है।

UNIT-V / इकाई-V **[5×2=10]**

5. (a) Show that :

$$\beta(m,n) = \frac{\lceil m \lceil n}{\lceil m+n} \quad (m,n > 0)$$

दर्शाइये कि :

$$\beta(m,n) = \frac{\lceil m \lceil n}{\lceil m+n} \quad (m,n > 0)$$

(b) Change order of integration in

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dx\, dy \text{ and solve it.}$$

समाकलन का क्रम परिवर्तन कीजिए

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dx\, dy \text{ तथा इसे हल कीजिए।}$$

(c) Evaluate :

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{x+y^2} x\ dx\, dy\, dz\,.$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{x+y^2} x\ dx\, dy\, dz\,.$$

----x----