Total Pages : 8

K -236

B.Sc. (Part-III) Examination, 2022

(Old Course)

MATHEMATICS

[Paper : First]

(Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

Note : All questions are **compulsory**. Attempt **any two** part from each question. **All** questions carry **equal** marks.

सभी प्रश्न **अनिवार्य** हैं। प्रत्येक प्रश्न से **कोई दो** भाग हल कीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।

Unit-I / इकाई–I

1. (a) Prove that : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ converges if $p>1$ and diverges if $p\le 1$.

सिद्ध कीजिए : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ अभिसरित होती है यदि $p>1$ और अपसरित होती है यदि $p\le 1$.

(b) Write and prove that "Sufficient condition for differentiability."

"अवकलनीयता के पर्याप्त प्रतिबन्ध" को लिखकर सिद्ध कीजिए।

(c) Explain : "Euler's Formula"

विस्तार कीजिए : "आयलर का सूत्र"

Unit-II / इकाई–II

2. (a) Let f be a bounded function on $[a, b]$, then prove that the insertion of an extra point of partition $[a, b]$ does not increase the upper Riemann sum.

माना f अन्तराल $[a,b]$ पर एक परिबद्ध फलन है, तब सिद्ध कीजिए कि $[a,b]$ के विभाजन में एक अतिरिक्त बिन्दु लेने पर उपरि रीमान योग नहीं बढ़ता।

(b) Explain : "Second Fundamental Theorem of Calculus- Improved Form."

विस्तार कीजिए : "कलन की द्वितीय मूल प्रमेय – संशोधित रूप"

(c) Prove that the integral $\int_a^\infty \frac{dt}{t^n}$, $a>0$ is convergent if $n>1$ and divergent if $n \leq 1$.

सिद्ध कीजिए कि $\int_a^\infty \frac{dt}{t^n}$, $a>0$ अभिसारी होगा यदि $n>1$ और अपसारी होगा यदि $n \leq 1$

Unit-III / इकाई–III

3. (a) Explain : The necessary condition for f (z) to be analytic.

फलन f (z) के विश्लेषिक होने के अनिवार्य प्रतिबद्ध को समझाइए।

(b) If $z_1=x_1+iy_1$ and $z_2=x_2+iy_2$, then

$$\frac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp (z_1 - z_2)$$

यदि $z_1=x_1+iy_1$ और $z_2=x_2+iy_2$, तब

$$\frac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp (z_1 - z_2)$$

(c) Prove that : Every Mobius transformation maps circles into circles.

सिद्ध कीजिए : प्रत्येक मोबियस रूपान्तरण वृत्तों को वृत्तों में प्रतिचित्रित करता है।

Unit-IV / इकाई–IV

4. (a) Let (X, d) be a metric space. Then prove that if

$$d^*(x, y) = \min\{1, d(x,y)\} = \begin{cases} d(x,y) & if\ d(x,y) > 1 \\ 1 & if\ d(x,y) \geq 1 \end{cases}$$

Then d* is bounded metric space on X.

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है, तब दर्शाइए कि

$$d^*(x, y) = \min\{1, d(x,y)\} = \begin{cases} d(x,y) & \text{यदि } d(x,y) > 1 \\ 1 & \text{यदि } d(x,y) \geq 1 \end{cases}$$

से परिभाषित फलन, X पर एक परिबद्ध दूरीक है।

(b) Explain : "Contraction principle"

विस्तार कीजिए : "संकुचन सिद्धान्त"

(c) Prove that $\sqrt{8}$ is not a rational number.

सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{8}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

Unit-V / इकाई–V

5. (a) Define each of the following with example :

निम्नलिखित की परिभाषा, उदाहरण सहित दीजिए :

(i) Separable space

पृथक्करणीय समष्टि

(ii) Second Countable space

द्वितीय गणनीय समष्टि

(b) Prove that : A compact metric space has the Bolzano-Weierstrass property.

सिद्ध कीजिए : एक संहत दूरीक समष्टि, बोल्जानो वीरस्ट्रास गुण धर्म रखता है।

(c) Let (X, d) be a metric space and A, B $\subset$ X be closed. If $A \cup B$ and $A \cap B$ are connected, then prove that A is connected.

माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा A, B $\subset$ X संवृत है। यदि $A \cup B$ तथा $A \cap B$ सम्बद्ध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि A सम्बद्ध है।

----x----