Printed Pages : 8

K-111

B.A. (Part-III) Examination, 2022

(Old Course)

MATHEMATICS

(Analysis)

[Paper : First]

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Passing Marks : 17

Note : **All** questions are **compulsory**. Attempt **any two** parts from each question. **All** questions carry **equal** marks.

सभी प्रश्न **अनिवार्य** हैं। प्रत्येक प्रश्न के **कोई दो** भागों को हल कीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।

UNIT-I / इकाई–I

1. (a) State and prove Abel's test.

आबेल परीक्षण को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(b) State and prove Young's theorem for two variables.

दो चरों के लिये यंग प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(c) Find the Fourier Series of the periodic function f(x) :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{for } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

निम्नलिखित आवर्ती फलन f(x) की फुरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } -\pi < x < 0 \quad \textbf{के लिये} \\ x, & \text{for } 0 \le x \le \pi \quad \textbf{के लिये} \end{cases}$$

UNIT-II / इकाई–II

2. (a) Show that : $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \log\left(\frac{b}{a}\right)$

दर्शाइये कि : $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \log\left(\frac{b}{a}\right)$

(b) Discuss the convergence of the function, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

फलन $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

(c) Prove that every continuous function is Riemann integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सतत फलन रीमान समाकलनीय होता है।

UNIT-III / इकाई–III

3. (a) If U-V = $(x-y)(x^2 + 4xy + y^2)$ and f(z) = U + IV is an analytic function at z = x + iy then find f(z) in terms of z.

यदि U-V = $(x-y)(x^2 + 4xy + y^2)$ तथा f(z) = U + IV, z = x + iy का एक वैश्लेषिक फलन है, तब f(z) को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

(b) Show that the transformation $w = \frac{2z+3}{z-4}$ maps the circle $x^2 + y^2 - 4x = 0$ onto the straight line $4u + 3 = 0$.

दर्शाइये कि रूपान्तरण $w = \frac{2z+3}{z-4}$ वृत्त $x^2 + y^2 - 4x = 0$ को सरल रेखा $4u + 3 = 0$ पर प्रतिचित्रित करता है।

(c) Let $f(z) = z^n$ then prove that $f'(z) = nz^{n-1} n \geq 1$ be a integer.

माना $f(z) = z^n$ $(n \geq 1$ एक पूर्णांक है) तो सिद्ध कीजिए कि $f'(z) = nz^{n-1}$

UNIT-IV / इकाई–IV

4. (a) Let (X, d) be a metric space. Show that the function $d^* : X \times X \to R$ defined by : $d^*(x, y) = \min \{1, d(x, y)\}$ is bounded metric on X.

माना (X, d) एक दूरिक समष्टि है। दर्शाइये कि फलन $d^* : X \times X \to R$ इस प्रकार है कि $d^*(x, y) = \min \{1, d(x, y)\}$, X पर एक परिबद्ध दूरिक है।

(b) Let (X, d) be a metric space, then prove that :

$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \ \forall \ x, y, z \in X$

एक दूरिक समष्टि में सिद्ध कीजिए कि :

$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \ \forall \ x, y, z \in X$

(c) Prove that in a metric space every closed sphere is a closed set.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में प्रत्येक संवृत्त गोलक एक संवृत समुच्चय होता है।

UNIT-V / इकाई–V

5. (a) Every metric space is first countable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक दूरिक समष्टि प्रथम गणनीय है।

(b) State and prove Extension theorem.

विस्तार प्रमेय का कथन लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

(c) State and prove Baire's category theorem.

बेयर संवर्ग प्रमेय को लिखिए व सिद्ध कीजिए।

----x----