

Total No. of Questions—15

Total No. of Printed Pages—8

Regd. No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

MATHEMATICS (Bridge Course)—I

Paper I

(English Version)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

Note :— Answer *all* questions from Section A and *three* questions from Section B.

SECTION A

10×3=30

Note :— (i) Answer ALL questions.

(ii) Each question carries THREE marks.

1. If $f(x) = ax + b$, then find $f^{-1}(x)$.
2. If $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ and $\vec{c} = \vec{j} + 2\vec{k}$, then find unit vector in the opposite direction of $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
3. Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

4. Find the derivative of $\sin^{-1}(3x - 4x^3)$.
5. Find the equation of locus of a point which is at a distance of 5 units from A(4, -3).
6. Find the sum of the squares of the intercepts of the line $4x - 3y = 12$ on the axes of co-ordinates.
7. If the straight lines $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$, $cx + ay + b = 0$ are concurrent, then prove that $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

8. If

$$\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \theta,$$

then prove that :

$$\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta.$$

9. If $A + B + C = 90^\circ$, then prove that :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C.$$

10. Prove that :

$$\tan \theta \tan (60 - \theta) \tan (60 + \theta) = \tan 3\theta.$$

SECTION B

3×15=45

Note :—(i) Answer ANY THREE questions.

(ii) Each question carries FIFTEEN marks.

11. (i) (a) Prove that by using Mathematical Induction :

$$1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \text{ for all}$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

(b) Solve the following system of equations using Cramer's rule :

$$x - y + 3z = 5, \quad 4x + 2y - z = 0, \quad -x + 3y + z = 5.$$

Or

(ii) (a) Prove that $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ using Mathematical

Induction ($\forall n \in \mathbb{N}$).

(b) Prove that :

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a+b & b+c & c+a \\ a & b & c \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

12. (i) (a) Prove that if $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$, then $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$.

(b) Show that the tangent at any point θ on the curve $x = c \sec \theta$, $y = c \tan \theta$ is $y \sin \theta = x - c \cos \theta$.

Or

(ii) (a) Find the derivative of $\tan 2x$ from the first principle.

(b) Find the slope of the tangent to the curve $y = 3x^4 - x$ at $x = 4$.

13. (i) (a) Find the circumcentre of the triangle whose vertices are $(-2, 3)$, $(2, -1)$ and $(4, 0)$.

(b) Prove that the lines represented by the equations $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ and $x + y = 3$ form an equilateral triangle.

Or

(ii) (a) Find the equation of pair of lines intersecting at $(2, -1)$ and parallel to the pair of $6x^2 - 13xy - 5y^2 = 0$.

(b) Find the direction cosines of two lines which are connected by the relation $l + m + n = 0$ and $mn - 2nl - 2lm = 0$.

14. (i) (a) Prove that :

$$\left(1 + \cos \frac{\pi}{10}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{10}\right) \left(1 + \cos \frac{7\pi}{10}\right) \left(1 + \cos \frac{9\pi}{10}\right) = \frac{1}{16}.$$

(b) If $A + B + C = 180^\circ$, prove that :

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Or

(ii) (a) Solve :

$$\tan \theta + 3 \cot \theta = 5 \sec \theta.$$

(b) If

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{a + b}{a - b},$$

then prove that $a \tan \beta = b \tan \alpha$.

15. (i) (a) If $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$, then prove that $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a}$.

(b) If the tangent at any point on the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ intersects the coordinate axes in A and B, then show that the length AB is a constant.

Or

(ii) (a) Find the acute angle between the pair of lines represented by $x^2 - 7xy + 12y^2 = 0$.

(b) Solve :

$$1 + \sin^2 x = 3 \sin x \cos x.$$

1004 (New)

(Telugu Version)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

సూచనలు:— Section A నుండి అన్నింటికి మరియు Section B నుండి ఏదైనా మూడు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

SECTION A

10×3=30

సూచనలు:—(i) అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(ii) ప్రతి ప్రశ్నకు మూడు మార్కులు.

1. $f(x) = ax + b$ అయిన $f^{-1}(x)$ విలువ కనుగొనుము.
2. $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ మరియు $\vec{c} = \vec{j} + 2\vec{k}$ అయిన $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ కు వ్యతిరేఖ దిశలో యూనిట్ నదికను కనుగొనుము.
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$ విలువను గణించుము.
4. $\sin^{-1}(3x - 4x^3)$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనుము.
5. A(4, -3) బిందువు నుండి 5 యూనిట్ల దూరంలో సంచరించు బిందువు బిందు వధము కనుగొనుము.
6. $4x - 3y = 12$ నూచించు రేఖ నిరూపకాలపై చేయు అంతర ఖండాల వర్గాల మొత్తం కనుగొనుము.
7. $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$, $cx + ay + b = 0$ అను రేఖలు మిళితాలు అయితే $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ అని చూపుము.

8. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ అయిన

$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ అని చూపుము.

9. $A + B + C = 90^\circ$ అయిన

$\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C$ అని చూపుము.

10. $\tan\theta \tan(60 - \theta) \tan(60 + \theta) = \tan 3\theta$ అని చూపుము.

SECTION B

3×15=45

సూచనలు:—(i) ఏవైనా మూడు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(ii) ప్రతి ప్రశ్నకు పదిహేను మార్కులు.

11. (i) (a) $1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + n(n + 2) = \frac{n(n + 1)(2n + 7)}{6} \quad n \in \mathbb{N}$

అని గణితాను గమన పద్ధతిలో నిరూపించుము.

(b) క్రామర్స్ పద్ధతిని ఉపయోగించి కింది సమీకరణాలను సాధించుము :

$x - y + 3z = 5, 4x + 2y - z = 0, -x + 3y + z = 5.$

లేదా

(ii) (a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ అని గణితాను

గమన పద్ధతిన నిరూపించుము.

(b)
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a+b & b+c & c+a \\ a & b & c \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$
 అని చూపుము.

12. (i) (a) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$, అయిన $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ అని చూపుము.

(b) $x = c \sec \theta$, $y = c \tan \theta$ అను వక్రంపై θ అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ $y \sin \theta = x - c \cos \theta$ అని చూపుము.

లేదా

(ii) (a) $\tan 2x$ యొక్క అవకలణాన్ని ప్రాథమిక సూత్రము నుండి కనుగొనుము.

(b) $y = 3x^4 - x$ అను వక్రానికి $x = 4$ వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు కనుగొనుము.

13. (i) (a) $(-2, 3)$, $(2, -1)$ మరియు $(4, 0)$ లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజానికి పరివృత్త కేంద్రాన్ని కనుగొనుము.

(b) $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ మరియు $x + y = 3$ లు సూచించు రేఖలు సమభాషా త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపుము.

లేదా

(ii) (a) $6x^2 - 13xy - 5y^2 = 0$. సూచించు రేఖాయుగ్మానికి సమాంతరంగా ఉంటూ $(2, -1)$ వద్ద ఖండించుకొనే రేఖా యుగ్మ సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.

(b) $l + m + n = 0$ మరియు $mn - 2nl - 2lm = 0$ అను సమీకరణాలతో సూచించబడు రెండు రేఖల దిక్ కొస్తైన్స్ ను కనుగొనుము.

14. (i) (a) $\left(1 + \cos \frac{\pi}{10}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{10}\right) \left(1 + \cos \frac{7\pi}{10}\right) \left(1 + \cos \frac{9\pi}{10}\right) = \frac{1}{16}$ అని చూపుము.

(b) $A + B + C = 180^\circ$ అయితే :

$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin A/2 \sin B/2 \cos C/2$. అని చూపుము.

లేదా

(ii) (a) $\tan \theta + 3 \cot \theta = 5 \sec \theta$ ను సాధించుము.

(b) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{a + b}{a - b}$ అయిన

$a \tan \beta = b \tan \alpha$. అని చూపుము.

15. (i) (a) $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$, అయిన $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a}$ అని నిరూపించుము.

(b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ అను వక్రానికి ఏదేని బిందువు వద్ద గీచిన స్పర్శరేఖ నిరూపకాలను A మరియు B లలో ఖండిస్తే, AB పొడవు స్థిరము అని చూపుము.

లేదా

(ii) (a) $x^2 - 7xy + 12y^2 = 0$ నూచించు రేఖల మధ్య లఘు కోణాన్ని కనుగొనుము.

(b) $1 + \sin^2 x = 3 \sin x \cos x$ ను సాధించుము.