

AJ-1106
B.A./B.Sc. (Part-I)
Term End Examination, 2021-22
MATHEMATICS (Paper—I)

Time : Three hours]

[Maximum Marks : 50

नोट— प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई-I / Unit-I

1. (a) प्रारंभिक पंक्ति संक्रिया द्वारा आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिये।

By using elementary row operations find the inverse of the matrix.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (b) सिद्ध कीजिये कि एकक आव्यूह के आइगन मान इकाई मापांक का होता है।
Prove that the eigen values of a unitary matrix are of unit modulus.
- (c) कैली-हेमिल्टन प्रमेय को लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।
State and prove Cayley-Hamilton theorem.

इकाई-II / Unit-II

2. (a) λ, μ के किन मानों के लिये समीकरण निकाय—

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

- (i) कोई हल नहीं रखता (ii) अद्वितीय हल रखता है। (iii) अनंत हल रखता है।

For what values of λ, μ the equations :

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

have (i) no solution (ii) a unique solution (iii) an infinity of solutions

- (b) यदि α, β, γ समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के मूल हैं तो उस समीकरण को ज्ञात कीजिये जिसके मूल $\frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \frac{\beta}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$ हैं।

If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \frac{\beta}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$.

[P.T.O.]

- (c) समीकरण $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ को दकार्ते विधि से हल कीजिये।

Solve the equation $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ by Descarte's method.

इकाई-III / Unit-III

3. (a) यदि R और S , समुच्चय X में तुल्यता संबंध है तो सिद्ध कीजिये कि $R \cap S$ भी X में एक तुल्यता संबंध है।

If R and S be equivalence relations in the set X , then show that $R \cap S$ is an equivalence relation in X .

- (b) यदि G एक समूह है तब $a \in G$ इस प्रकार है कि $o(a) = n$ । तब सिद्ध कीजिये कि $a^m = e$ यदि और केवल n, m का एक भाजक है।

Let G be a group and $a \in G$ be such that $o(a) = n$. Then prove that $a^m = e$ iff n is a divisor of m .

- (c) माना H, G का एक उपसमूह है और N, G का प्रसामान्य उपसमूह है तब सिद्ध कीजिये कि $H \cap N$, H का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

If H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G then show that $H \cap N$ is a normal subgroups of H .

इकाई-IV / Unit-IV

4. (a) समूह की समाकारिता का आधारभूत प्रमेय लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

State and prove fundamental theorem on Homomorphism, of groups.

- (b) यदि $f: R \xrightarrow{\text{into}} R'$ एक समाकारिता है तब सिद्ध कीजिये कि f की अष्टि R का एक गुणजावली होता है।

If $f: R \xrightarrow{\text{into}} R'$ is a homomorphism then show that Kernel of f is an ideal of R .

- (c) सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णाकीय प्रांत होता है।

Show that every field is an integral domain.

इकाई-V / Unit-V

5. (a) समीकरण $x^7 + 1 = 0$ को कीजिये।

Solve : $x^7 + 1 = 0$

- (b) यदि $i^\alpha + i^\beta = (\alpha + i\beta)$ तो सिद्ध कीजिये कि $\alpha^2 + \beta^2 = e^{-(4n+1)\pi\beta}$ ।

If $i^\alpha + i^\beta = \alpha + i\beta$ then show that $\alpha^2 + \beta^2 = e^{-(4n+1)\pi\beta}$.

- (c) यदि x, y, z इकाई के घनमूल हैं, तो सिद्ध कीजिये कि—

$$\frac{\tan^{-1} x}{x} + \frac{\tan^{-1} y}{y} + \frac{\tan^{-1} z}{z} = 3 \left[1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \frac{1}{25} \dots \right]$$

If x, y, z are cube root of unity then prove that :

$$\frac{\tan^{-1} x}{x} + \frac{\tan^{-1} y}{y} + \frac{\tan^{-1} z}{z} = 3 \left[1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \frac{1}{25} \dots \right]$$